EPFL - Information, Calcul et Communication - Partie théorique

Série 8

Rappel de trigonométrie

Soient a, b, u, v des nombres réels. Alors on a les relations suivantes :

$$\cos(b) - \cos(a) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(b) - \sin(a) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

ou de manière équivalente :

$$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v) \quad \text{et} \quad 2\cos(u)\sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

On rappelle également que $\cos(a) = \sin(a + \frac{\pi}{2})$, $\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$, $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$ et $\sin'(a) = \cos(a)$.

1 Bande passante et fréquence d'échantillonnage

a) Soit $X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t)$ un signal de bande passante $B = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.
Quelle est la bande passante des signaux suivants ?

1. $2X(t)$

2. $X(t-1)$

3. $X(3t)$

4. $X(t) + \sin(2\pi f t)$, avec $f \neq f_1, f_2, \ldots, f_n$

5. $X'(t)$ [i.e., la dérivée de la fonction $X(t)$]

De manière correspondante, à quelle fréquence f_e recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux ?

b) Soient maintenant $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux de la forme ci-dessus, avec bandes passantes B_X et B_Y, respectivement. *Que pouvez-vous dire* sur la bande passante des signaux suivants ?

1. $X(t) + Y(t)$

2. $X(t) \cdot Y(t)$

De manière correspondante, à quelle fréquence f_e recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux ?

2 Interlude musical

Durant une heure, on enregistre un concert de musique à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute autre forme de compression) ?

3 Signaux périodiques et apériodiques

Un signal $X(t)$ est dit *périodique de période* $T > 0$ si T est la plus petite valeur possible pour laquelle $X(t) = X(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (exemple : une sinusoïde pure de fréquence $f = 1/T$ est périodique de période T). Remarquer qu'on a alors également $X(t + kT) = X(t)$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$.

a) Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même période T. Est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique ? Si oui, avec quelle période ?

b) Soient encore $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes T_1 et T_2, respectivement. Si T_1 et T_2 sont des nombres entiers, est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique ? Si oui, avec quelle période ?

c) Un cas particulier : une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale f_0 et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de f_0. La note est donc un signal de la forme :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

où le coefficient $a_n > 0$ est l'amplitude de la n^e harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique ? Si oui, avec quelle période ?

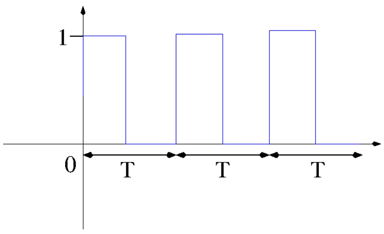
d) De manière plus générale, est-il toujours vrai que la somme $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique ? (une justification formelle ne vous est pas demandée ici).

Indication : Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse de manière numérique en représentant différents signaux sur `www.wolframalpha.com`. Essayez par exemple de rentrer ces deux formules sur le site :

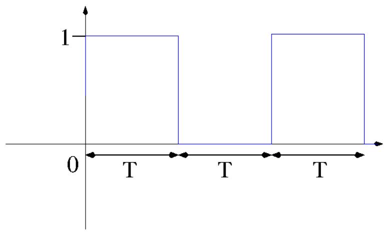
"sin(2 pi t) + cos(4 pi t)" et "sin(2 pi t) + cos(4 t)"

4 Filtre à moyenne mobile

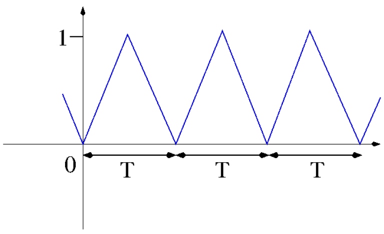
a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$?



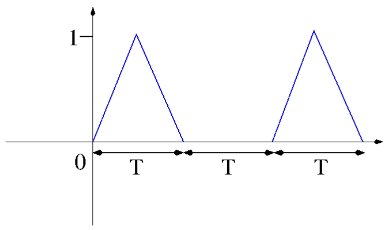
$X_1(t)$



$X_2(t)$



$X_3(t)$



$X_4(t)$

Pas besoin ici de formules mathématiques pour répondre : des dessins suffiront !

b) Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période T (voir exercice 3) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même période $T_c = T$?

c) Soit $X(t) = \sin(2\pi f t)$, une sinusoïde pure de fréquence f. Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période T_c, l'amplitude du signal sortant $\widehat{X}(t)$ satisfait l'inégalité

$$|\widehat{X}(t)| \leq |\text{sinc}(f\,T_c)| \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

où on rappelle que $\text{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ par définition.

5 Questions d'examens passés

a) Si la fréquence d'échantillonnage est trop faible, le signal échantillonné peut sembler osciller plus lentement, voire dans le sens inverse du signal original — un phénomène appelé *effet stroboscopique.*

- ☐ VRAI
- ☐ FAUX

b) Réduire la période de coupure d'un filtre à moyenne mobile rend la sortie plus lisse, car la fenêtre de moyenne devient plus courte.

- ☐ VRAI
- ☐ FAUX

c) On suppose que le signal suivant $X(t)$ est le signal d'entrée d'un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure de 15 Hz.

$$X(t) = 3\sin(20\pi t) + 2\sin(40\pi t) + 4\sin(24\pi t) + 4\sin(24\pi t + \pi)$$

Parmi les expressions suivantes, laquelle représente correctement le signal de sortie, $\hat{X}(t)$?

- ☐ $\hat{X}(t) = 3\sin(20\pi t)$
- ☐ $\hat{X}(t) = 3\sin(20\pi t) + 8\sin(24\pi t)$
- ☐ $\hat{X}(t) = 3\sin(20\pi t) + 2\sin(40\pi t)$
- ☐ $\hat{X}(t) = 0$

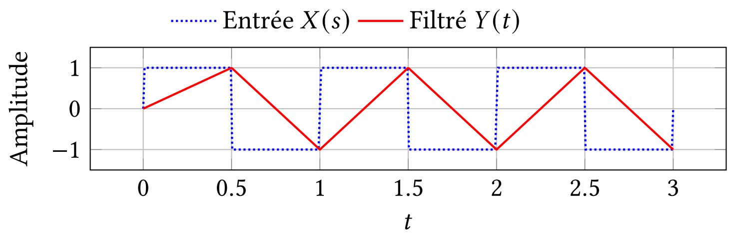
d) Soit un signal $X_1(t)$ périodique de période T_1, et un signal $X_2(t)$ périodique de période T_2. Pour laquelle (lesquelles) des paires de périodes suivantes le signal somme $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ est-il périodique ?

- ☐ $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$
- ☐ $T_1 = 0.5$ et $T_2 = 0.75$
- ☐ $T_1 = 1$ et $T_2 = \pi$
- ☐ $T_1 = 2$ et $T_2 = \sqrt{2}$

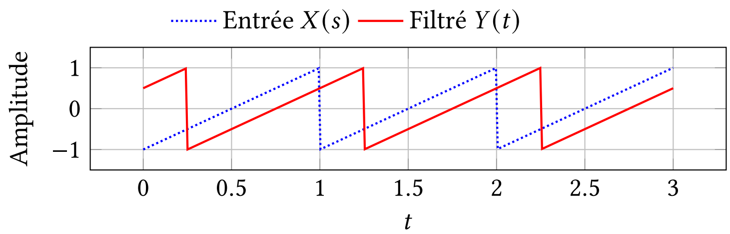
e) Chaque figure ci-dessous montre un signal d'entrée $X(t)$ (trait pointillé) et sa sortie filtrée $Y(t)$ (trait plein), après passage dans un filtre à moyenne mobile de largeur $T_c = 0.5$:

$$Y(t) = \frac{1}{T_c}\int_{t-T_c}^{t} X(s)\,ds$$

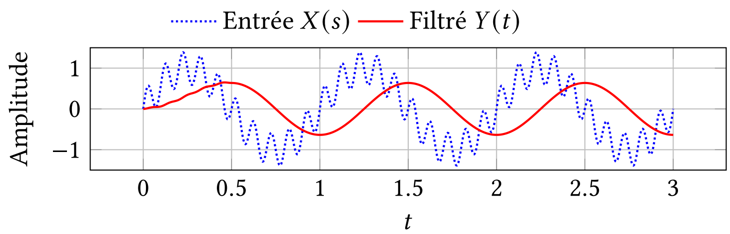
Quelle ou quelles figures sont compatibles avec un tel filtrage ?



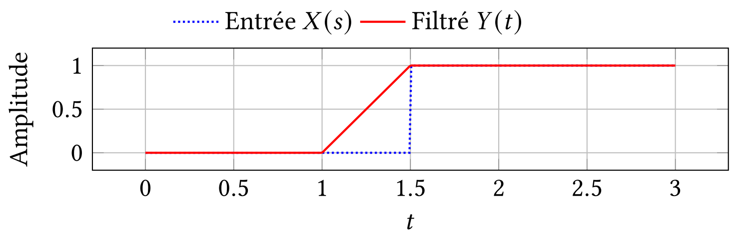
☐



☐



☐



☐