

Série 6: Solutions

1 Nombre de bits

a)

1. Il y a environ 14'000 étudiants inscrits en tout à l'EPFL (en Mars 2025), donc $\lceil \log_2(14'000) \rceil = 14$ bits sont nécessaires.
2. La vidéo avec le plus de vues sur Youtube est "Baby Shark Dance", avec environ 15,7 milliards de vues (en Mars 2025), donc 34 bits sont nécessaires. Youtube a d'ailleurs eu un problème d'overflow à ce sujet en 2014 lorsque le nombre de vues de la vidéo "Gangnam Style" de Psy a dépassé $2'147'483'647 = 2^{31} - 1$, qui était la valeur maximum représentable sur 32 bits avec des entiers signés. Depuis, Youtube est passé à une représentation à 64 bits du nombre de vues, ce qui laisse une certaine marge pour l'occurrence du prochain overflow!
3. Le nombre d'habitants sur la planète est de 8 milliards environ (en Mars 2025), donc le nombre de bits nécessaires pour représenter cette information vaut 33.

b)

1. 250 étant plus petit ou égal à $2^8 = 255$, le nombre des étudiants présents est un nombre représentable sur 8 bits.
2. Pour établir la liste des étudiants présents, on a par contre besoin de savoir pour *chaque* étudiant inscrit s'il est présent (1) ou non (0). On a donc besoin ici de 250 bits.

2 Conversion de décimal en binaire

conversion de décimal en binaire
entrée : L liste de chiffres de 0 à 9, de taille n sortie : M liste de bits, de taille m
<pre> $N \leftarrow 0$ Pour i allant de 1 à n $N \leftarrow N + L(i) * 10^{n-i}$ $m \leftarrow 0$ $M \leftarrow ()$ (liste vide) Tant que $N > 0$ $m \leftarrow m + 1$ $M \leftarrow (N \bmod 2) \oplus M$ (ajouter au début de la liste M un élément dont la valeur est le reste de la division entière de N par 2) $N \leftarrow N \div 2$ (remplacer N par le quotient de la division entière de N par 2) Si $M = ()$ (pour gérer le cas particulier où $N = 0$) $m \leftarrow 1$ $M \leftarrow (0)$ Sortir : M, m </pre>

Vu qu'il y a deux boucles qui se suivent, et que m est proportionnel à n , la complexité de l'algorithme est $\Theta(n)$ (et donc $\Theta(\log_2(N))$ si on veut exprimer celle-ci en fonction de la valeur du nombre N à représenter).

3 Utiliser la décomposition binaire

a) Exemple de déroulement de l'algorithme pour $x = 7$ et $y = 5$:

x	7	7	14	28	28
y	5	4	2	1	0
z	0	7	7	7	35

Cet algorithme permet donc de calculer le produit entre deux nombres entiers: **devinette**(x, y) = $x \cdot y$. Plus précisément, on utilise ici la décomposition binaire du nombre $y = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$, avec $b_i \in \{0, 1\}$. Vous pouvez vérifier (même si ça n'est pas forcément facile à voir au premier coup d'oeil) que la boucle de l'algorithme effectue le calcul $x \cdot y = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x 2^i$ (en fait, ceci correspond à une "bête" multiplication en colonnes, mais en binaire).

b) La complexité temporelle de cet algorithme est un $\Theta(n^2)$ [la boucle "Tant que" s'exécute au pire n fois (i.e., autant de fois qu'il y a de bits dans y), et les additions $z \leftarrow z + x$ prennent chacune de l'ordre de n opérations].

4 10 rats pour 1'000 bouteilles

- La solution de faire tester une bouteille (différente) à chaque rat, n'est clairement pas la bonne, vu la contrainte de temps: en 24h, on n'aura testé que 10 bouteilles, et 990 resteront sur le tapis. Evidemment, on pourrait avoir la chance que l'une des 10 bouteilles testées soit celle qui est empoisonnée, auquel cas on saura que les 990 autres sont bonnes. Mais on ne veut pas compter sur la chance.

- Il semble donc nécessaire de faire goûter plus d'une bouteille à chaque rat. On pourrait par exemple diviser le nombre de bouteilles en 10 ensembles de 100 et faire goûter 100 bouteilles à chaque rat. De cette manière, on serait en mesure de dire que 900 bouteilles sont bonnes, mais on devrait jeter les 100 bouteilles goûtées par le rat qui aura eu des convulsions. Un réel gâchis...

- Pour tirer le maximum d'information de cette séance de dégustation, il est aussi nécessaire de faire goûter la même bouteille à plusieurs rats. Voyons comment procéder si on n'a que 4 bouteilles (numérotées de 1 à 4) et 2 rats à disposition (disons 1 et 2): on fait alors goûter un mélange des bouteilles 1 et 3 au rat 1, ainsi qu'un mélange des bouteilles 1 et 2 au rat 2:

- si les rats 1 et 2 sont tous deux empoisonnés, alors la bouteille 1 l'est
- si seul le rat 2 est empoisonné, alors la bouteille 2 l'est
- si seul le rat 1 est empoisonné, alors la bouteille 3 l'est
- si aucun n'est empoisonné, alors la bouteille 4 l'est

C'est le même principe avec 1'000 bouteilles et 10 rats (qu'on renumérote de 0 à 999 et de 0 à 9, respectivement). Tout d'abord, pour faire un compte rond, on ajoute 24 bouteilles d'eau (non-empoisonnée) à la liste: on obtient ainsi $N = 1024 = 2^{10}$ bouteilles à tester (en oubliant qu'on sait qu'aucune des 24 dernières n'est empoisonnée). On fait ensuite goûter un mélange de 512 bouteilles à chaque rat, en les répartissant comme suit:

- le rat 0 teste un mélange de toutes les bouteilles impaires
- le rat 1 teste un mélange des bouteilles 2,3, 6,7, 10,11, 14,15, 18,19, etc.
- le rat 2 teste un mélange des bouteilles 4,5,6,7, 12,13,14,15, 20,21,22,23, etc.
- et ainsi de suite jusqu'au rat 9 qui teste un mélange des 512 dernières bouteilles

Selon les rats qui sont empoisonnés, on déduit de manière unique le numéro de la bouteille empoisonnée. Notez que cette solution correspond exactement à encoder sur 10 bits (avec la correspondance 1 = rat empoisonné, 0 = rat non-empoisonné) un nombre entre 0 et 1'023 (= le numéro de la bouteille). Il faut toutefois faire attention à l'ordre choisi. Voici un exemple:

rat numéro	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
empoisonné (oui/non)	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

Dans ce cas, la bouteille empoisonnée sera la bouteille numéro $2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 64 + 8 + 4 + 1 = 77$.

5 Pour le plaisir: nombres premiers de Mersenne, nombres parfaits*

- a) La décomposition binaire de $N = 2^p - 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{p-1}$ est simplement une suite de p fois le symbole 1.
- b) Non, il se trouve qu'en choisissant $p = 11$, on trouve $N = 2^{11} - 1 = 2'047 = 23 \cdot 49$, qui n'est pas lui-même un nombre premier.
- c) La décomposition binaire de $M = 2^{p-1} (2^p - 1) = 2^{p-1} + 2^p + 2^{p+1} + \dots + 2^{p-2}$ est composée de p fois le symbole 1 suivie de $p - 1$ fois le symbole 0.
- d) Vu que M est approximativement d'ordre N^2 , le nombre de chiffres qui le composent est approximativement le double de celui de N , soit 50 millions de chiffres.