

Série 6

1 Opérations binaires

Effectuez les calculs suivants en binaire, en supposant que tous les motifs binaires représentent des entiers **non signés**. Vérifiez votre résultat en repassant en base 10.

(a) Addition binaire :

1. $110 + 101 =$
2. $1001 + 0111 =$
3. $10110 + 01101 =$
4. $11011 + 10101 =$
5. $111111 + 000001 =$

(b) Soustraction binaire :

1. $1111 - 0010 =$
2. $1010 - 0011 =$
3. $10000 - 00001 =$
4. $11101 - 10110 =$
5. $11111 - 01010 =$

2 Conversion : Nombres naturels – Entiers non signés

Convertissez les nombres suivants donnés en binaire en décimal. La notation $(X)_b$ indique que X est donné en base b .

1. $(11010110)_2 =$
2. $(10001001)_2 =$
3. $(101010101)_2 =$
4. $(01000001)_2 =$
5. $(10111011)_2 =$

Convertissez les nombres suivants donnés en décimal en binaire.

1. $(77)_{10} =$
2. $(200)_{10} =$
3. $(333)_{10} =$
4. $(1000)_{10} =$
5. $(2026)_{10} =$

Considérez le motif binaire $(001011)_2$ représentant un entier non négatif. Sans effectuer de conversion explicite en décimal, que représente $(101100)_2$? Quelle opération arithmétique simple a été effectuée ?

3 Dépassement et capacité

Pour simplifier, on travaille avec des entiers représentés en **complément à deux sur 8 bits**.

(a) Quelle valeur décimale est représentée par chacun des motifs binaires suivants ?

11001010, 01111110, 10000001

(b) Quel est le motif binaire (sur 8 bits, en complément à deux) des nombres suivants ?

-3_{10} , -64_{10} , -128_{10}

(c) Quelle conclusion tirez-vous concernant le domaine des valeurs représentables sur 8 bits signés ? Y a-t-il une asymétrie ?

(d) Toujours sur 8 bits signés, calculez en binaire $80_{10} + 80_{10}$. Quel est le résultat obtenu, interprété en complément à deux? Comment appelle-t-on ce phénomène?

(e) Soient $x = 90_{10}$ et $y = 45_{10}$, représentés sur 8 bits non signés. Calculez bit à bit $x \oplus y$ (XOR, ou ou-exclusif : le bit résultant vaut 1 si et seulement si les deux bits d'entrée sont différents). Donnez le résultat en décimal.

4 Représentation des fractions en binaire

De la même façon qu'on utilise des puissances négatives de 10 pour les décimales ($0.375 = 3 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$), on peut utiliser des puissances négatives de 2 : par exemple, $0.101_2 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 0.625$.

(a) Représentez les fractions suivantes en binaire : $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$.

(b) Pour convertir un nombre décimal $0 < x < 1$ en binaire, on peut utiliser la méthode des *multiplications successives par 2* : à chaque étape, on multiplie x par 2 ; la partie entière du résultat (0 ou 1) donne le bit suivant après la virgule, et on recommence avec la partie fractionnaire.

Appliquez cette méthode pour représenter 0.1 en binaire. Que remarquez-vous?

(c) En Python, évaluez $0.1 + 0.2$ et $0.1 + 0.2 == 0.3$. Expliquez les résultats obtenus à la lumière de la question précédente.

5 Représentation des nombres à virgule flottante

Considérez une représentation simplifiée des nombres à virgule flottante positifs utilisant **6 bits** selon le format suivant : **2 bits pour l'exposant** en base 2 (non négatif, valeurs 0, 1, 2 ou 3), **4 bits pour la mantisse** (entier non signé, valeurs 0 à 15). La valeur représentée est : mantisse $\times 2^{\text{exposant}}$.

(a) Quel est le nombre représentable maximum? Quel est le plus petit nombre non nul représentable?

(b) Pour chaque valeur de l'exposant (0, 1, 2, 3), donnez l'ensemble des valeurs *nouvelles* (non représentables avec un exposant plus petit) et l'erreur absolue maximale commise sur la plage correspondante.

(c) L'erreur absolue est-elle constante sur l'intervalle [min, max]? Qu'en est-il de l'erreur relative?

(d*) En pratique, la norme IEEE 754 utilise une mantisse *normalisée* (avec un bit implicite égal à 1, dit *bit caché*). En quoi cela améliore-t-il l'efficacité de la représentation par rapport au modèle simple ci-dessus?

6 Questions d'examens passés

Les questions suivantes sont issues des examens CS-119(k) des années précédentes sur les mêmes thèmes que cette série.

Question 6. Considérez le motif binaire 001010 qui représente un nombre naturel non-négatif. Quel est le résultat de la multiplication de ce nombre par 4? Cochez toutes les réponses correctes.

- ☐ 40 (en décimal)
- ☐ 000101 (motif binaire)
- ☐ 101000 (motif binaire)
- ☐ 50 (en décimal)

Question 7. Soit une représentation simplifiée en virgule flottante sur 7 bits, i.e., $(-1)^s \times 2^e \times (1 + \frac{m}{2^{n_m}})$, faite de la manière suivante : $n_s = 1$ bit de signe s , $n_e = 4$ bits pour l'exposant e en base 2 non signé, $n_m = 2$ bits pour la mantisse m . Sélectionnez toutes les affirmations correctes.

- ☐ Dans l'intervalle [64, 128), l'erreur absolue entre un nombre x et le nombre utilisé pour représenter x dans ce système est inférieure à 16.
- ☐ L'erreur relative n'est jamais supérieure à $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
- ☐ Le nombre 60,5 est représenté par le nombre 60.
- ☐ Le nombre décimal $-0,75$ peut être représenté exactement (sans erreurs d'arrondi).

Question 8. Quel est le résultat de l'addition des deux nombres binaires suivants, représentés en complément à deux sur 8 bits? Donnez le résultat en décimal.

$$01011010_2 + 01010000_2$$

- ☐ -86
- ☐ 170
- ☐ -85
- ☐ 85

Question 9. Parmi les motifs binaires suivants (8 bits, en complément à deux), lesquels représentent une valeur x telle que $|x| = 75$? Cochez toutes les réponses correctes.

- ☐ 01001011
- ☐ 00101101
- ☐ 10110100
- ☐ 10110101

Question 10. (*Vrai ou Faux*) Avec 8 bits en complément à deux, on peut représenter les entiers de -127 à $+128$.

☐ VRAI

☐ FAUX