

## Série 5

### 1 Qu'est-ce qui est difficile ?

Ci-dessous, vous trouverez une liste de problèmes qu'on peut demander à un ordinateur de résoudre. Le but de cet exercice est de classer ces problèmes par ordre de difficulté (par "difficulté", on entend ici le temps que mettrait un même ordinateur à résoudre le problème. Vous pouvez essayer de l'approximer par la difficulté que vous auriez vous-même à résoudre le problème à la main, ou vous baser sur ce que vous avez déjà vu en cours).

**Problème a)** Soit  $x$  un nombre entier composé de  $n$  chiffres (exemple :  $x = 69262832689376392871$  si  $n = 20$ ). Identifier si ce nombre est un nombre premier ou pas.

**Problème b)** Additionner deux nombres entiers  $x$  et  $y$ , chacun composé de  $n$  chiffres.

**Problème c)** Multiplier deux nombres entiers  $x$  et  $y$ , chacun composé de  $n$  chiffres.

**Problème d)** Soit  $L$  une liste de  $n$  nombres réels arbitraires (mais tous distincts). Exemple avec  $n = 20$  :

$$L = \{4, 5.5, -4, 10, 0, 1200, 47, 25, -707, 101, 18, 7.12, 3.14, -2, 18, 14, 3, 2.71828, -700, 1\}$$

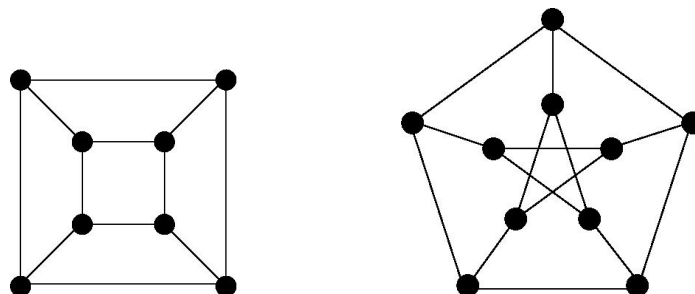
Trier cette liste dans l'ordre croissant.

**Problème e)** Soit  $L$  une liste triée de  $n$  nombre réels. Quelqu'un choisit un nombre au hasard dans cette liste. Le but est de deviner quel nombre cette personne a choisi en posant des questions auxquelles la personne ne peut répondre que par oui ou par non (vous pouvez essayer ça avec votre voisin!).

**Problème f)** Etant donnée une position au jeu d'échecs, déterminer quel est le meilleur coup à jouer pour se retrouver dans la position la plus favorable possible  $n$  coups après.

### 2 Coloration de graphes

On considère un graphe avec  $n$  sommets et un certain nombre d'arêtes qui relient ces sommets, comme par exemple un des deux graphes suivants :



On se pose la question générale suivante :

*Soit  $k \geq 2$  un nombre fixé. Avec  $k$  couleurs différentes à disposition, est-il possible de colorer les sommets d'un graphe donné de façon à ce que si deux sommets sont reliés par une arête, alors ils aient toujours des couleurs différentes ?*

Avant d'aller plus loin, voici une petite application pour le cas où  $k = 2$  :  $n$  joueurs se retrouvent ensemble et désirent former deux équipes (pas forcément de même taille : ça simplifie le problème). Seule contrainte : un graphe comme le graphe ci-dessus indique les joueurs qui ne s'aiment pas et ne veulent donc pas faire partie de la même équipe : plus précisément,  $i$  n'aime pas  $j$  si et seulement si  $i$  et  $j$  sont reliés directement par une arête. Est-il possible de former deux équipes avec des joueurs qui n'ont aucune inimitié à l'intérieur de chaque équipe ?

a) Quelle est la réponse à cette question pour chacun des graphes ci-dessus (dans le cas où  $k = 2$ ) ?

Faisons maintenant un petit calcul ensemble : pour résoudre la question en général pour un  $n$  et un  $k$  donnés, on a toujours l'option d'essayer toutes les possibilités de colorations du graphe. Combien sont-elles, ces possibilités ? Vu qu'on a  $k$  choix pour chacun des  $n$  sommets, on a en tout  $k^n$  possibilités, autrement dit un nombre qui croît exponentiellement en  $n$ . Si  $n$  est grand, essayer toutes les possibilités prend clairement trop de temps (même pour  $k = 2$ ).

**b)** Considérons tout d'abord le cas particulier  $k = 2$  et supposons que vous deviez trouver vous-même une coloration qui fonctionne, sans aide extérieure. Quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème ? (qu'avez-vous fait pour répondre à la question a ?)

**c)** Toujours dans le cas  $k = 2$ , combien d'opérations *au pire*<sup>1</sup> seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas), en fonction du nombre de sommets  $n$  ?

**d)** Considérons maintenant le cas plus général  $k \geq 2$  et supposons qu'on vous *donne* une coloration avec  $k$  couleurs pour un graphe donné et qu'on vous demande de *vérifier* si cette coloration fonctionne. En fonction du nombre de sommets  $n$ , combien d'opérations seront-elles nécessaires pour vérifier que la coloration fonctionne, dans le pire des cas ?

**e\*)** Dans le cas particulier  $k = 3$ , quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème, si on vous laisse la trouver par vous-même ? (à nouveau, essayez d'abord sur les exemples de graphes ci-dessus) Et combien d'opérations seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas) ?

*Attention :* Cette dernière question est (beaucoup) plus difficile qu'il n'y paraît : en fait, même les plus grands scientifiques de la planète n'ont encore trouvé la réponse : ne désespérez donc pas si vous n'y arrivez pas du premier coup !

*Note historique :* C'est grâce à l'informatique qu'on a pu démontrer *mathématiquement* que 4 couleurs suffisent pour colorer tous les graphes dits *planaires*, c'est-à-dire les graphes correspondant à nos bonnes vieilles cartes de géographie (où on identifie les pays avec les sommets du graphe et les frontières communes entre deux pays avec les arêtes du graphe).]

### 3 Pour le plaisir : Sudoku et Mastermind\*

A quelle(s) classe(s) de complexité appartiennent les deux problèmes suivants ?

**a)** Résoudre un Sudoku dans un tableau de taille  $n \times n$ , avec  $n$  "chiffres" différents dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacun des  $n$  sous-tableaux de taille  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  qui une fois assemblés constituent le tableau de taille  $n \times n$  (on ne considère ici que des valeurs  $n = m^2$  avec  $m$  un nombre entier).

**b)** Trouver la combinaison cachée de  $n$  couleurs ou lettres dans un jeu de Mastermind, étant donné les indications fournies par le joueur adverse. Voici un exemple ci-dessous avec  $n = 3$  :

|       |                                                           |
|-------|-----------------------------------------------------------|
| S E U | 1 élément <i>bien</i> placé et 1 élément <i>mal</i> placé |
| R U D | 2 éléments <i>bien</i> placés                             |
| R S U | 2 éléments <i>mal</i> placés                              |

1. Imaginez le graphe le plus complexe possible avec  $n$  sommets.