Ens. S. Friedli - Analyse I - (n/a)

15 janvier 2018 - durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit l'intégrale

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\mathrm{Log}(x)}{x\sqrt{\big(\mathrm{Log}(x)\big)^2+1}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Alors :

- ☐ $I = \sqrt{10} - 1$
- ☐ $I = \sqrt{10} + 1$
- ☐ $I = 2\,(\sqrt{10} - 1)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\,(\sqrt{10} - 1)$

Question 2 : Soit $a < 1$. Alors le plus grand domaine D sur lequel la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(a-1)^n}$ est bien définie est

- ☐ $D = \left]-|a-1|, |a-1|\right[$
- ☐ $D =]a, 2-a[$
- ☐ $D = \mathbb{R}$
- ☐ $D =]a, 1[$

Question 3 : Soit la fonction $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)\,e^{-x}$. Alors :

- ☐ f atteint son minimum en $x = 0$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.
- ☐ f atteint son minimum en $x = \frac{5\pi}{4}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.
- ☐ f atteint son minimum en $x = 0$ en $x = \pi$ et en $x = 2\pi$.
- ☐ f atteint son minimum en $x = \frac{3\pi}{2}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{2}$.

Question 4 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\!\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas trois fois dérivable.
- ☐ f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est une fois dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question 5 : Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles. Si $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$, alors :

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} < 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$

Question 6 : Soit l'intégrale généralisée

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1}\, dx \ .$$

Alors :

- ☐ l'intégrale I diverge
- ☐ $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{e+1}{e-1}\right)$
- ☐ $I = 2 \operatorname{Log}\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$
- ☐ $I = -\operatorname{Log}\left(e^2 - 1\right)$

Question 7 : Soit la série numérique S avec paramètre $c \in \mathbb{R}$ définie par

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} \ .$$

Alors :

- ☐ S converge si et seulement si $c \geq 0$
- ☐ S converge si et seulement si $c > 3$
- ☐ S converge si et seulement si $c \geq 1$
- ☐ S converge si et seulement si $2 > c > 0$

Question 8 : Soit la suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{\operatorname{Log}(n + e^n)}{n+1} \ .$$

Alors :

- ☐ a_n est une suite bornée et $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ a_n est une suite bornée et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ a_n est une suite non bornée
- ☐ a_n est une suite bornée et $\lim_{n\to\infty} a_n = e$

Question 9 : Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} .$$

Alors :

- ☐ $\inf E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ☐ $\inf E = 0$
- ☐ $\inf E = -1$
- ☐ $\inf E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$

Question 10 : La valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{Arctg}(x)\, dx$$

est

- ☐ $\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$

Question 11 : Soit la fonction bijective $f : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2 + \operatorname{Log}\left(\frac{2\mathrm{e} + x}{x^2}\right) ,$$

et soit f^{-1} la fonction réciproque de f et $y_0 := f(2\mathrm{e})$. Alors :

- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{4\mathrm{e}}{3}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{2\mathrm{e}+1}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = \frac{3}{4\mathrm{e}}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = 2\mathrm{e} + 1$

Question 12 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 , \\ 0 & \text{si } x = 0 . \end{cases}$$

Alors :

- ☐ $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Question 13 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x < 0\,, \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors :

- ☐ $f(-3) + f(1) = 7$
- ☐ $f'(2) = 2$
- ☐ $f(2) = 12$
- ☐ $f(3) = 9$

Question 14 : Soit l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x + 4x^2}}\, \mathrm{d}x\ .$$

Alors :

- ☐ $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(5)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
- ☐ $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(6 - \sqrt{33}\right)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2} \operatorname{Log}(5)$

Question 15 : Soit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la suite de nombre réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie récursivement par $a_0 = 1$ et $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour g définie par :

- ☐ $g(x) = x + 1$
- ☐ $g(x) = 2x - 2$
- ☐ $g(x) = -x^2 + 2x - 2$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

Question 16 : Soit r le rayon de convergence de la série entière S, définie par

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}}\, x^k\ .$$

Alors :

- ☐ $r = 0$
- ☐ $r = 5$
- ☐ $r = 25$
- ☐ $r = \frac{1}{5}$

Question 17 : La somme de la série

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \cdots$$

est

- ☐ $\frac{2}{5}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $-\frac{3}{5}$
- ☐ $\frac{1}{3}$

Question 18 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

autour de $x = 0$. Alors :

- ☐ $a_3 = 1$
- ☐ $a_3 = -\dfrac{1}{6}$
- ☐ $a_3 = \dfrac{5}{6}$
- ☐ $a_3 = 5$

Question 19 : Soit le nombre complexe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}/3}$. Alors :

- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}/3}\right)}$
- ☐ $|z| = \sqrt{1 + \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}/3}\right)}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2}$

Question 20 : Soit la fonction $f\colon\ ]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{\big(\sin(x)\big)^2}\ .$$

Alors :

- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{3}{2}$

Question 21 : Soit la fonction $f\colon [-1,3\,] \to [-1,3\,]$ définie par

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x}\ .$$

Alors :

- ☐ f est discontinue en $x = 1$
- ☐ f est injective
- ☐ f est surjective
- ☐ f est dérivable sur $]{-1}, 3\,[$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 22 : La fonction $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\Big(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\Big)$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série numérique divergente et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné de $\mathbb{R}$ et $c = \sup A$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x + \epsilon \geq c$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continue sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tous $x \in \,]a, b[$. Alors $f(x) \leq g(x)$ pour tous $x \in \,]a, b]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = \cos(a_n)$ converge. Alors la suite (a_n) converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f\big([1, 2]\big) = \,]1, 2\,[$. Alors f n'est pas continue sur $[1, 2]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction qui admet autour de $x=0$ le développement limité $f(x) = x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : L'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin\bigl(x^{13}\bigr)\,\mathrm{d}x$ vaut zéro.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ tels que $A \cap B \neq \emptyset$ (ensemble vide). Alors $\inf A \leq \inf A \cap B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0)\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX