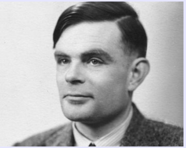 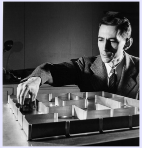 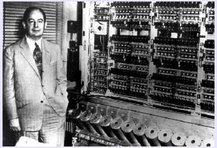

# Information, Calcul et Communication

# Compléments de cours

J.-C. Chappelier

EPFL

# Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2018 Q1.4

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \operatorname{sinc}(30\,t - m)$$

où $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ et $a_m = 7\sin(\frac{2\pi}{3}m + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(\frac{4\pi}{5}m + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(\frac{2\pi}{6}m)$.

Écrire $f(t)$ comme la somme de trois fonctions sinus :

Voyons $a_m$ comme les échantillons d'un signal $g(t)$ échantillonné à $f_e = 30$ Hz (le coefficient de $t$ dans le sinc) : c.-à-d. que l'on veut écrire $a_m = g(m\,T_e) = g(\frac{m}{f_e})$, avec donc

$$g(t) = 7\sin(2\pi\,\frac{f_e}{3}\,t + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(2\pi\,\frac{2\,f_e}{5}\,t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(2\pi\,\frac{f_e}{6}\,t)$$

$\frac{f_e}{2}$ étant strictement supérieure à La bande passante de $g$ ( qui est $\frac{2\,f_e}{5}$), $g$ sera reconstruite parfaitement par la formule de reconstruction, et on a donc pour tout $t$, $f(t) = g(t)$, c.-à-d. :

$$f(t) = 7\sin(20\pi\,t + \frac{\pi}{6}) + 3\sin(24\pi\,t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(10\pi\,t)$$

# Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q6

Soit $X$ le signal défini par :

$$X(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 3\sin(30\pi t + \frac{\pi}{3}) + 2\sin(12\pi t).$$

$X$ est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 12$ Hz, puis échantillonné à une fréquence $f_e = 14$ Hz.

À partir de ces échantillons, on reconstruit le signal $Y$ en utilisant la formule de reconstruction vue en cours.

Quelle est la forme mathématique du signal $Y(t)$ ?

$$Y(t) = \sin(6\pi t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(12\pi t)$$

# Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q13

Un enfant de vos connaissances veut enregistrer, et envoyer par message, un chant à sa grand-mère.
Fort(e) de vos connaissances en ICC, vous l'aidez à construire une transmission optimale.
Sachant que sa voix se situe entre 1000 et 3500 Hz (au dessus il n'y a que du bruit) et que pour des raisons techniques, il n'est pas possible d'acquérir plus que 8000 échantillons par seconde, quelle procédure lui conseillez-vous :

- filtrage (passe-bas) : oui ou non ?**oui** (nécessaire si l'on ne veut pas avoir de « repliement de spectre » du bruit)
- Si oui :
  - avant ou après échantillonnage ? **avant**
  - avec quelle fréquence de coupure ? **un peu au dessus (mais assez proche) de 3500 Hz**
- À quelle fréquence conseillez-vous d'échantillonner ? Pourquoi ? **un peu au dessus de 2 fois la fréquence de coupure, ou, si possible à 8000 Hz**
- Le chant pourra-t-il être correctement reconstruit à l'arrivée ? Pourquoi ? **oui tant que les choix faits respectent** $f_e > 2f_c$

# Leçons II.1 et II.2 – Mix Examens 2015–2016

Soit $X(t)$ un signal quelconque défini sur $\mathbb{R}$, de bande passante $f_{\max}$, et soit $X_I(t)$ sa reconstruction (suivant la formule du cours) après échantillonnage à une fréquence $f_e = 1/T_e$.
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

*A] $\forall f_e \geq 3f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

B] $\forall f_e\, 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

C] $\forall f_e\, 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) \neq X(t)$

*D] $\forall f_e\, 0 < f_e < 2f_{\max} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad X_I(nT_e) = X(nT_e)$

*E] Si $f_e = 2f_{\max}$, il est possible que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

# Leçon II.3 (entropie) – Points clés

- compression sans perte / compression avec perte
- définition (formelle) de l'entropie
- (quatre) propriétés de l'entropie
- algorithme (de compression) de Shannon-Fano

# Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soit un entier naturel codé sur 32 bits. L'entropie de ce nombre peut-elle être changée si on :

- inverse tous ses bits ? **non**
- lui additionne le nombre 1 ? **oui**
- prend l'opposé ? **oui**
- fait une permutation circulaire de tous ses bits ? **non**

# Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Considérons la séquence $X =$« HUBERT QUEL HURLUBERLU » (sans les espaces).
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

A] $H(X) = -2.82\,\text{bit}$

B] $H(X) \geq 8\,\text{bit}$

*C] $H(X) \leq 4\,\text{bit}$

D] $H(X) = 3.1\,\text{bit}$

Homework : calculez $H(X)$

# Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soient $H_V$ l'entropie des voyelles d'un jeu de Scrabble et $H_C$ celle des consonnes ; $m = \min(H_V, H_C)$ et $M = \max(H_V, H_C)$.
L'entropie $H_L$ de toutes les lettres de ce jeu de Scrabble vérifie :

**A]** $m \leq H_L \leq M$ **B]** $H_L = \frac{H_V + H_C}{2}$ *__C]__ $m \leq H_L \leq M + 1$ **D]** $H_L \leq M$

Notez que **B** $\Longrightarrow$ **A** $\Longrightarrow$ **C** et **A** $\Longrightarrow$ **D** ; ne restent donc que **C** et **D**.
Or, si **D** et non-**C**, alors $H_L < m$ ; ce qui est clairement faux en général (beaucoup de voyelles équiréparties et peu de consonnes très déséquilibrées).

Démonstration ?

Soient $N_V$ le nombre de voyelles, $N_C$ le nombre de consonnes et $N = N_v + N_c$ le nombre total de lettres.

Notons aussi $n_x$ le nombre d'occurrences d'une lettre $x$.

Soit enfin $p = \frac{N_V}{N}$ (et donc $1 - p = \frac{N_C}{N}$).

# Démonstration

$$
\begin{aligned}
H_L &= -\sum_{\text{lettres}} p_{\text{lettre}} \log(p_{\text{lettre}}) \\
&= -\sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N} \log(\frac{n_V}{N}) - \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N} \log(\frac{n_C}{N}) \\
&= -p \sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N_V} \log(p\frac{n_V}{N_V}) - (1-p) \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N} \log((1-p)\frac{n_C}{N_C}) \\
&= -p \sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N_V} \log(\frac{n_V}{N_V}) - p\log(p) \left( \sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N_V} \right) \\
&\quad - (1-p) \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N_C} \log(\frac{n_C}{N_C}) - (1-p)\log(1-p) \left( \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N_C} \right) \\
&= p\,H_V + (1-p)\,H_C + h(p)
\end{aligned}
$$

avec $h(p) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p)$ l'entropie d'un choix binaire de probabilité $p$.
($h(p)$ varie entre 0 et 1)