

# Mécanique des composites 2023

`pierre-etienne.bourban@epfl.ch`

Institut des matériaux (IMX)  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL),  
CH-1015 Lausanne

# Mécanique des composites

Micro et macromécanique

Tests mécaniques

Endommagement et rupture

CADFEM

Applications



Les stratifiés

Les structures sandwich

Les composites textiles

# Biblio

**Les matériaux composites organiques**  
**Traité des matériaux, vol 15, PPUR, Lausanne**

**Matériaux composites, Composites Materials**  
**D. Gay, Lavoisier Hermes 2015**

**Comprehensive composite materials,**  
**Zweben C. ed., Elsevier 2017**

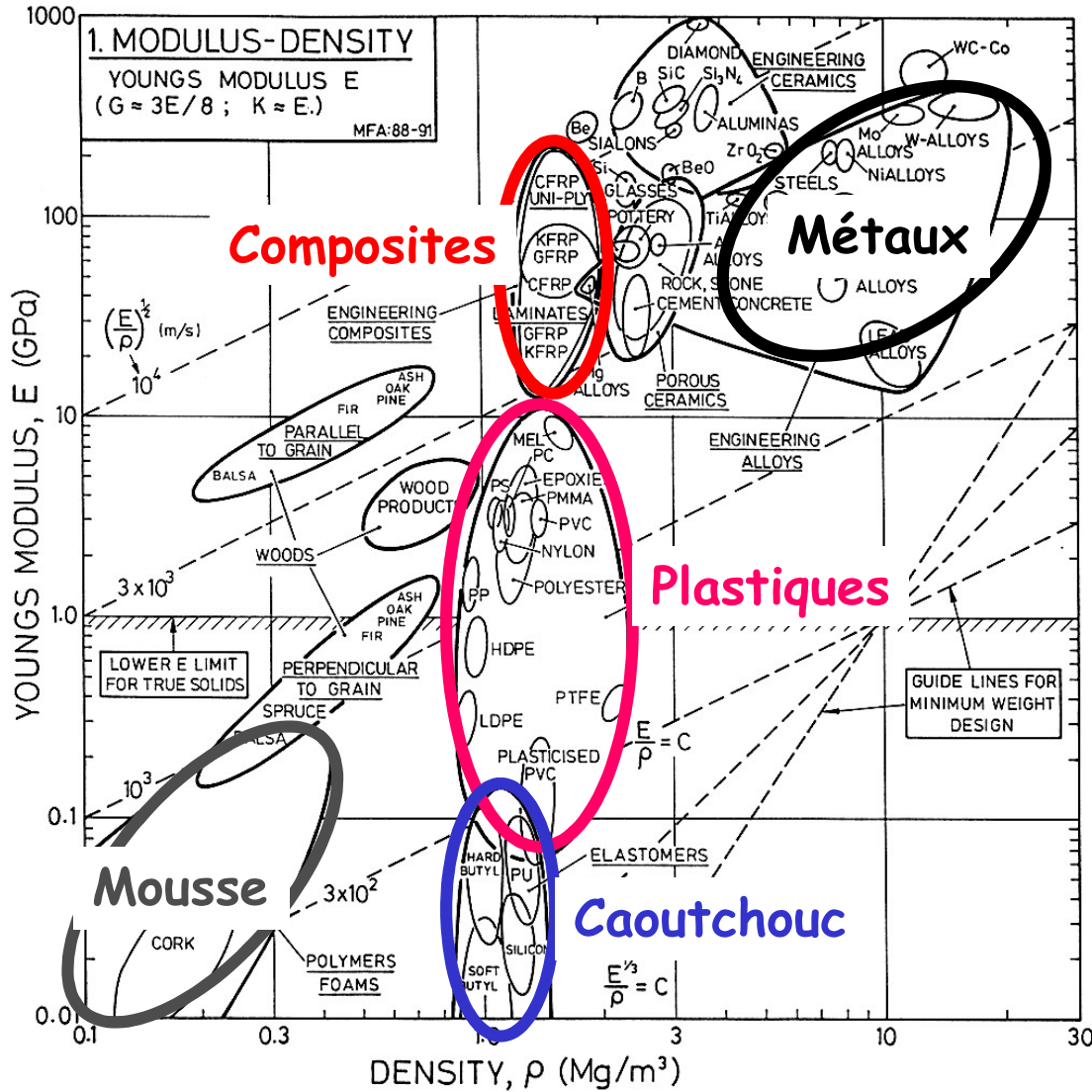
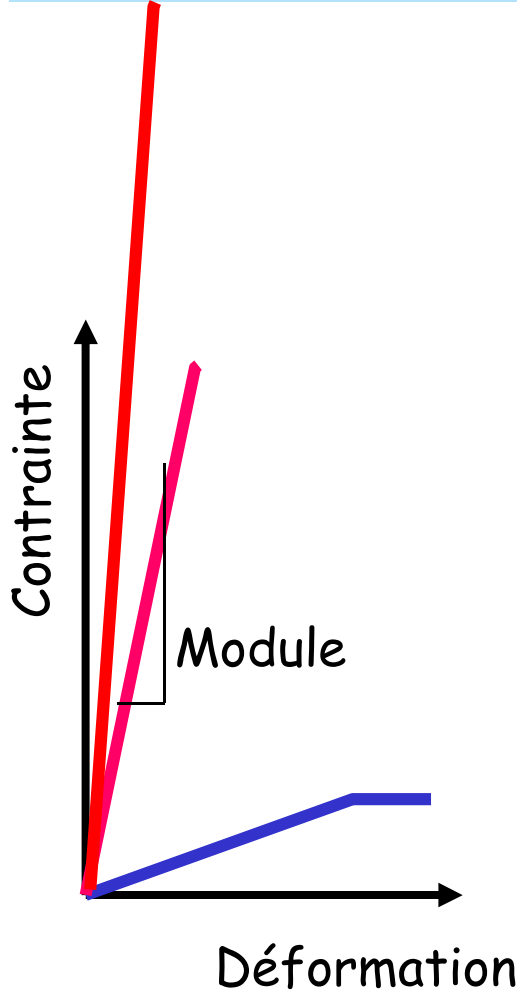
**Engineering mechanics of composites materials,**  
**I.M. Daniel, O. Ishai, Oxford University Press**

• <https://altairhyperworks.com/product/ESAComp>

• CoDA ou LAP sur <http://www.anaglyph.co.uk>

• [http://www.efunda.com/formulae/solid\\_mechanics/composites/calc\\_ufrp\\_abd\\_layout.cfm](http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/composites/calc_ufrp_abd_layout.cfm)

# Propriétés: module - densité



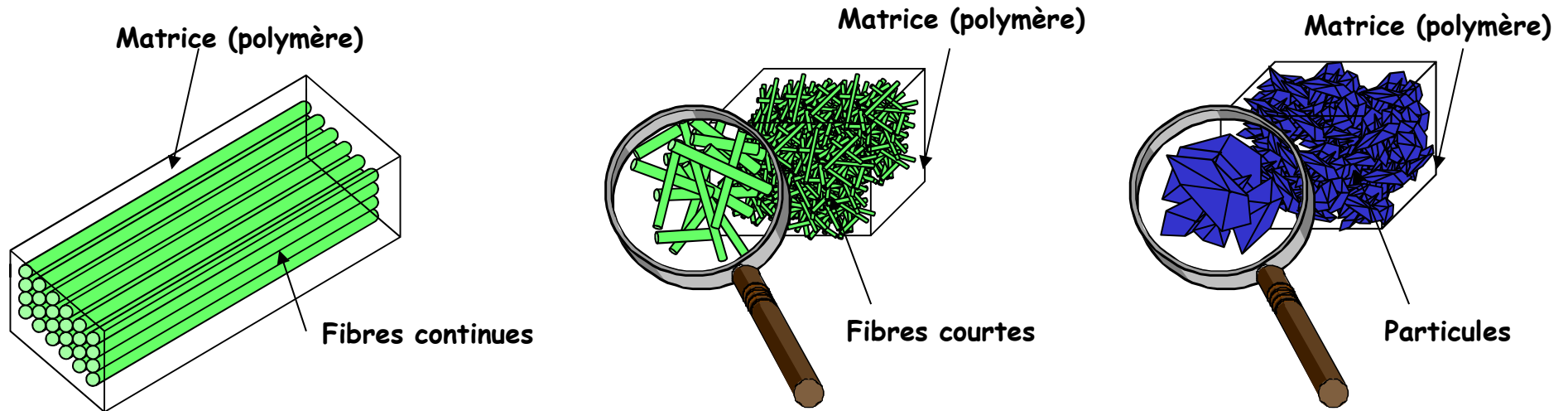
M.F. Ashby, Materials Selection for Mechanical design, Pergamon Press

# Propriétés des matériaux composites unidirectionnels

	METAUX			COMPOSITES A MATRICE ORGANIQUE			
	Ac35NDC16	Alliage Al	Alliage Ti	Bore époxy	Carbone HR époxy	Carbone HM époxy	Verre R époxy
<b>Module de Young E</b> (MPa)	200'000	72'000	110'000	220'000	130'000	200'000	53'000
<b>Résistance à la rupture en traction</b> $\sigma_r$ (MPa)	1850	500	1000	2000	1000 à 1300	1000	1800 à 2000
<b>Masse volumique <math>\rho</math></b> (g/cm <sup>3</sup> )	7.9	2.8	4.45	2.1	1.5	1.7	2
<b>Module spécifique</b> $E/\rho$ (MPam <sup>3</sup> /kg)	25	25	25	105	87	118	26
<b>Résistance spécifique</b> $\sigma/\rho$ (MPam <sup>3</sup> /kg)	0.24	0.18	0.23	0.95	0.65 à 0.85	0.60	0.90 à 1

Propriétés comparées de composites unidirectionnels avec 60% de fibres en volume

# Matériaux composites



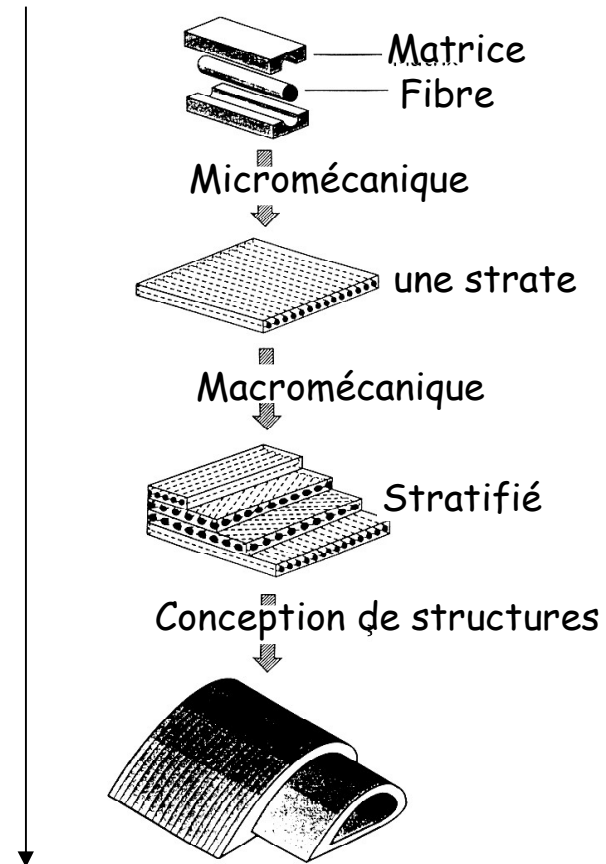
- Fibres orientées
- Composites unidirectionnels (UD)
- Thermodurcis, thermoplastiques
- Haute performance mécanique
- Anisotropie
- Aérospatiale, sport, réservoirs sous pression...

- Distribution de fibres courtes (< 3mm)
- Surtout des matrices thermoplastiques
- Isotropie
- Moulage par injection
- Mécanique, microtechnique, automobile....

- Particules (1-400 $\mu$ m), silice, argile...
- Thermodurcs and thermoplastiques
- Amélioration des propriétés
- Stabilité dimensionnelles
- Réduction de coût
- Moulage par injection, coulée
- Mécanique, microtechnique, dentisterie....

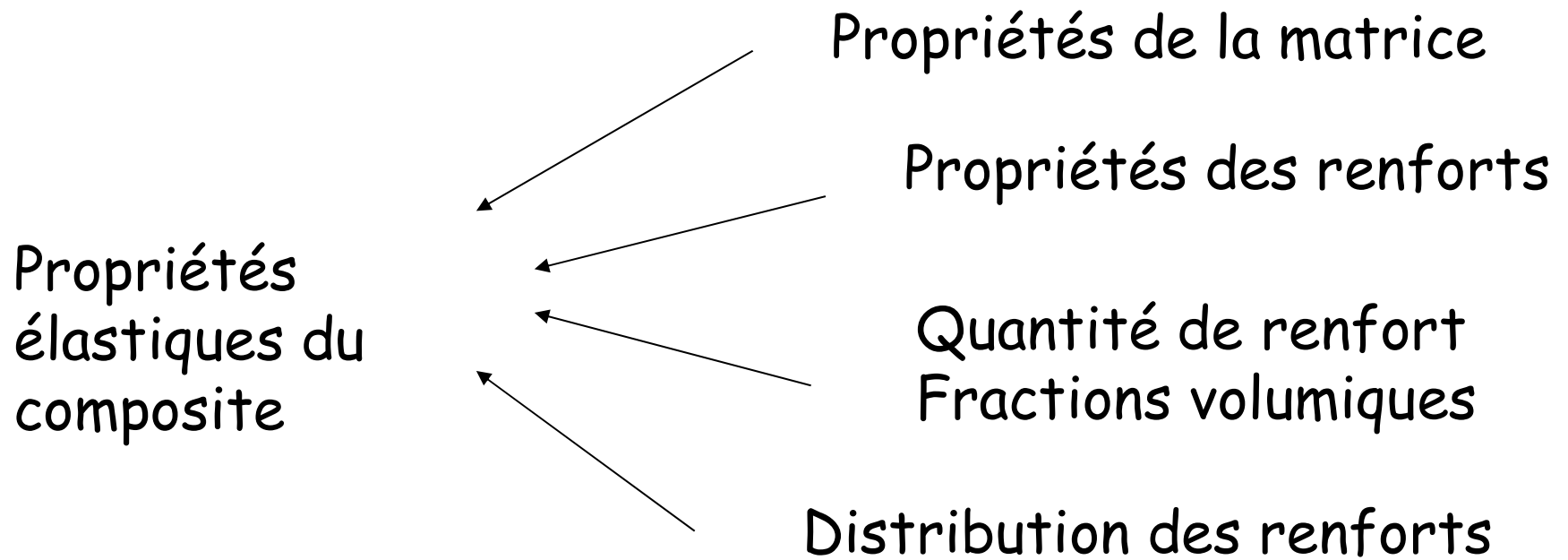
# Micromécanique

- Introduction
- Lois des mélanges
- Halpin-Tsai
- Renforts discontinus



Traité des Matériaux, TMX Vol 15, chap 4 et 8

# Introduction





# Introduction

Polymère/ Interface/ renfort

Fractions volumiques et massiques

L'importance des fibres

Éléments de volume représentatif

# Fractions volumiques et massiques

$$V_f + V_m = 1$$

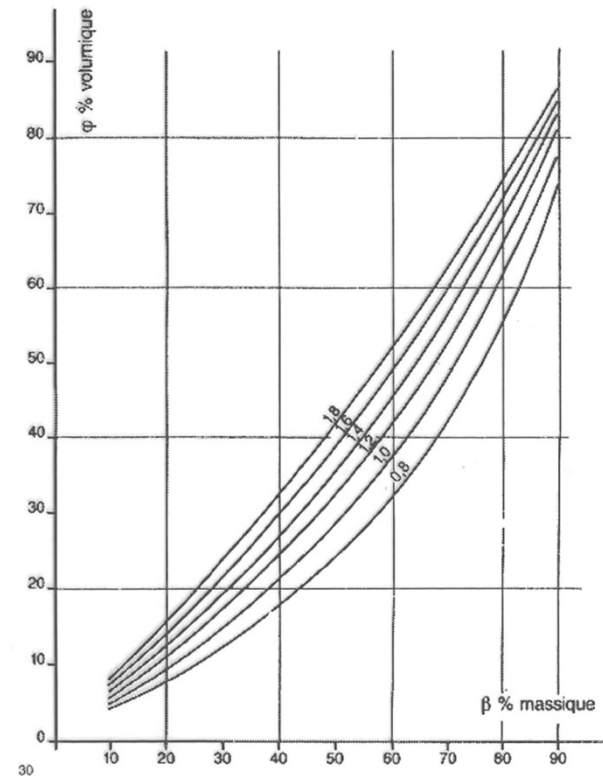
$$V_m = 1 - V_f$$

*!Hypo* :  $V_{\text{porosité}} \cong 0$

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m$$

$$M_f = \frac{\rho_f V_f}{\rho_f V_f + \rho_m V_m}$$

Correspondance % massique % volumique en fonction de la densité de la résine



# Importance des fibres

$$\frac{P_f}{P_m} \approx \frac{\sigma_f V_f}{\sigma_m V_m} \approx \frac{E_f V_f}{E_m V_m}$$

$$\frac{P_f}{P_c} \approx \frac{E_f V_f}{E_f V_f + E_m V_m}$$

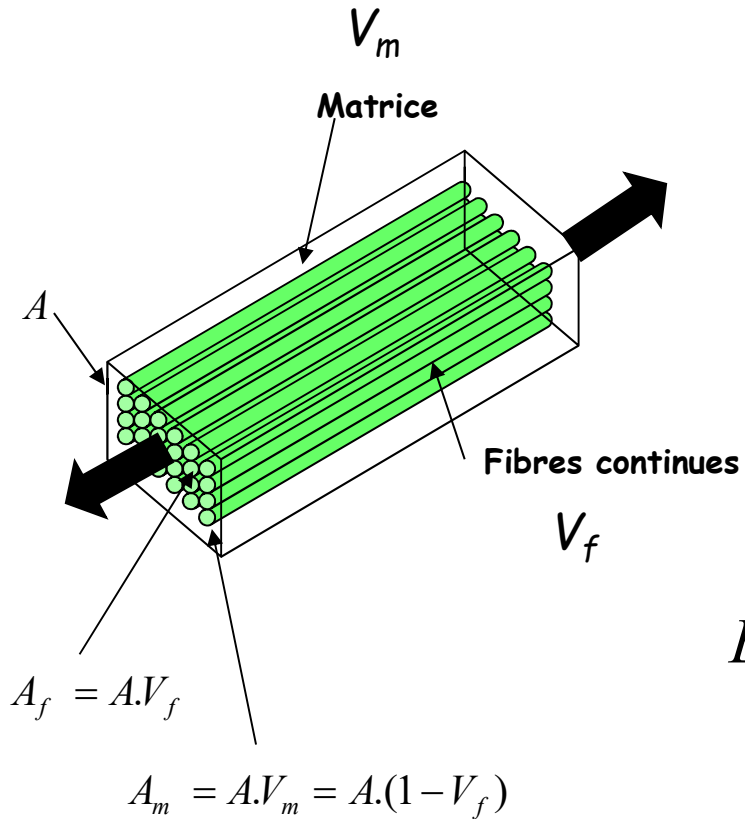
Module fibres de verre: 72 GPa  
Module matrice epoxy : 3.6 GPa

$V_f$	<b>0.1</b>	<b>0.5</b>
$\frac{P_f}{P_c}$	?	?

Module fibres de carbone: 430 GPa  
Module matrice epoxy : 3.6 GPa

$V_f$	<b>0.1</b>	<b>0.5</b>
$\frac{P_f}{P_c}$	?	?

# Fibres continues: propriétés longitudinales



$$F = F_f + F_m$$

avec  $\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_{cL}$

$$E_{cLongitudinal} = E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

# Fibres continues: propriétés longitudinales

Hypo1: interfaces parfaites

$$F = F_f + F_m$$

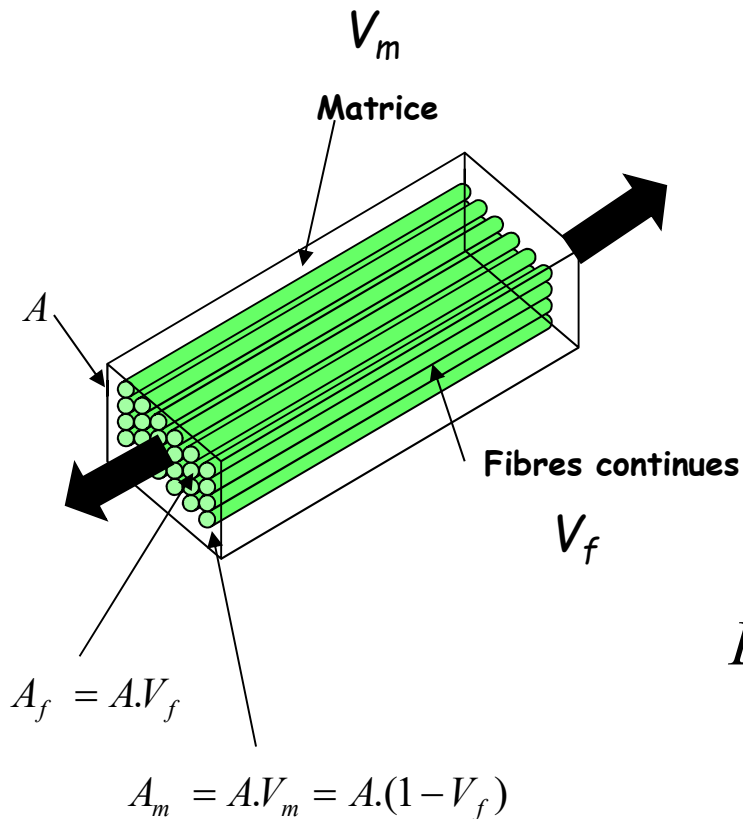
$$\sigma \cdot A = \sigma_f \cdot A \cdot V_f + \sigma_m \cdot A \cdot V_m$$

avec  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  Hypo2: mx élastiques linéaires

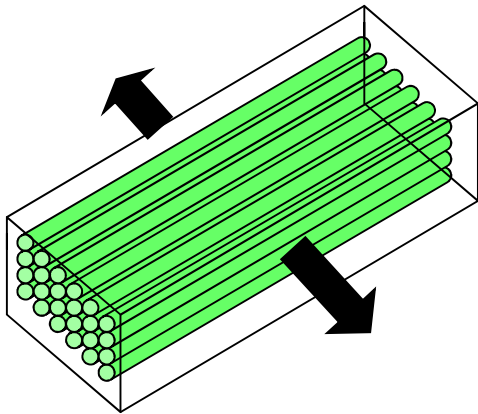
$$E_c \varepsilon_c = E_f V_f \varepsilon_f + E_m (1 - V_f) \varepsilon_m$$

avec  $\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_{cL}$  Hypo3: isodéformation

$$E_{cLongitudinal} = E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$



# Fibres continues: propriétés transversales



$$a = a_f + a_m$$

avec  $\sigma_f = \sigma_m = \sigma_{cT}$

$$E_{cT} = E_2 = \frac{E_m E_f}{E_f(1 - V_f) + E_m V_f}$$

# Fibres continues: propriétés transversales

Hypo1: interfaces parfaites

$$a = a_f + a_m$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f)$$

$$\text{avec } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

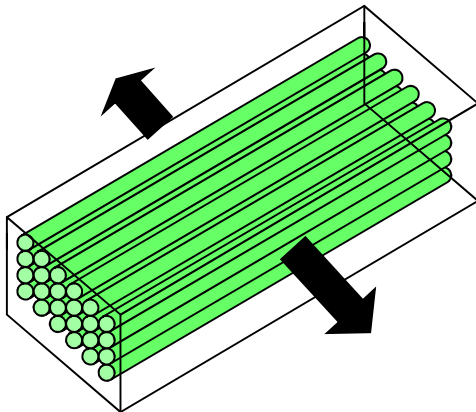
Hypo2: mx élastiques linéaires

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_f}{E_f} V_f + \frac{\sigma_m}{E_m} (1 - V_f)$$

$$\text{avec } \sigma_f = \sigma_m = \sigma_{cT}$$

Hypo3: isocontraintes

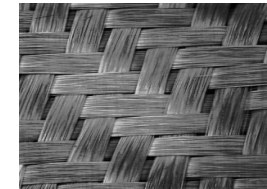
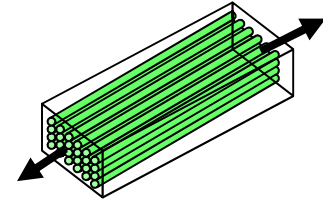
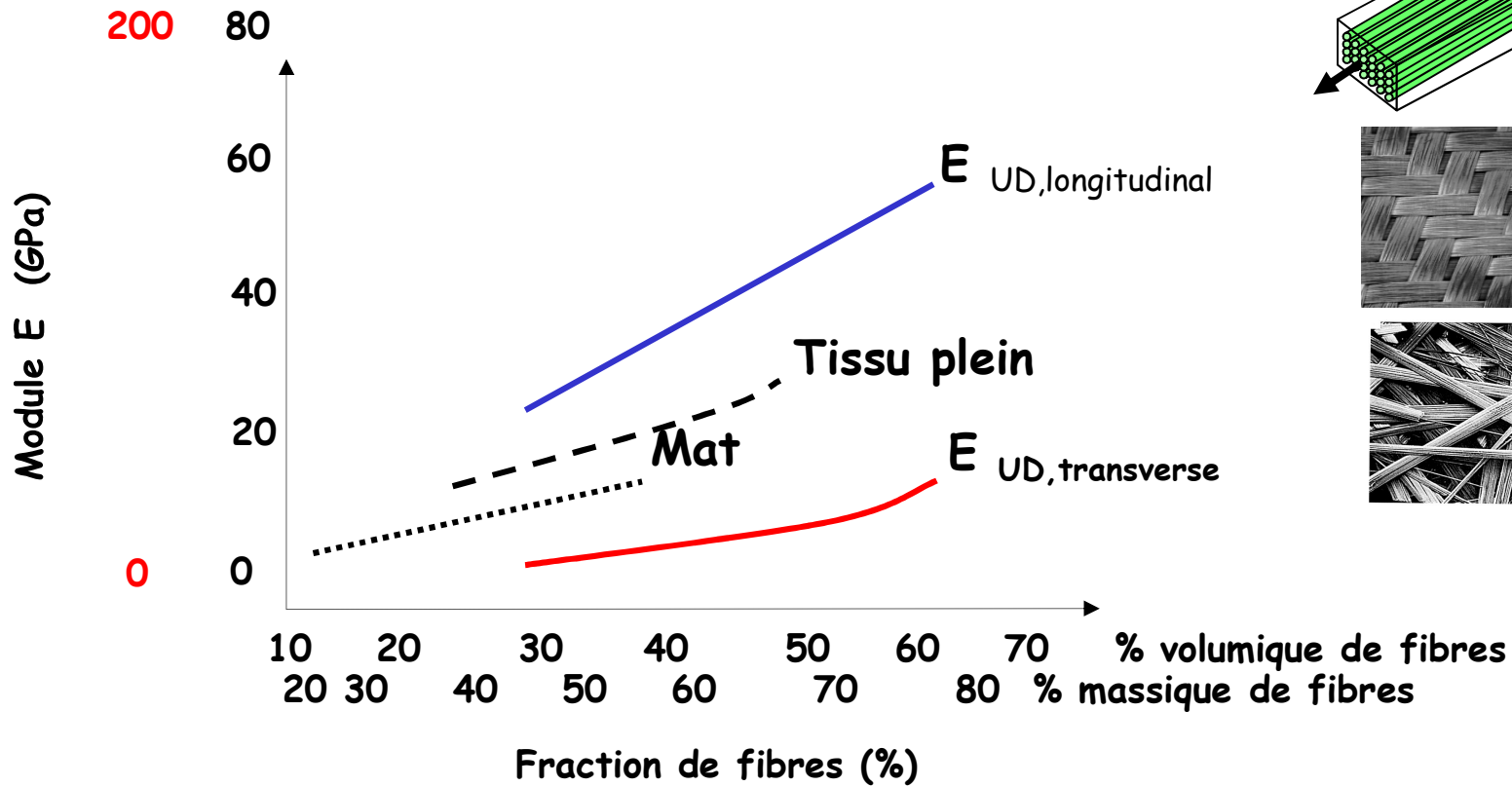
$$E_{cT} = E_2 = \frac{E_m E_f}{E_f (1 - V_f) + E_m V_f}$$



# Rigidités à volonté

Fibres de carbone

Fibres de verre





empilement hexagonal



$$A_f = 3 \cdot \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi r^2}{2}$$

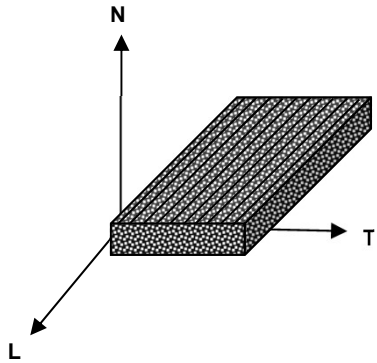


$$A = r \cdot 2r \sin \frac{\pi}{6} = r^2 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{f_{\max \text{ hexa}}} = \frac{A_f}{A} = \frac{\pi r^2}{2 r^2 \sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,9$$

$$\sqrt{f_{\text{cubique}}} = \frac{\pi r^2}{4 r^2} = 0,78$$

# Propriétés des composites unidirectionnels



	Verre S Epoxy	Kevlar 49 Epoxy	Carbone HR Epoxy	Carbone HM Epoxy	Bore Epoxy
<b>vf</b>	65 %	65 %	65 %	65 %	55 %
<b>Densité <math>\rho</math></b>	2.04 g/cm <sup>3</sup>	1.36 g/cm <sup>3</sup>	1.56 g/cm <sup>3</sup>	1.5 g/cm <sup>3</sup>	1.97 g/cm <sup>3</sup>
<b>E<sub>L</sub></b>	56 GPa	86 GPa	145 GPa	270 GPa	220 GPa
<b>E<sub>T</sub></b>	16 GPa	5.6 GPa	10 GPa	7 GPa	2.3 GPa
<b><math>\nu_{LT}</math></b>	0.26	0.32	0.29	0.3	0.26
<b>G<sub>LT</sub></b>	7 GPa	2.5 GPa	5.5 GPa	5.7 GPa	6.9 GPa
<b><math>\sigma_{rL}</math> traction</b>	1.75 GPa	1.5 GPa	1.2 GPa	0.95 GPa	1.3 GPa
<b><math>\sigma_{rT}</math> traction</b>	0.04 GPa	0.03 GPa	0.08 GPa	0.035 GPa	0.065 GPa
<b><math>\sigma_{rL}</math> compression</b>	0.9 GPa	0.28 GPa	1 GPa	0.75 GPa	2.85 GPa
<b><math>\sigma_{rT}</math> compression</b>	0.15 GPa	0.14 GPa	0.25 GPa	0.2 GPa	0.03 GPa
<b><math>\gamma_{rLT}</math> cisaillement</b>	0.06 GPa	0.05 GPa	0.1 GPa	0.055 GPa	0.06 GPa

# Equations de Halpin-Tsai

$$P = \frac{P_m (1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f}$$

$$\chi = \frac{P_f - P_m}{P_f + \xi P_m}$$

où  $P$  est la propriété étudiée ( $E_T$  ou  $G_{LT}$ ) et  $P_f$  et  $P_m$  sont respectivement les propriétés des fibres et de la matrice. Le paramètre  $\xi$  est déterminé empiriquement et définit l'efficacité du renforcement, en général  $\xi(E_T) = 2$  et  $\xi(G_{LT}) = 1$ .

# Coefficients d'expansion thermique

## Fibres anisotropes

# Résistance longitudinale lors de rupture de fibres continues alignées

$\sigma_{c1}^R$

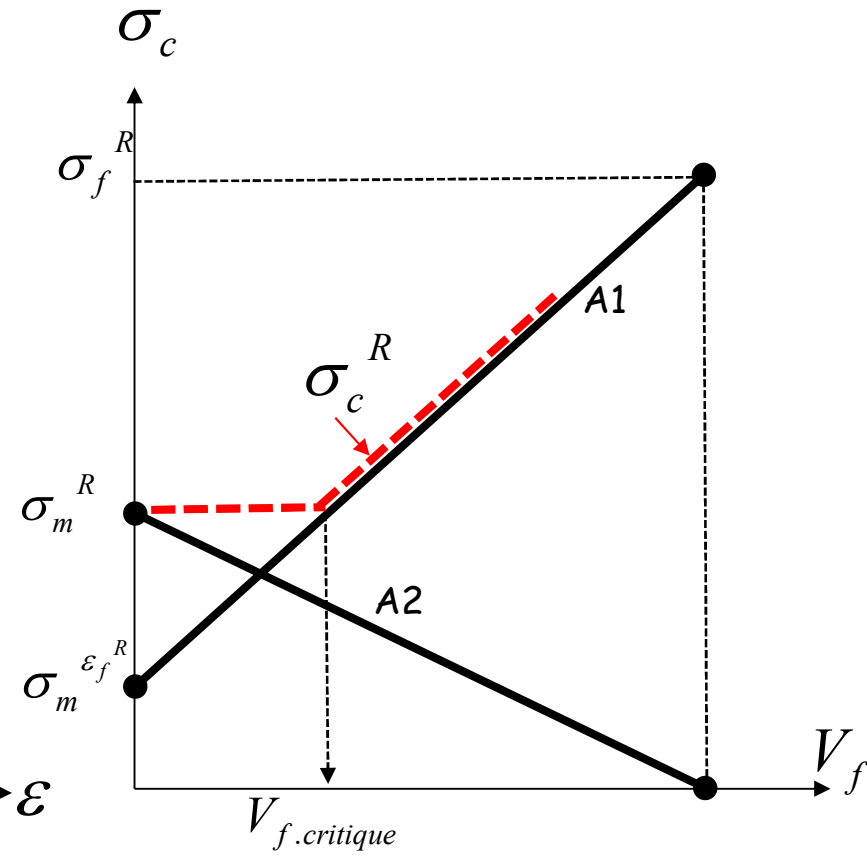
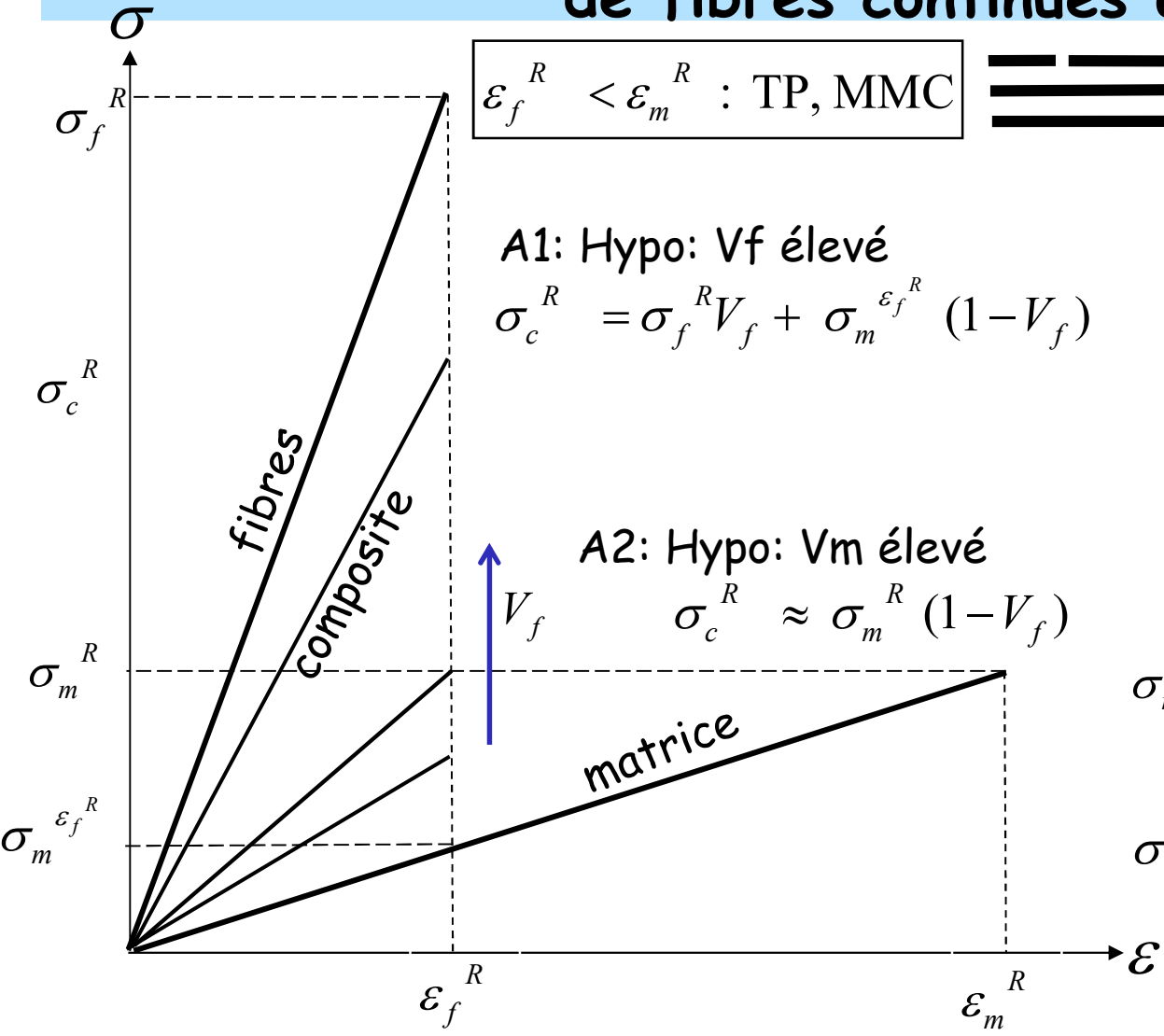
$\varepsilon_f^R < \varepsilon_m^R$  : TP, MMC



$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f)$$

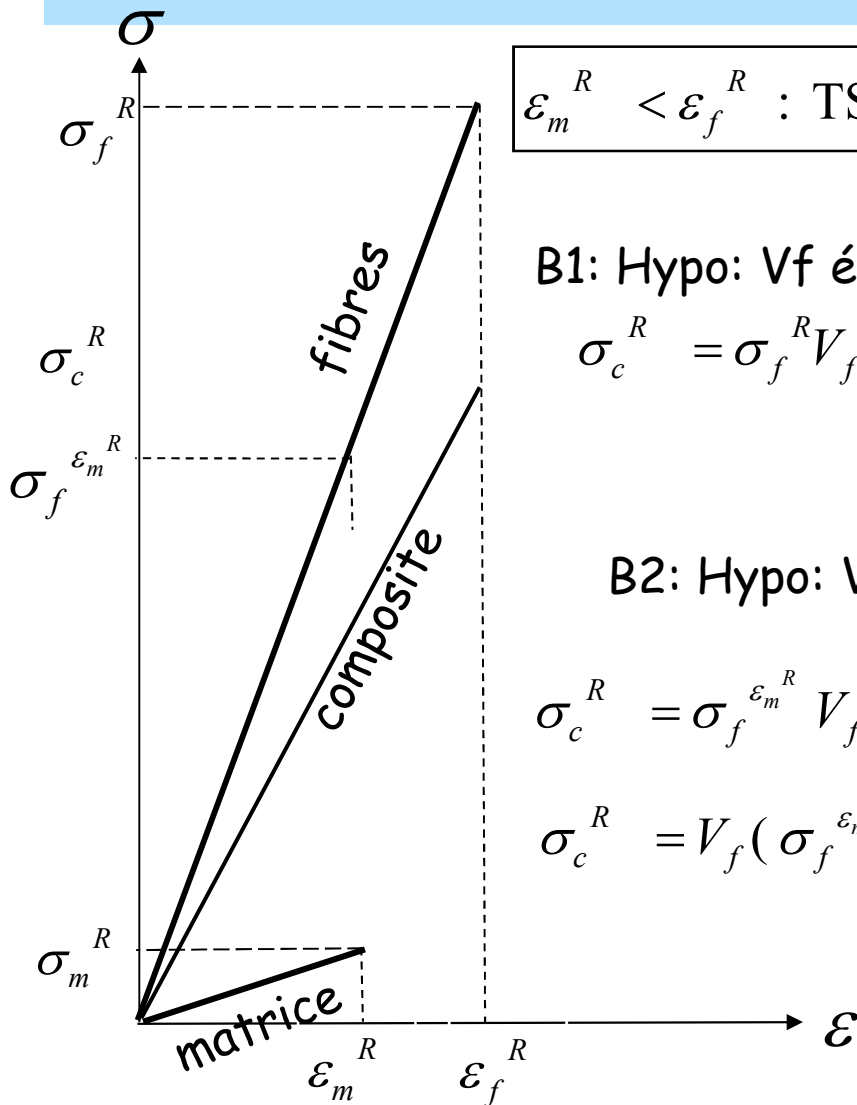
A1: Hypo:  $V_f$  élevé  
 $\sigma_c^R = \sigma_f^R V_f + \sigma_m^{\varepsilon_f^R} (1 - V_f)$

A2: Hypo:  $V_m$  élevé  
 $\sigma_c^R \approx \sigma_m^R (1 - V_f)$



$$V_{f.critique} = \frac{\sigma_m^R - \sigma_m^{\varepsilon_f^R}}{\sigma_f^R - \sigma_m^{\varepsilon_f^R}}$$

# Résistance longitudinale lors de rupture de la matrice



$\varepsilon_m^R < \varepsilon_f^R$  : TS, CMC



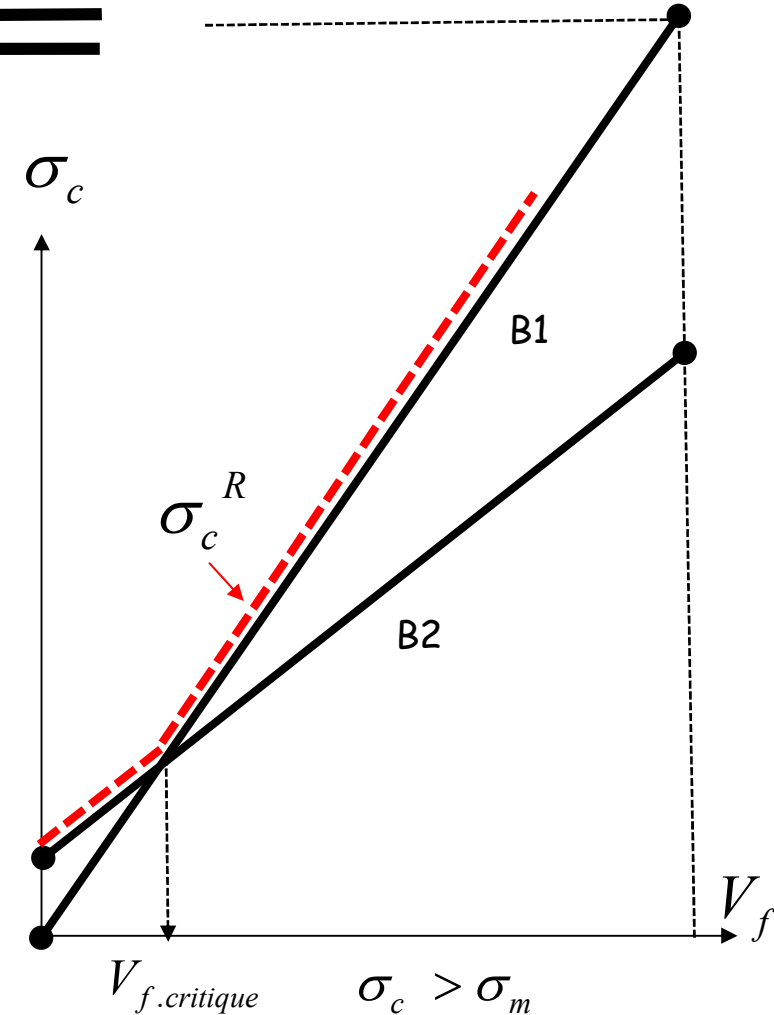
B1: Hypo:  $V_f$  élevé

$$\sigma_c^R = \sigma_f^R V_f$$

B2: Hypo:  $V_m$  élevé

$$\sigma_c^R = \sigma_f^{\varepsilon_m^R} V_f + \sigma_m^R (1 - V_f)$$

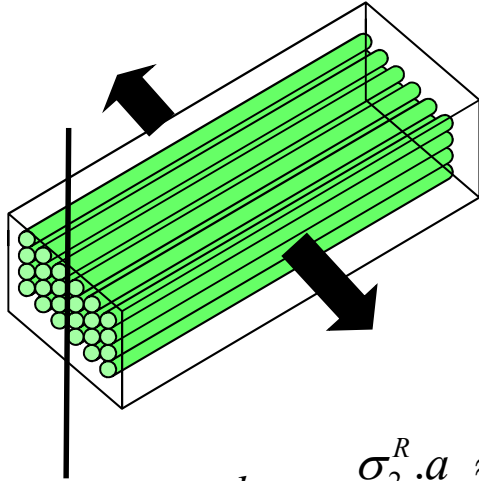
$$\sigma_c^R = V_f (\sigma_f^{\varepsilon_m^R} - \sigma_m^R) + \sigma_m^R$$



$$V_{f.critique} = \frac{\sigma_m^R}{(\sigma_f^R - \sigma_f^{\varepsilon_m^R}) + \sigma_m^R}$$

# Résistance transversale : Cooper-Kelly

$$\sigma_{c2}^R$$



$$\sigma_2^R \cdot a \approx \sigma_m \cdot (a - d_f)$$

Hypo1: résistance plus faible des interfaces

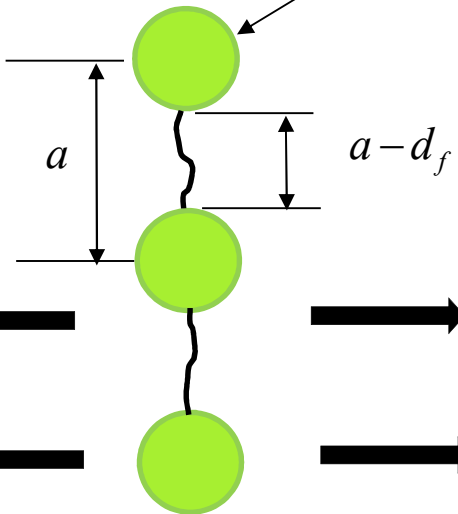
$$\frac{\sigma_2^R}{\sigma_m} \approx \frac{(a - d_f)}{a} = 1 - \frac{d_f}{a}$$

Hypo2: arrangement cubique

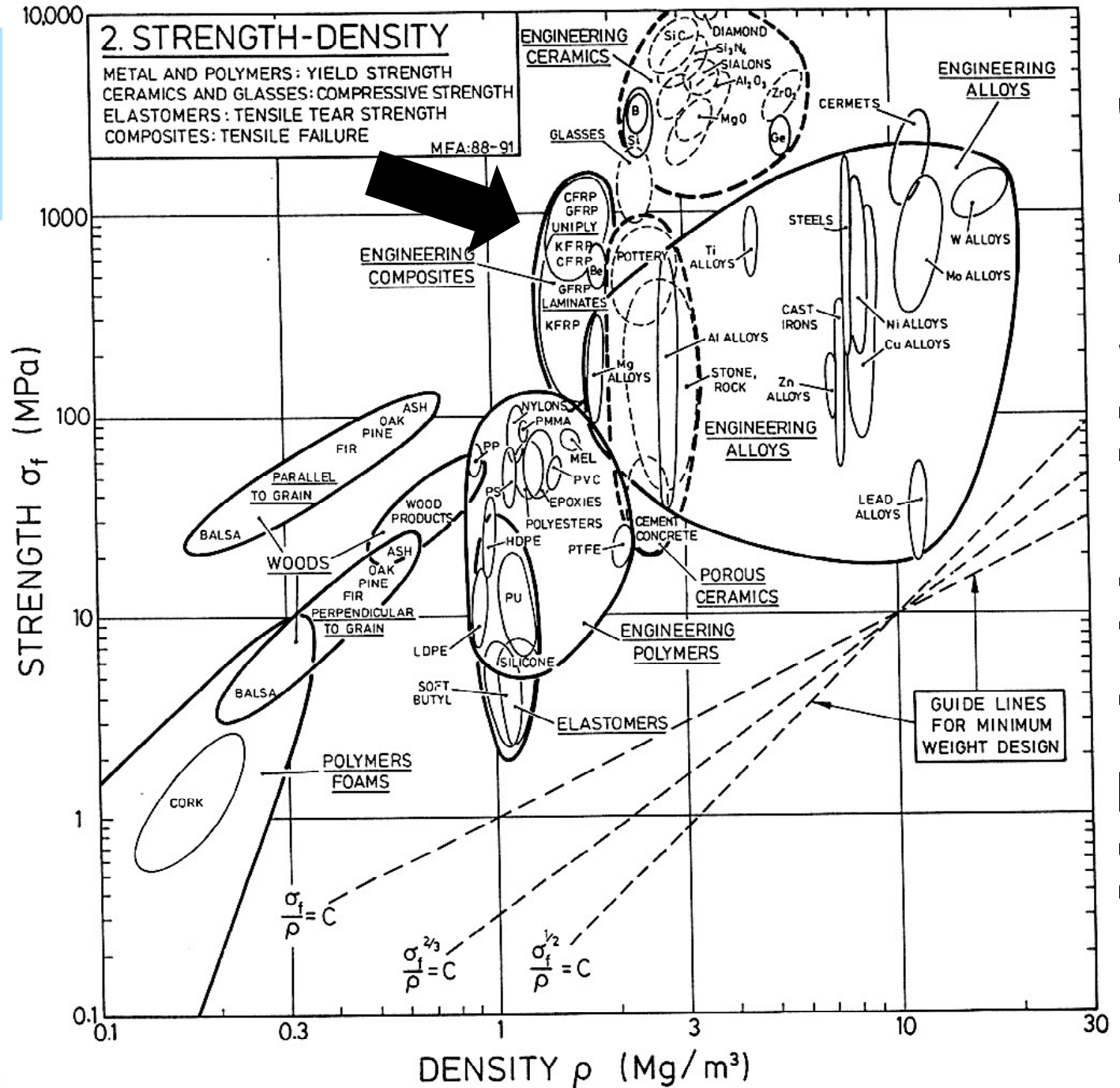
$$V_f = \frac{\pi \cdot d_f^2}{4a^2} \quad \text{donc} \quad \frac{d_f}{a} = \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}$$

$$\sigma_2^R = \sigma_m \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}\right)$$

si une résistance  $\sigma_i$  de l'interface existe :  $\sigma_2^R \approx \sigma_m \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}\right) + \sigma_i \cdot \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}$



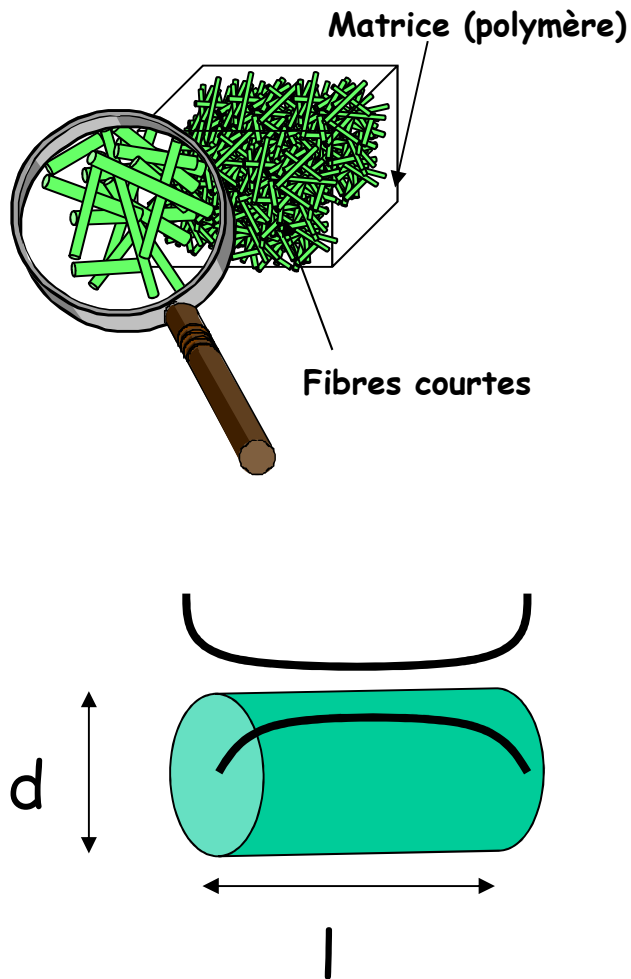
# Résistance spécifique



M.F. Ashby, Materials



# Composites à fibres discontinues



Facteur de formes  $l/d$

Fraction volumique  $V_f$

Qualité des interfaces

Distribution statistique de l'orientation des fibres

Distribution de la longueur des fibres

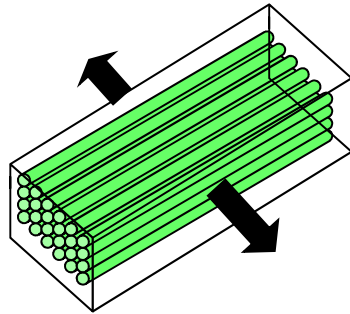
Halpin Tsai

$$E = \eta_{\text{orientation}} \eta_{\text{longueur fibre}} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

# Equations de Halpin-Tsai

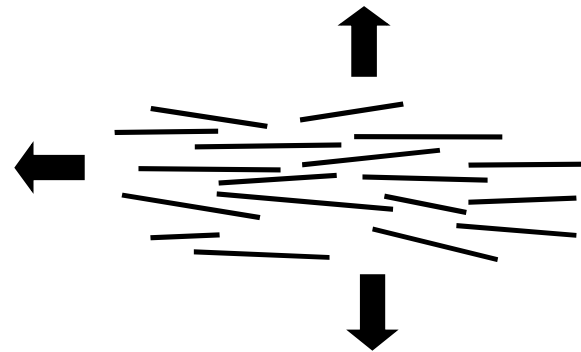
$$P = \frac{P_m (1 + \xi \chi V_f)}{1 - \chi V_f}$$

$$\chi = \frac{P_f - P_m}{P_f + \xi P_m}$$



$$\xi(E_T) = 2$$

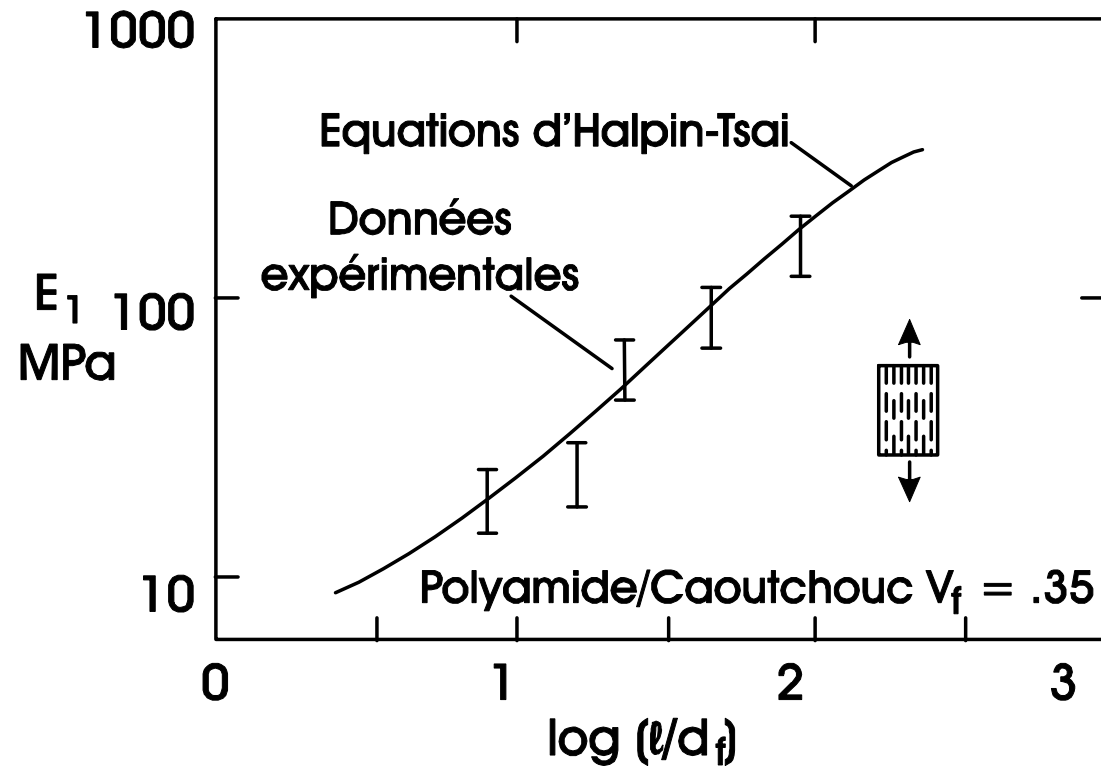
$$\xi(G_{LT}) = 1$$



$$\xi = 2 + 40 V_f^{10}$$

$$\xi = \frac{21}{d} + 40 V_f^{10}$$

# Composites à fibres courtes



$$\frac{\pi d_f^2}{4} [(\sigma + d\sigma) - \sigma] - \pi d_f \tau dx_1 = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{4\tau}{d_f} \quad \sigma(x_1) = \frac{4}{d_f} \int_0^{x_1} \tau dx_1$$

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{4c(u_f - u_m)}{d_f}$$

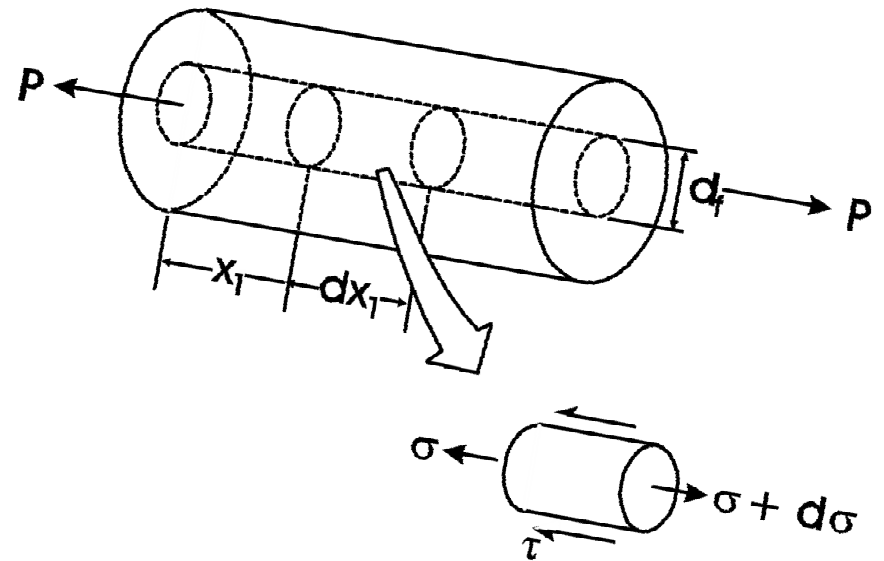
$$\frac{du_f}{dx_1} = \frac{\sigma}{E_f}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1^2} = \frac{4c}{d_f} \left( \frac{du_f}{dx_1} - \frac{du_m}{dx_1} \right)$$

$$\frac{du_m}{dx_1} = \varepsilon_m$$

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1^2} - \beta^2 \sigma = \frac{-4c}{d_f} \varepsilon_m \quad \text{avec} \quad \beta^2 = \frac{4c}{d_f E_f}$$

$$\sigma(x_1) = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\cosh \beta (\ell/2 - x_1)}{\cosh (\ell \beta/2)} \right]$$



# Composites à fibres courtes alignées

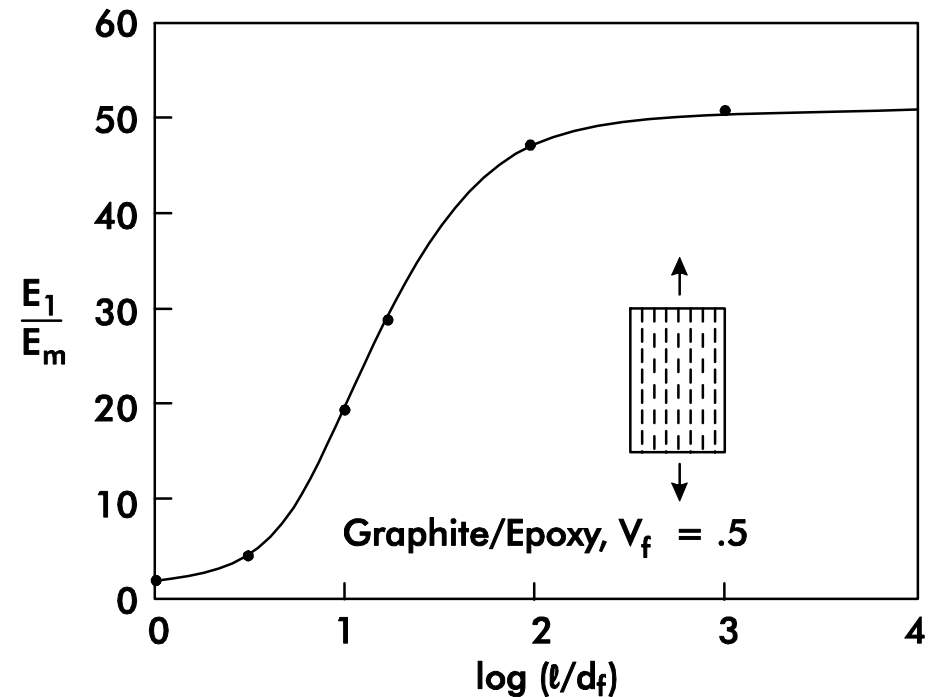
$$\sigma_f = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right]$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m$$

$$\sigma_c = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right] V_f + \sigma_m V_m$$

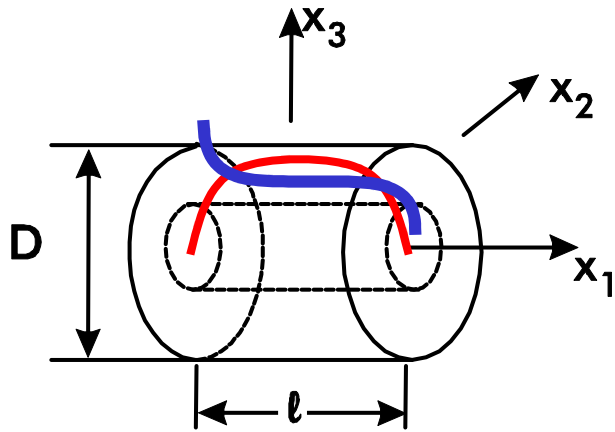
$$E_I = E_f V_f \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right] + E_m V_m$$

$$E = \eta_{\text{orientation}} \eta_{\text{longueur fibre}} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$



$l/d_f > 100$  : loi des mélanges

# Composites à fibres courtes alignées



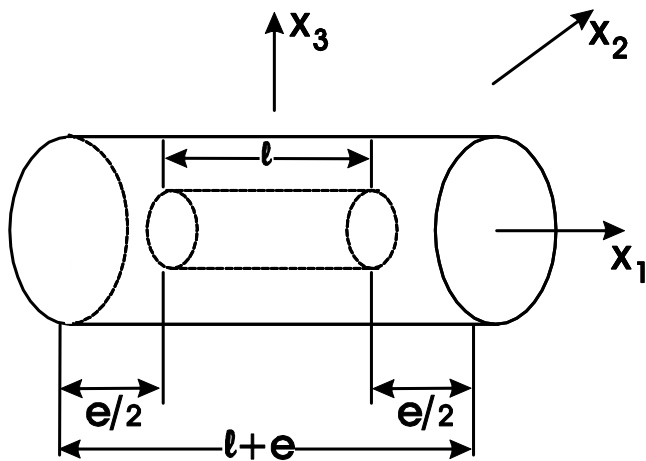
Cox

$$\tau = c(u_f - u_m)$$

$$E_I = E_f V_f \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2} \right] + E_m V_m$$

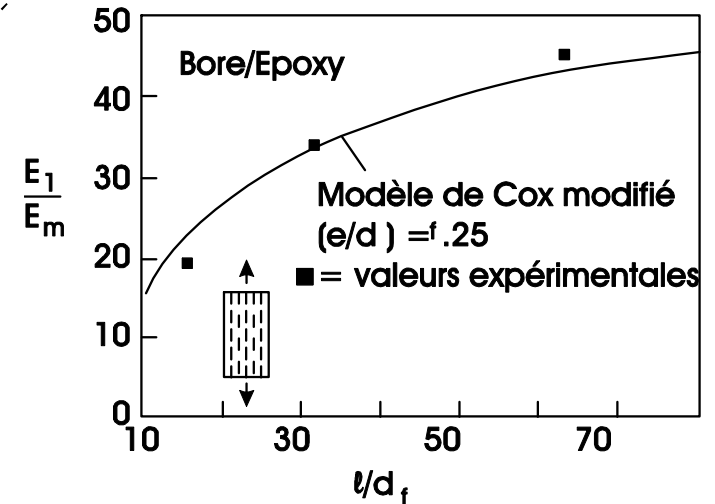
Cox-Kelly

$$\tau = \frac{d_f E_f \varepsilon_m \beta}{4} \left[ \frac{\sinh(\beta(l/2 - x_1))}{\cosh(\beta l/2)} \right]$$



Hwang-Gibson

$$\frac{1}{E_c} = \frac{l/(l+e)}{E_I} + \frac{e/(l+e)}{E_m}$$



# Composites à fibres courtes alignées

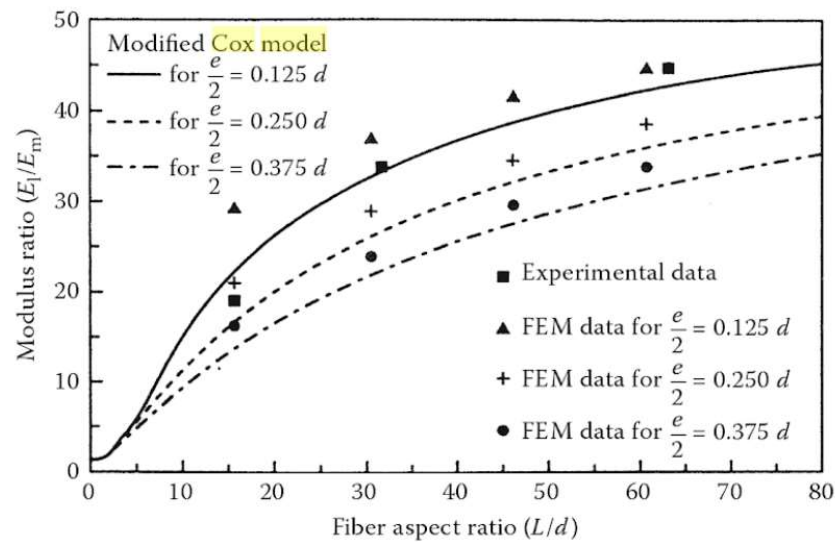
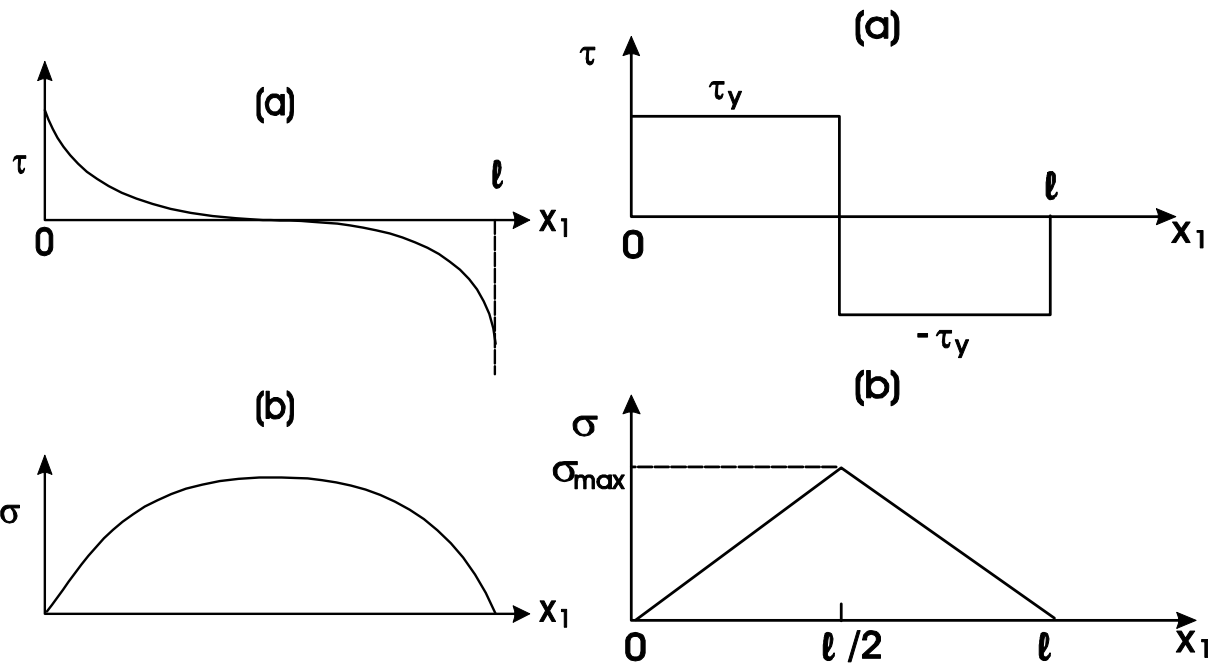


FIGURE 6.17

Comparison of predictions from the modified Cox model and FEA with experimental data for boron/epoxy-aligned discontinuous fiber composite at different fiber aspect ratios. (From Hwang, S. J. and Gibson, R. F. 1987. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 109, 47–52. Reprinted with permission from ASME.)

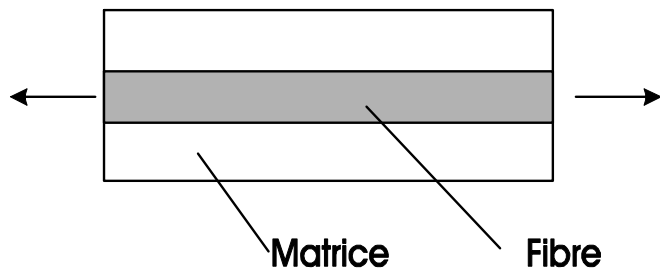
# Modèle de Kelly-Tyson



$$\tau = \tau_y = \text{cste}$$

$$\sigma = \frac{4}{d_f} \tau_y x_1$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \tau_y l}{d_f}$$



La contrainte max dans les fibres augmente avec la longueur des fibres

$$\text{longueur critique} = l_c = \frac{d_f \sigma_{f, \text{ult}}}{2 \tau_y}$$

! Uniquement pour composites à fibres courtes

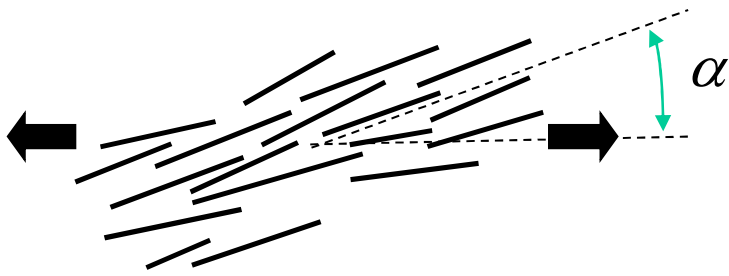


# Composites à fibres courtes orientées

$$E = \eta_{orientation} \eta_{longueur\ fibre} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

$p_n =$

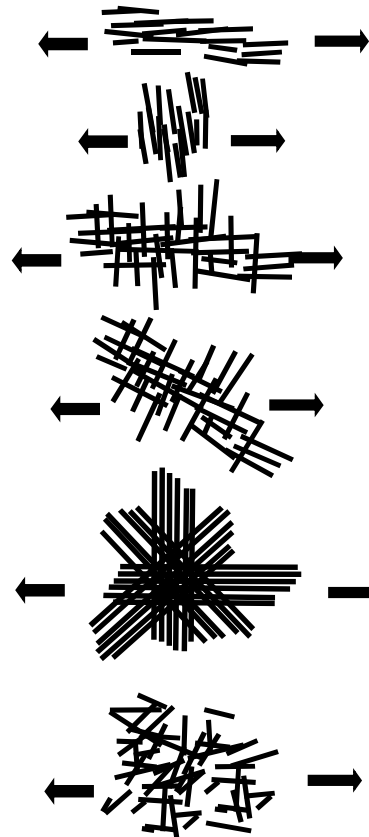
$\eta_o =$



$$\eta_{orientation} \approx \cos^4 \alpha$$

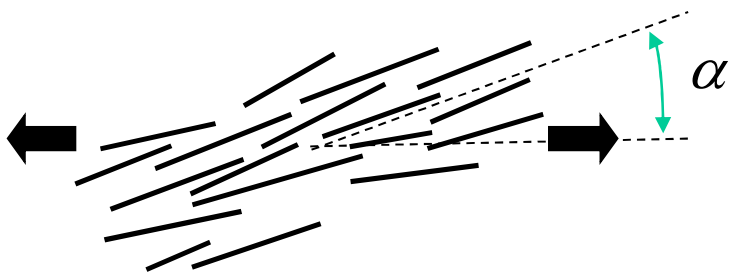
$$\eta_{orientation} \approx \sum_n p_n \cos^4 \alpha_n$$

$$\sum_n p_n = 1$$



# Composites à fibres courtes orientées

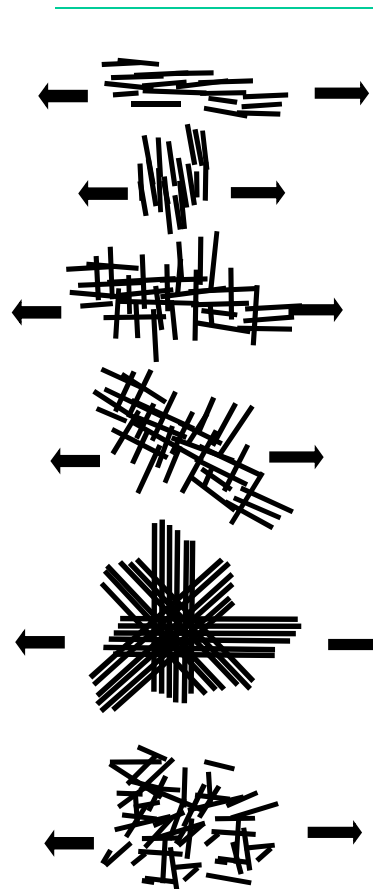
$$E = \eta_{\text{orientation}} \eta_{\text{longueur fibre}} E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$



$$\eta_{\text{orientation}} \approx \cos^4 \alpha$$

$$\eta_{\text{orientation}} \approx \sum_n p_n \cos^4 \alpha_n$$

$$\sum_n p_n = 1$$



$$p_n =$$

$$\eta_o =$$

$$p_n = 1$$

$$\eta_o = 1 \cos^4 0 = 1$$

$$p_n = 1$$

$$\eta_o = 1 \cos^4 90 = 0$$

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

$$\eta_o = \frac{1}{2} \cos^4 0 + \frac{1}{2} \cos^4 90 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

$$\eta_o = \frac{1}{2} \cos^4 45 + \frac{1}{2} \cos^4 (-45) = \frac{1}{4}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$$

$$\eta_o = \frac{1}{4} (\cos^4 0 + \cos^4 90 + \cos^4 45 + \cos^4 (-45)) = \frac{3}{8}$$

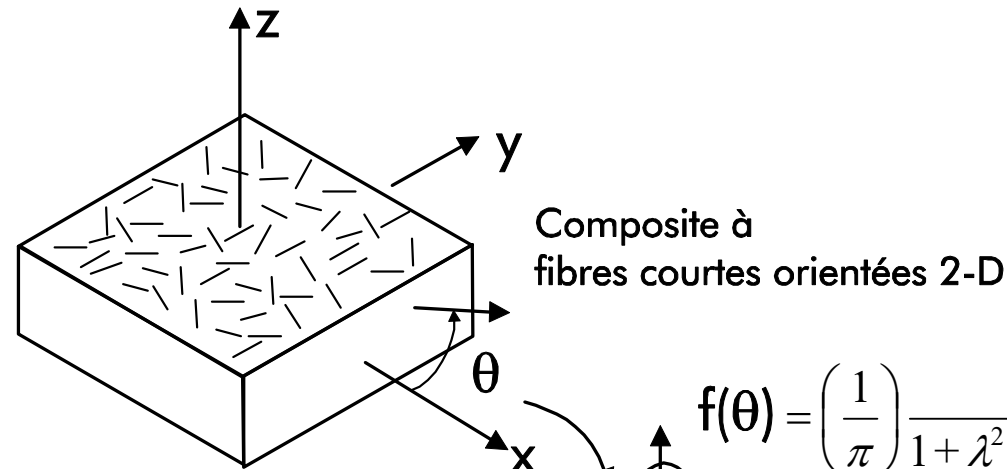
Aléatoire 3dim

$$\eta_o = \frac{1}{5}$$

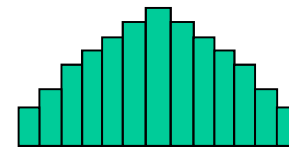
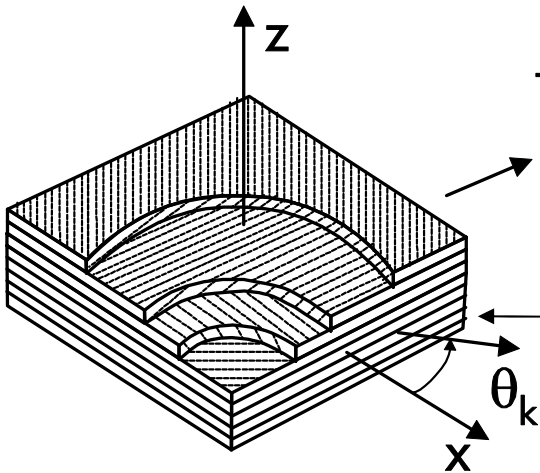
Aléatoire 2dim

$$E = \frac{3}{8} E_0 + \frac{5}{8} E_{90}$$

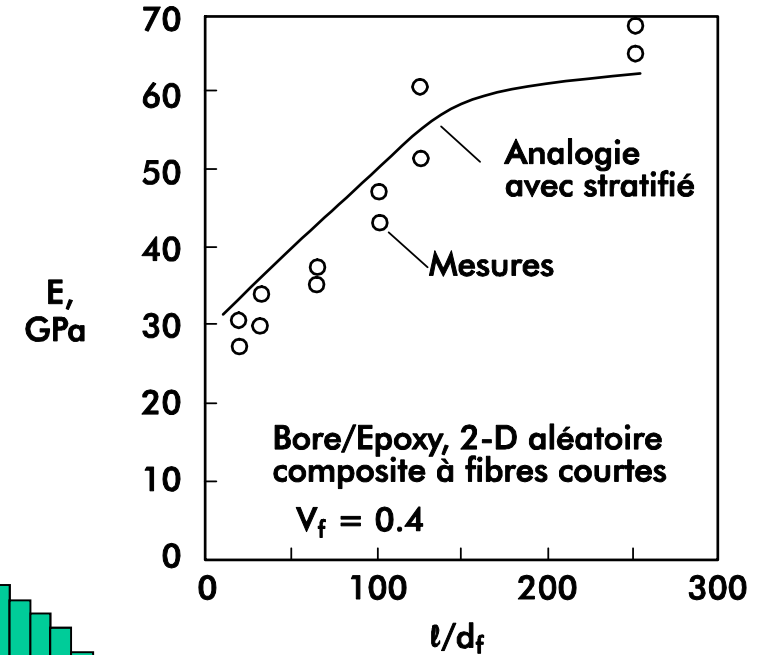
# Composites à fibres courtes orientées



$$f(\theta) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(2\theta)}$$

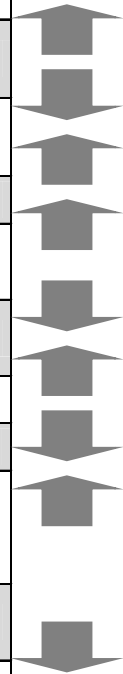


Cox ou Halpin-Tsai pour chaque strate  
puis théorie des stratifiés



# Propriétés des polymères chargés de fibres courtes

Propriété à 23°C	Zytel®		Zytel® 40% fibres courtes		Zytel® 50% fibres courtes	
	0 % HR	50% HR	0 % HR	50% HR	0 % HR	50% HR
Contrainte au seuil plastique $\sigma_y$ (MPa)	84 MPa	48 MPa	205 MPa	135 MPa	230 MPa	155 MPa
Allongement à la rupture $\varepsilon_y$ (%)	50 %	>300 %	3 %	6 %	2 %	5 %
Module de flexion E	2.7 GPa	0.9 GPa	10.5 GPa	6.5 GPa	23.5 GPa	8.5 GPa
Résistance au choc entaillé Izod	50 J/m	200 J/m	160 J/m	214 J/m	180 J/m	270 J/m
Résistance au choc Charpy	Pas de rupture		60 kJ/m <sup>2</sup>		65 kJ/m <sup>2</sup>	
Densité $\rho$	1.14 g/cm <sup>3</sup>		1.45 g/cm <sup>3</sup>		1.58 g/cm <sup>3</sup>	
Point de fusion	245°C		233 °C		233 °C	
Température de flexion sous charge de 1.8 MPa	65 °C		224 °C			
Absorbtion d'eau en 24h (immersion)	1.6 %					
Retrait au moulage	1.3 %		0.18 %		0.16 %	



Comparaison des propriétés d'un copolymère PA66/6 (Nylon) non chargé et chargé avec des fibres courtes

