Analyse avancée II – Série 0A

Remarque générale :
L'exercice 6 (au verso) consiste d'une question de type Vrai ou Faux (V/F). Ce type de questions réapparaîtra tout au long du semestre. Pour une telle question, répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Échauffement. (Solutions générales)

Quelle est la solution générale de chacune des équations suivantes?

i) $y' = 2x$ *ii)* $y'' = a$, où $a \in \mathbb{R}$ *iii)* $y' = y + 1$ *iv)* $y' + \dfrac{y}{x} = 0$

Exercice 1. (Propriétés d'équations différentielles)

Déterminer l'ordre des équations différentielles suivantes, et déterminer si l'équation est autonome ou non autonome :

i) $3y''' + 1 = 0$ *ii)* $\ln(x)\, y' - x^2\, y + e^{-2x} = 0$ *iii)* $\sin(x)\, y' - \sin(y) = 0$

iv) $\dfrac{(y')^2}{\sqrt{x^2+5}} + \dfrac{y}{x} = 0$ *v)* $y''\, y' + \cos(\pi x) = 0$ *vi)* $y'' - 3(y')^2 + 4xy = 0$

vii) $y''' + y'' + y' + y + \sinh(x) = 0$

Exercice 2. (Équation linéaire à coefficients constants)

i) Vérifier que pour $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les fonctions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0\,. \tag{1}$$

ii) Quelle est la solution générale de (1) pour $\omega = 0$?

iii) Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, donner les valeurs de C_1 et C_2 de sorte que $y(1) = 3$ et $y'(1) = 2$.

Exercice 3. (Équations linéaires)

i) Vérifier que pour $x \notin \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ les fonctions $y(x) = 1 + x\tan(x) + C\big(\cos(x)\big)^{-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y' - \tan(x)\, y = x\,.$$

ii) Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ les fonctions $y(x) = 2\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{2} + Ce^{-\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y' + y\cos(x) = \cos(x)^3.$$

Ex. 4 - 6 au verso.

Exercice 4. (Différentielle exacte)

Vérifier que les fonctions y données ci-dessous satisfont l'équation

$$y' \, \frac{2y(x-1)}{y^2+1} + \ln(y^2+1) = 0 \ .$$

i) $y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ii) $y(x) = \pm\sqrt{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)} - 1}$, pour, respectivement, $x > 1$ et $C > 0$, ou $x < 1$ et $C < 0$.
Déterminer les valeurs de C de sorte que $y(2) = -3$ et $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$, respectivement.

Exercice 5. (Équation de Riccati)

i) Vérifier que pour $x > 0$ la fonction

$$y(x) = x - \frac{2x}{1 + xe^{-x}}$$

satisfait l'équation différentielle de Riccati

$$2x^2y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy \tag{2}$$

pour la condition initiale $y(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$.

ii) Est-ce que cette solution est maximale ? Si non, donner la solution maximale pour la condition initiale donnée.

iii) Trouver toutes les conditions initiales pour lesquelles $y(x)$ est solution de (2).

Exercice 6. (V/F : Équations différentielles)

Q1 : Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle sur un intervalle ouvert I. Alors $y(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur tout intervalle ouvert non-vide $J \subset I$.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
20 février 2025

Analyse avancée II – Série 1A

Échauffement. (Solutions générales)

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes en les résolvant :

i) $y' = y - 2$ *ii)* $y' = -xy$ *iii)* $y' + \dfrac{3}{x}\, y = 0$

Exercice 1. (Séparation des variables)

Trouver la solution générale de chacune des équations suivantes :

i) $y' = \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ *ii)* $y' = \sqrt{y^2 + 1}$

Exercice 2. (Équations à variables séparées)

Pour chacune des équations différentielles ci-dessous, trouver la solution maximale pour la condition initiale donnée.

i) $x(3x+4) - 6(y-1)^2\, y' = 0$ $y(0) = 0$

ii) $y\, y' - e^{y^2 - 4x} = 0$ $y(0) = \sqrt{\ln(2)}$

Exercice 3. (Lois de croissance)

Soit $\varepsilon \geq 0$, et soit $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé arbitraire.

i) Trouver la solution maximale y_ε de l'équation différentielle $y' = y^{1+\varepsilon}$ pour la condition initiale $y(0) = 1$.

ii) Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'intervalle A soit contenu dans le domaine de définition de y_ε.

iii) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| = 0$ pour tout $x \in A$.

Exercice 4. (Modèle de Verhulst)

Résoudre par séparation des variables l'équation différentielle du modèle de Verhulst pour la croissance d'une population, c'est-à-dire

$$y' = y(a - by), \qquad a, b > 0\,,$$

pour la condition initiale $y(0) = y_0$.
Expliquer le comportement respectif de la solution pour $y_0 > \frac{a}{b}$ et pour $y_0 < \frac{a}{b}$.

Ex. 5 et 6 au verso.

Exercice 5. (Solutions maximales)

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$x(x-1)y' - y(y-1) = 0$$

et dessiner le graphe des solutions maximales pour les conditions initiales suivantes :

x_0	-1	-1	2	2
y_0	-1	1	4	-4

Exercice 6. (QCM : séparation des variables)

La fonction $u(t)$ qui satisfait pour $t \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

avec la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi :

- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{e^2}{4}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{6}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{4\,e^2}$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
21 février 2025

Analyse avancée II – Série 1B

Révision Calcul Propositionnel

Une “proposition (logique)” est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit p et q des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations $\neg$ (“non” logique), $\wedge$ (“et” logique), $\vee$ (“ou” logique), $\Leftrightarrow$ (l'équivalence logique) et $\Rightarrow$ (l'implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exercice 1. (Équivalences logiques)

Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

i) $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$ (loi de la double négation).

ii) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ et $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (idempotence).

iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ et $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (commutativité).

iv) $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ et $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$ (lois de de Morgan).

v) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ et $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (associativité).

vi) $((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ et $((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$ (distributivité).

vii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$ (définition de l'implication).

viii) $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$ (négation de l'implication).

ix) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitivité de l'implication).

x) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ (propositions équivalentes).

xi) $((\neg q) \Rightarrow (\neg p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (contraposé de l'implication).

A noter que la véracité de la réciproque de la proposition $p \Rightarrow q$ c'est-à-dire la proposition $q \Rightarrow p$ n'a aucun rapport avec la véracité de la proposition $p \Rightarrow q$.

Dans la suite, pour économiser des parenthèses, nous utiliserons les priorités habituelles sur les opérations et, si convenable, nous écrirons que $p \Leftarrow q$ au lieu de $q \Rightarrow p$.

Exercice 2. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, une variable)

Soit E un ensemble et pour $x \in E$ soit $p(x)$ et $q(x)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x). On écrira $\forall x \in E$, $p(x)$ pour dire que “pour tous les éléments $x \in E$, la proposition $p(x)$ est vraie“, et $\exists x \in E$, $p(x)$ pour dire que “il existe $x \in E$ tel que la proposition $p(x)$ est vraie”. Se convaincre que :

i) $(\neg(\forall x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg(p(x)))$.

ii) $(\neg(\exists x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg(p(x)))$.

Ex. 3 - 5 au verso.

iii) $(\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E, p(x)) \wedge (\forall x \in E, q(x)))$.

iv) $(\exists x \in E, p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E, p(x)) \vee (\exists x \in E, q(x)))$.

v) $(\forall x \in E, p(x) \vee q(x)) \Leftarrow ((\forall x \in E, p(x)) \vee (\forall x \in E, q(x)))$.

vi) $(\exists x \in E, p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in E, p(x)) \wedge (\exists x \in E, q(x)))$.

Pour les deux cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

Exercice 3. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, deux variables)
Soit E et F des ensembles et pour $x \in E$ et $y \in F$ soit $p(x,y)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x et de y). Se convaincre que :

i) $((\forall x \in E), (\forall y \in F), p(x,y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in F), (\forall x \in E), p(x,y))$.

ii) $((\exists x \in E), (\exists y \in F), p(x,y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in F), (\exists x \in E), p(x,y))$.

iii) $((\exists x \in E), (\forall y \in F), p(x,y)) \Rightarrow ((\forall y \in F), (\exists x \in E), p(x,y))$.

Pour le cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

Révision Ensembles

Exercice 4. (Notion de couple)
Soient les ensembles $X = \{1,2\}$, $Y = \{3,4\}$, $Z = \{5,6\}$.

i) Est-ce que le couple $(3,2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?

ii) Montrer que le produit cartésien n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$.

Exercice 5. (Relation d'équivalence)
Soit X un ensemble. Un sous-ensmble $R \subset X \times X$ est appelé une relation sur X. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation d'équivalence sur X (et on utilise la notation $x \sim y$ pour dire que $(x,y) \in R$) si :

i) $\forall x \in X, x \sim x$ (la relation est réflexive).

ii) $\forall x, y \in X, (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$ (la relation est symétrique).

iii) $\forall x, y, z \in X, ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$ (la relation est transitive).

Donné $x \in X$ on définit l'ensemble $C_x := \{y \in X : y \sim x\} \subset X$ qui est appelé la classe d'équivalence de $x \in X$, et l'ensemble de tous les classes d'équivalences distinctes de X est appelé l'ensemble quotient de X et il est noté par $X/_{\sim}$.

i) Montrer que $\forall x \in X$, $C_x \neq \phi$, que $\forall x, y \in X$, $C_x = C_y$ si $x \sim y$ et $C_x \cap C_y = \phi$ sinon.

ii) Montrer que les relations "$\forall x, y \in X$, si $x = y$ alors $x \sim y$", ainsi que "$\forall x, y \in X$, $x \sim y$", sont des relations d'équivalence sur X. Quel est l'ensemble quotient $X/_{\sim}$ dans les deux cas ?

iii) Montrer que la relation "$\forall x, y \in \mathbb{Z}^*$, si $xy > 0$, alors $x \sim y$" , définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^*$. Quel est l'ensemble quotient ?

iv) Montrer que la relation "$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, si $x - y$ est pair, alors $x \sim y$" définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Quel est l'ensemble quotient ?

v) Est-ce que "$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, si $x - y$ est impair, alors $x \sim y$" , définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$?

7

Analyse avancée II – Série 2A

Échauffent 1. (Équations linéaires du premier ordre)

Quelles sont les solutions générales des équations différentielles suivantes ?

i) $y' = 0$ *ii)* $y' = 1$ *iii)* $y' + y = 0$ *iv)* $y' - y = 0$

Échauffent 2. (Équations linéaires du 2e ordre)

Quelles sont les solutions générales des équations différentielles suivantes ?

i) $y'' = 0$ *ii)* $y'' = 1$ *iii)* $y'' + y = 0$ *iv)* $y'' - y = 0$

Échauffent 3. (Résonances)

Quelle est la solution du problème de Cauchy $y'' + y = \cos(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$?

Exercice 1. (Équations linéaires)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous pour les conditions initiales données.

i) $y' - y\sin(x) = 4\sin(x)\, e^{\cos(x)}$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

ii) $xy' - y - 4x\ln(x) = 0$ $y(1) = 1$

Exercice 2. (Équations linéaires, méthode des coefficients indéterminés)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous pour les conditions initiales données.

i) $y' - 3y = 10\cos(x) + 2e^{3x}$ $y(0) = 0$

ii) $y' + y = x^3$ $y(0) = -2$

Exercice 3. (V/F : Équations différentielles linéaires du premier ordre)

Q1 : Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Q2 : Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Q3 : Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

Ex. 4 - 7 au verso.

Exercice 4. (Équations linéaires homogènes à coefficients constants)

Résoudre l'équation différentielle

$$3y'' - 4y' + my = 0$$

pour les valeurs indiquées du paramètre m.

i) $m = 1$ *ii*) $m = 2$ *iii*) $m = \frac{4}{3}$

Pour *iii*), montrer que la deuxième solution du problème homogène peut être trouvée par la méthode de la variation de la constante.

Exercice 5. (Équations à coefficients constants)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

i) $y'' + 4y = 3e^{2x}$ *ii*) $y'' + 4y = 5\cos(2x)$ *iii*) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}$, avec $x \in]0, \pi[$

Exercice 6. (Problème de Cauchy)

i) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = 0\,.$$

ii) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = 5\sin(3x)\ . \tag{1}$$

iii) Donner la solution de (1) pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 7. (Oscillateur harmonique amorti)

Considérer l'équation différentielle

$$my'' + \alpha y' + \varepsilon y = H\sin(\omega t) \tag{2}$$

où $m > 0$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

i) Trouver la solution générale pour l'équation homogène associée.

ii) Que se passe-t-il avec cette solution lorsque $t \to \infty$?

iii) Trouver une solution particulière de la forme $y_{\text{part}}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$.

iv) Quel est le comportement de la solution générale de (2) lorsque $t \to \infty$?

Remarque: Le titre de cet exercice est dû au fait que l'équation différentielle (2) décrit le mouvement d'une masse m suspendue à une extrémité d'un ressort (cf. cours de physique).

Peter Wittw
28 février 202

Analyse avancée II – Série 2B

Échauffement. (Linéarité)

Soient p et q deux fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + p(x)y = q(x)$. Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation sur I, alors :

i) pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha + \beta = 1$ la fonction $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation.

ii) la fonction $y = y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène associée à $y' + p(x)y = q(x)$, c'est-à-dire de l'équation $y' + p(x)y = 0$.

Exercice 1. (Solution générale et problème de Cauchy)

Soit l'équation différentielle $2y^3 + 3xy^2y' = 0$. Déterminer

i) la solution générale.

ii) la solution maximale qui satisfait respectivement les condition initiales $y(1) = 2$, $y(1) = -2$, $y(-1) = 2$, $y(-1) = -2$ et $y(0) = 0$.

Exercice 2. (Familles de courbes orthogonales)

Trouver la famille des courbes orthogonales à la famille donnée et dessiner quelques membres de chaque famille.

i) $xy = c,\ c \in \mathbb{R}$ *ii)* $y^3 = cx^2,\ c \in \mathbb{R}$ *iii)* $x^2 + 2y^2 = c,\ c \in \mathbb{R}^*_+$

Exercice 3. (Équations linéaires)

Trouver la solution générale des équations suivantes :

i) $y' + 4y = 3\sin(2x)$ *ii)* $(1 + x^2)\,y' + xy = 4x\sqrt{1 + x^2}$

Exercice 4. (Équations de Bernoulli)

Trouver la solution générale des équations suivantes :

i) $y' - y = x\,y^4$ *ii)* $y' + 4y - 2(x + 1)y^3 = 0$ *iii)* $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^3$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
6 mars 2015

Analyse avancée II – Série 3A

Échauffement. (Révision – Intégration)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx\ .$$

Exercice 1. (Rappel intégration, continuité, périodicité)

Soit l'équation différentielle $y'' + y = \tan(x)$ pour $x \in I_0 = \,]-\pi/2, \pi/2[\,$. Pour une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x)\,, \tag{1}$$

(méthode de la variation des constantes) on obtient le système

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {C_1}'(x) \\ {C_2}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix}.$$

i) Trouver une solution particulière (1) à partir de ce système.

Observez que la solution trouvée est solution de l'ED dans tous les intervalles de la forme $I_k = \,]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[\,$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons maintenant la fonction[1]

$$f(x) = -\cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)\ .$$

ii) Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?

iii) Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

iv) Montrer que f est une fonction périodique.

v) Est-ce que f est π-périodique?

Exercice 2. (Équations d'ordre supérieur)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

i) $y'''' - y'' - 12y = 12x + 5$

ii) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x} + \sin(x)$

Exercice 3. (Isoclines)

Soit l'équation différentielle $y^2\,y' + x^2 = 0$.

i) Déterminer les isoclines associées aux pentes $y' \in \left\{0, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -8\right\}$ et esquisser les trajectoires intégrales de l'équation différentielle pour les conditions initiales $y(0) = -1$, $y(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

ii) Résoudre analytiquement l'équation différentielle et contrôler le résultat de *i*).

[1] ***Remarque :*** *par convention, le domaine de définition d'une fonction donnée par une expression est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression est bien définie union les points où la fonction peut être définie par un prolongement par continuité.*

Ex. 4 - 9 au verso.

Exercice 4. (Solutions par morceaux)

Soit l'équation différentielle $y' = 5\left(y^4\right)^{1/5}$.

i) Déterminer toutes les solutions de cette équation.

ii) Esquisser les graphes des solutions passant par les points $(-3,-1)$ et $(2,1)$.

Exercice 5. (Théorème d'existence et d'unicité ; voir aussi Exercice 4 de la Série 1A.)

Soit l'équation différentielle $u'(t) = u(t)(u(t)-1)$.

i) Trouver pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $u_0 \in \mathbb{R}$ la solution maximale pour la condition initiale $u(t_0) = u_0$.

ii) Trouver la solution générale.

Exercice 6. (Théorème d'existence et d'unicité ; voir aussi Exercice 5 de la Série 1A.)

Soit l'équation différentielle de l'Exercice 5 de la Série 1A : $x(x-1)y' - y(y-1) = 0$.

i) Montrer que si on pose $y(x) = u(t(x))$ avec $t(x) = -\ln(|x|) + \ln(|x-1|)$, les solutions de cette équation différentielle peuvent être exprimées en terme des solutions de l'équation différentielle de l'Exercice 5.

ii) Trouver la solution générale.

Exercice 7. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x\,y' - y = x$ pour $x \in]0,\infty[$ avec la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie :

- ☐ $y(2) = \ln(2)$
- ☐ $y(2) = -2\ln(2)$
- ☐ $y(2) = 2\ln(2)$
- ☐ $y(2) = 2\ln(2) + 2$

Exercice 8. (QCM : séparation des variables)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' - \cos(x)\,y + \cos(x)\,y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ est :

- ☐ $y(x) = \dfrac{1}{1+e^{\sin(x)}}$
- ☐ $y(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-\sin(x)}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\sin(x)}}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{2}\sin(x)}}$

Exercice 9. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 41y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$ est :

- ☐ $y(x) = e^{5x}\left(7\cos(4x) - \dfrac{37}{4}\sin(4x)\right)$
- ☐ $y(x) = (-37x+7)e^{5x}$
- ☐ $y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$
- ☐ $y(x) = e^{4x}\left(7\cos(5x) - 6\sin(5x)\right)$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
7 mars 2025

Analyse avancée II – Série 3B

Échauffement. (Invariance d'échelle)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit l'équation différentielle homogène $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Montrer que si $y_1(x)$ est une solution de l'équation, alors pour tout $C \in \mathbb{R}^*$ la fonction $y_C(x) = \dfrac{1}{C}\, y_1(Cx)$ est aussi une solution de l'équation.

Exercice 1. (Équations homogènes)

Soit l'équation différentielle homogène $(x^2 - y^2)\, y' = 2xy$.

i) Trouver la solution générale de l'équation.

ii) Représenter les solutions graphiquement.

Exercice 2. (Équations homogènes)

Résoudre les équations différentielles suivantes:

i) $x\, y' = y \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ *ii*) $x^2\, y' = y(y + 2x)$

iii) $y' = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$ pour les paramètres suivants :

	a	b	c	d
1)	2	1	-3	2
2)	-1	3	5	1
3)	1	1	3	-2

iv) Ramener l'équation ci-dessous à une équation de la forme *iii*) sans la résoudre après.

$$y' = \frac{ax + by + r}{cx + dy + s}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad r \neq 0 \text{ ou } s \neq 0$$

Indication: Il faut introduire des nouvelles coordonnées $\bar{x}, \bar{y}$.

Exercice 3. (Équation de Riccati)

Soit l'équation différentielle de Riccati $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$.

i) Soit y_1 une solution quelconque de cette équation sur un intervalle ouvert I, et posons $y = y_1 + \dfrac{1}{u}$. Montrer que si u satisfait l'équation différentielle linéaire

$$u' + (2a(x)y_1(x) + b(x))\, u = -a(x)$$

sur un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $\forall x \in J$, $u(x) \neq 0$, alors $y = y_1 + \dfrac{1}{u}$ est solution de l'équation différentielle de Riccati sur J.

ii) Utiliser l'indication *i*) pour résoudre l'équation différentielle de Riccati

$$3\, x\, y' + 4\, y^2 - 4 = 0 \ .$$

Exercice 4. (Équation de Clairaut)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$(y - xy')^2 = -2y' \, .$$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
13 mars 2025

Analyse avancée II – Série 4A

Échauffement. (Propriétés d'ensembles)

Soit $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < 1\}$. Trouver l'intérieur $\mathring{X}$ et l'adhérence $\bar{X}$ de X. Trouver le bord ∂X de X, les points isolés de X, ainsi que les points d'accumulation de X.

Exercice 1. (Points d'accumulation)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et soit A l'ensemble des points d'accumulation de X. Montrer que pour tout $a \in A$ il existe un suite $(x_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de X, telle que $\forall k\ x_k \neq a$, et telle que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

Exercice 2. (Suites dans $\mathbb{R}^n$)

Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ est bornée.

Exercice 3. (Normes)

Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$

i) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ *ii)* $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

Exercice 4. (Continuité des normes)

Montrer que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. (QCM : ensembles)

Soit la fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln\bigl(4 - (x + y)^2\bigr)$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x, y)$ est bien définie. Alors :

- ☐ l'ensemble D n'est ni fermé, ni borné.
- ☐ l'ensemble D est borné mais pas fermé.
- ☐ l'ensemble D est fermé mais pas borné.
- ☐ l'ensemble D est fermé et borné.

suite et Ex. 6 - 8 au verso.

Exercice 6. (Longueur d'un chemin)

Trouver la longueur du chemin $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T$.

Exercice 7. (Chemins)

Soit la fonction $f\colon [0, 2\pi + 4] \to \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = \begin{cases} (1 + \cos(t), \sin(t))^T & \text{si } t \in [0, \pi), \\ (-1 - \cos(t), \sin(t))^T & \text{si } t \in [\pi, 2\pi), \\ (-2 - 2\pi + t, 0)^T & \text{si } t \in [2\pi, 2\pi + 4]. \end{cases}$$

i) Montrer que f définit un chemin, c'est-à-dire montrer que f est une fonction continue.

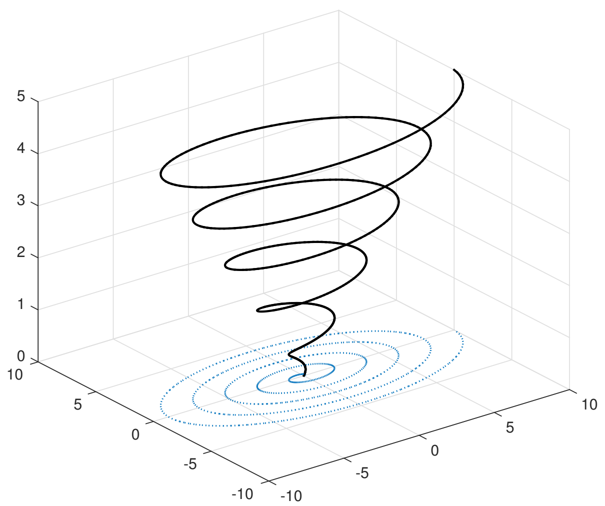
ii) Esquisser la trace de f.

iii) Est-ce que la fonction f est injective ?

iv) Calculer la longueur du chemin f.

Exercice 8. (Paramétrisations)

Soient une courbe ainsi que sa projection sur le plan x-y illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), 2t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
14 mars 2025

Analyse avancée II – Série 4B

Échauffement. (Linéarité)

Soient p, q et r des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, ainsi que l'équation linéaire homogène associée, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Montrer que :

i) si y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation sur I, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha + \beta = 1$, la fonction $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation sur I.

ii) si y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation sur I, alors la fonction $y = y_1 - y_2$ est solution de l'équation linéaire homogène associée sur I.

iii) l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée est un espace vectoriel.

Exercice 1. (Réduction de l'ordre)

i) Soient p et q des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et soit y_1 est une solution non nulle de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sur I. Trouver l'équation différentielle du première ordre que l'on obtient si on pose $y = U\, y_1$, avec U une primitive d'une nouvelle fonction inconnue u (méthode de la réduction de l'ordre, voir le cours).

ii) Soit l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et soit $y_1(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Utiliser la méthode de la réduction de l'ordre pour trouver une deuxième solution linéairement indépendante de $y_1(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (Deuxième ordre à coefficients constants)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$.

i) Montrer que l'idée de la réduction de l'ordre permet de trouver la solution y_2 pour le deuxième cas du §1.5.2 du cours.

ii) Montrer que l'expression donnée pour le troisième cas du §1.5.2 du cours s'obtient par la formule d'Euler (c.-à-d. $\forall \phi \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$) à partir des deux solutions exponentielles complexes.

Exercice 3. (Wronskien)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, avec p et q des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soient y_1 et y_2 deux solutions quelconques de l'équation sur I, et soit $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ le Wronskien des deux solutions.

i) Montrer que si les deux solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, alors $\forall x \in I$ $w(x) = 0$.

ii) Montrer que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $w(x_0) = 0$, alors $\forall x \in I$ $w(x) = 0$ et les solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

iii) Montrer que la dimension de l'espace vectoriel des solutions est deux.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
20 mars 20

Analyse avancée II – Série 5A

Échauffement 1. (Courbes continues et courbes de classe C^1)

Soient les fonctions f, g, et h définies respectivement par

$$f\colon\ [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (\cos(t), \sin(t))^T$$

$$g\colon\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad g(x) = (\cos(2t), \sin(2t))^T$$

$$h\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad h(x) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\,\right)^T$$

Montrer que f, g, et h sont les trois des représentants d'une courbe continue, mais pas d'une courbe de classe C^1.

Exercice 1. (Longueur d'une courbe de classe C^1)

Montrer que la longueur d'une courbe de classe C^1 est bien définie, c'est-à-dire indépendante de sa paramétrisation.

Exercice 2. (Paramétrisation d'une courbe de classe C^1)

Soient les fonctions f et h comme dans l'Échauffement 1. Monter que pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ la restriction de la fonction f à l'intervalle $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ et la restriction de la fonction h à l'intervalle $[-\cos(\varepsilon), \cos(\varepsilon)]$ sont des chemins équivalents de classe C^1. Utiliser cette information pour montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

existe au sens d'une intégrale généralisée et calculer sa valeur.

Exercice 3. (Intégrales curvilignes)

Soit $f\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ et $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (-y,x)^T$. Calculer l'intégrale curviligne de F le long de la courbe $< f >$.

Échauffement 2. (Graphes)

Trouver l'image et esquisser le graphe des fonctions $f\colon [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ suivantes :

i) $f(x,y) = 1$ *ii)* $f(x,y) = x$ *iii)* $f(x,y) = y$ *iv)* $f(x,y) = x + y$

v) $f(x,y) = x - y$ *vi)* $f(x,y) = -x - y - 1$

Exercice 4. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-3y}{x+2y^2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$

Ex. 5 - 9 au verso.

Exercice 5. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|^{3/2}}{x^2+y^4}$ *b)* *a)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|}{x^2+y^4}$ *c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)}$

Exercice 6. (Continuité)

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0,0)$ des fonctions f dont l'expression pour $(x,y)\neq(0,0)$ est :

i) $\displaystyle f(x,y)=\frac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2}$ *ii)* $\displaystyle f(x,y)=\frac{xy}{x^2+(2x-y)^2}$

iii) $\displaystyle f(x,y)=\frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$ *iv)* $\displaystyle f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Exercice 7. (V/F : limites et continuité)

Q1 : Soit une fonction $f\colon D\to\mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0)\in D$ où $D\subset\mathbb{R}^2$ est ouvert. Si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe, alors f est continue en (x_0,y_0).

Q2 : Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et soit une fonction $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ avec $\lim_{r\to0^+} g(r)=0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi\in[0,2\pi[$ telle que

$$\left|f\big(r\cos(\varphi_0),r\sin(\varphi_0)\big)\right|\leq g(r)$$

pour tout $r\in\mathbb{R}^+$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\,.$$

Q3 : Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $f(0,0)=0$. Si pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et tout $\beta\in\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t\to0} f(\alpha t,\beta t)=0\,,$$

alors f est continue en $(0,0)$.

Exercice 8. (Question à rédaction détaillée)

Donner un exemple d'une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limite en $(0,0)$ mais satisfait pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{t\to0} f(t,\,\alpha\,t^2)=0\,.$$

Exercice 9. (V/F : limites)

Soit une fonction $f\colon D\to\mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0)\in D$ où $D\subset\mathbb{R}^2$ est ouvert. Si $\lim_{x\to x_0} f(x,y_0)$ existe, alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y_0)$$

existe.

Peter Wittwer
21 mars 202[illegible]

Analyse avancée II – Série 5B

Échauffement. (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \big(x\ln(x)\big)^n$.

i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série converge absolument, c'est-à-dire montrer que la fonction f est bien définie.

ii) Monter que la fonction f satisfait l'équation différentielle $y' + (1+\ln(x))\, y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

iii) Montrer que $f(2) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 1. (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}\, x^{3n}$.

i) Montrer que le rayon de convergence de la série est $+\infty$ et que la fonction f est donc bien définie.

ii) Monter que la fonction f satisfait l'équation différentielle $f'' + f' + f = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

iii) Calculer la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 2. (Équations indépendantes de x)
Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{y}{1+y^2}\left((y')^2 + 1\right) = 0\ .$$

Exercice 3. (Équations indépendantes de y)
Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{x}{1+x^2}\left((y')^2 + 1\right) = 0\ .$$

Exercice 4. (Équations indépendantes de x et y)
Trouver par trois méthodes différentes la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - (y')^2 - 1 = 0\ .$$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
27 mars 2023

Analyse avancée II – Série 6A

Échauffement. (Lignes et surfaces de niveau, gradient)

i) Soit la fonction $f(x,y) = x^2 - 2y$. Dessiner les lignes de niveau $f(x,y) = c$ pour $c = -2,\ 0,\ 2$ et représenter les gradients aux points $P = (-2,3)$, $Q = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $R = (2,1)$.

ii) Construire une fonction $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que le graphe de f soit une surface de niveau de g. Exprimer toutes les surfaces de niveau de g comme graphe d'une fonction adéquate.

Exercice 1. (Fonctions dérivées partielles)

Préciser le domaine des fonctions f ci-dessous et calculer les fonctions dérivées partielles du premier et deuxième ordre :

i) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

ii) $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$

iii) $f(x,y) = \sin(x^2 y)\cosh(y-x)$

iv) $f(x,y,z) = \sinh\left(\dfrac{x+3yz}{z-2}\right)^2$

Exercice 2. (Deuxièmes dérivées partielles)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,.$

Exercice 3. (QCM : limites, dérivées partielles)

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y\,\ln\left(1 + (x^2+y^2)^2\right)}{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\,(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

Ex. 3 Q2 - 5 au verso.

Q2 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + x^2\, e^{\sin(y)}$. Alors la matrice Hessienne de f en (x,y) est :

- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\cos(y)^2 \end{pmatrix}$

Exercice 4. (Fonctions dérivées partielles)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$

iii) Est-ce que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(x,y) = (0,0)$?

Exercice 5. (Fonctions dérivées partielles)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2)\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

iv) Discuter les fonctions dérivées partielles secondes de f.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
28 mars 2025

Analyse avancée II – Série 6B

Échauffement. (Produits scalaires et normes induites)
Un produit scalaire $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ sur un espace vectoriel réel V est une fonction de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$, qui satisfait :

i) *(symétrie)* $\forall u, v \in V$, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

ii) *(bi-linéarité)* $\forall u, v, w \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$.

iii) *(positivité)* $\forall u \in V$, $\langle u, u\rangle \geq 0$ et $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Montrer que la fonction $\|\ \|\colon V \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\| := \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ définie une norme sur V. Cette norme est appelée la norme induite par le produit scalaire.

Exercice 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit V un espace vectoriel, $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ un produit scalaire et $\|\ \|$ la norme induite. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$.

Exercice 2. (Espaces métriques)
Soit V un espace vectoriel et $\|\ \|$ une norme sur V. Montrer que la fonction $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto d(u,v) := \dfrac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|}$, définie une distance sur V.

Exercice 3. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)
Soit $X := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 > 1\big\} \cup \{(0,0)\}$. Donner explicitement les ensembles suivants : $\mathring{X}$, $\overline{X}$, ∂X, l'ensemble des points isolés de X et l'ensemble des points d'accumulation de X. Justifier vos réponses à partir des définitions.

Exercice 4. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)
Soient les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 := \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\Big\}\,,\\
&\Omega_2 := \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon x_1^2 - x_2^2 = 1\Big\}\,,\\
&\Omega_3 := \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x_1 < 1,\ \sin\!\left(\tfrac{1}{x_1}\right) < x_2 < 2\right\},\\
&\Omega_4 := \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon \big(x_1 \in \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < 5\big) \vee \big(x_1 \notin \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 5\big)\Big\}\,,\\
&\Omega_5 := \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\Big\} \cup \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 \leqslant 1\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Pour chacun des ensembles décider s'il est ouvert ou fermé ou ni ouvert ni fermé, s'il est borné ou non, et déterminer le bord. Justifier les réponses à partir des définitions.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
3 avril 2025

Analyse avancée II – Série 7A

Échauffement. (Plan tangent)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

Exercice 1. (Dérivée)

Soient $g, h\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, de classe C^1. Calculer les dérivées f' où

i) $f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$

ii) $f(x, y) = g(x, y)\, h(x, y)$

iii) $f(x, y) = \dfrac{g(x, y)}{h(x, y)}$

Exercice 2. (Différentiabilité)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Montrer que f est différentiable en tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

iv) Montrer que f n'est pas différentiable en $(x, y) = (0, 0)$.

v) Est-ce que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(x, y) = (0, 0)$?

Exercice 3. (QCM, différentiabilité)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.
- ☐ les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$.

Ex. 4 - 7 au verso.

Exercice 4. (V/F : différentiabilité)

Q1 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent.

Q2 : Si une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ .$$

Q3 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0\,.$$

Q4 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x,y), alors

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0\,.$$

Q5 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h^2, y_0) - f(x_0,y_0)}{h^2}\ .$$

Exercice 5. (QCM, plan tangent)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \big(1 - \cos(y)\big)\,\big(\sin(x)\big)^2$$

et soit le point $p = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Le plan tangent au graphe de f en $\big(p, f(p)\big)$ est donné par l'équation

- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\,x + \frac{2}{\pi}\,y$
- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y - \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y + \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\,(y - \pi)$

Exercice 6. (Question ouverte)

Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, mais qui n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 7. (Question ouverte)

Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais qui n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Analyse avancée II – Série 7B

Échauffement. (Topologie de $\mathbb{R}^n$)

i) Montrer qu'une réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

ii) Montrer qu'une intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. (Bolzano-Weierstrass)
En partant du théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}$, démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. (Suites de Cauchy)

i) Donner la définition d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$.

ii) Montrer qu'une suite (x_k), $x_k \in \mathbb{R}^n$, converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Exercice 3. (Sous-ensembles fermés)
Montrer qu'un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite (x_k) convergente d'éléments $x_k \in X$ converge vers un élément de X.

Exercice 4. (Espace vectoriel des fonctions continues)
Soit l'ensemble $V = C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions avec les nombres réels.

i) Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que la fonction $\langle\,.\,,\,.\,\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$, $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ définit un produit scalaire sur V, avec la norme induite $\|f\|_2 := \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$.

iii) Montrer que $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2\,\|g\|_2$.
Indication: suivre la démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

iv) Montrer que la fonction $\|\;\|_\infty\colon C\left([0,1],\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$, $f\mapsto\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ définie aussi une norme sur $C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

v) Soit la suite des fonctions $f_n(x) = (1-x)^n$ dans V. Montrer que $\forall x\in(0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, mais que $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Trouver une fonction $f\in V$ telle que $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_2 = 0$.

vi) Conclure de *v*) que les normes $\|\;\|_\infty$ et $\|\;\|_2$ ne sont pas équivalentes.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
10 avril 2025

Analyse avancée II – Série 8A

Échauffement. (Dérivée en chaîne)

Calculer la dérivée de la fonction

$$f :]1, \infty[\mapsto \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) = \ln(t)^{\sin(t)}$$

i) par calcul direct

ii) en utilisant que $f(t) = (g \circ h)(t)$ avec $g(x, y) = x^y$ et $h(t) = (\ln(t), \sin(t))^T$.

Exercice 1. (Matrice jacobienne)

Soient les fonctions $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. On note

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}, \qquad G(s, t) = \begin{pmatrix} G_1(s, t) \\ G_2(s, t) \end{pmatrix} \qquad \text{et}$$

$$\bar{F}(s, t) = F\big(G_1(s, t), G_2(s, t)\big) = (F \circ G)(s, t)\,.$$

Soient $J_F(x, y)$, $J_G(s, t)$ et $J_{\bar{F}}(s, t)$ les matrices jacobiennes de F, G et $\bar{F}$. Montrer par un calcul explicite que

$$J_{\bar{F}}(s, t) = J_F\big(G(s, t)\big) \cdot J_G(s, t)\,,$$

où $\cdot$ est le produit matriciel.

Exercice 2. (QCM : dérivée en chaîne)

Soit

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$$

une fonction quelconque de classe C^1. On considère la fonction

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto h(u, v) = \big(ve^{-2u},\ u^2e^{-v},\ u\big)$$

et on définit $f = g \circ h$. Alors

- [ ] $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1)$
- [ ] $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 1)$
- [ ] $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$
- [ ] $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$

Exercice 3. (V/F : dérivée en chaîne)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Soit $h = f \circ g$ et $p \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$J_h(p) = J_g\left(f(p)\right)\, J_f(p)\,.$$

Exercice 4. (Changement de coordonnées)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $H\colon D \to \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées inverse défini par $(u,v) = H(x,y)$ avec

$$u = x^2 + 2y^2\,, \qquad v = \frac{y}{\sqrt{x}}\,.$$

i) Trouver le domaine D et l'image $\tilde{D}$ de H. Calculer la transformation $G \equiv H^{-1}\colon \tilde{D} \to D$ ainsi que sa matrice jacobienne $J_G(u,v)$ et évaluer cette dernière en $(u,v) = H(x,y)$.

ii) Calculer $\big(J_H(x,y)\big)^{-1}$ et comparer avec le résultat de *i*).

Exercice 5. (Changement de coordonnées)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine convenable et soit $H\colon D \to \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées inverse (bijectif de classe C^1 avec $G = H^{-1}$ de classe C^1) défini par $(u,v) = H(x,y) = \big(H_1(x,y), H_2(x,y)\big)$ avec

$$H_1(x,y) = \frac{y}{x+2}\,, \qquad H_2(x,y) = \frac{x}{2y+1}\,.$$

i) Calculer la matrice jacobienne $J_H(x,y)$ de cette transformation.

ii) On note $\tilde{D}$ l'image de H. Trouver la transformation $G \equiv H^{-1}\colon \tilde{D} \to D$ et calculer $J_G(u,v)$.

iii) Vérifier par calcul explicite que $J_G(u,v) = \big(J_H(x,y)\big)^{-1}\Big|_{(x,y)=G(u,v)}$.

Exercice 6 (Laplacien)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction de classe C^2 et soit la fonction $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \bar{f}(u,v)$, définie par

$$\bar{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 3y \end{cases}\,.$$

Exprimer le laplacien $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ par rapport aux variables u et v.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
11 avril 2025

Analyse avancée II – Série 8B

Échauffement. (Limite d'une fonction et continuité)

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Donner les définitions de la limite épointée de f en un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ en termes de suites et par "ε et δ" et montrer l'équivalence des deux définitions.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Donner les définitions de la continuité de f en un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ en termes de suites et par "ε et δ" et montrer l'équivalence des deux définitions.

Exercice 1. (Inégalité de Young et de Hölder et équivalence de normes)

1. Démontrer l'inégalité de Young :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q,$$
où $p, q \in \,]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

   Indication : utiliser le fait que la fonction $\ln\colon]0, +\infty[\,\to \mathbb{R}$ est concave et appliquer ln à la relation d'inégalité.

2. Démontrer que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et si $\langle x, y\rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :
$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q$$
où $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Ici, par convention, $[1, +\infty] := [1, +\infty[\,\cup \{+\infty\}$ et $\dfrac{1}{+\infty} := 0$.

   Indication : poser $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \, \|y\|_q^{1/p}$ et utiliser l'inégalité de Young, après avoir écrit $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n \Big(\lambda \, |x_i|\Big) \left(\dfrac{1}{\lambda}\, |y_i|\right)$.

3. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty[$ mais pas pour $p \in \,]0, 1[$.

   Indication : partir de $\|x + y\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser l'inégalité de Hölder.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \,]1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty[$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :
$$\|x\|_1 \leqslant n^{1/q} \;\; \|x\|_p \, ,$$
$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p} \;\; \|x\|_\infty \, ,$$
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \, .$$
En déduire que toutes les normes $\|\cdot\|_p \,$, $p \in [1, +\infty]$, sont équivalentes.

Ex. 2 au verso.

Exercice 2. (Normes sur applications linéaires)
L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel réel de dimension $m \cdot n$ sur $\mathbb{R}$. Soient $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ équipés respectivement de la norme $\| \ \|_p$ et de la norme $\| \ \|_q$, et soit $A = (a_{i,j})$, $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$, la matrice qui représente l'application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que la fonction $\| \ \|_{p,q} \colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$,
$$L \mapsto \|L\|_{p,q} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_q}{\|x\|_p}$$
définie une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

2. Montrer que $\|L\|_{1,1} = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$, où $A_j := (a_{1,j}, \ldots, a_{m,j})^{\mathrm{T}}$ est le vecteur formé des éléments de la j-ième colonne de la matrice A.

3. Montrer que $\|L\|_{\infty,\infty} = \sup\limits_{1 \leq i \leq m} \|A_i\|_1$, où $A_i := (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})^{\mathrm{T}}$ est le vecteur formé des éléments de la i-ième ligne de la matrice A.

4. Montrer que $\|L\|_{2,2}$ est égal à la racine carrée de la plus grande valeur propre de la matrice $A^{\mathrm{T}}A$, où A^{T} est la matrice transposée de la matrice A.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
17 avril 202[illegible]

Analyse avancée II – Série 9A

Échauffement. (Coordonnées sphériques)

i) Donner la fonction de changement de coordonnées G des coordonnées sphériques.

ii) Vérifier que $(x, y, z) = G(\rho, \theta, \varphi)$ se trouve sur la sphère de rayon ρ pour tout θ et φ.

iii) Calculer la matrice jacobienne J_G de G.

iv) Calculer le jacobien $\det(J_G)$ de G.

Exercice 1. (Laplacien en coordonnées sphériques)

Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Vérifier que le laplacien de F s'exprime comme suit en coordonnées sphériques :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2}\right],$$

où $\bar{F}(\rho, \theta, \varphi) = (F \circ G)(\rho, \theta, \varphi)$ avec G de l'échauffement.

Exercice 2. (Normes matricielles)

Soit V l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ équipé de la norme

$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|},$$

où $v \mapsto \|v\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ (par abus de notation nous utilisons la même notation pour la norme sur R^n et la norme matricielle sur V induite par cette norme). Démontrer les propositions suivantes :

i) Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $A \in V$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $\|A^k v\| \leq \|A\|^k \|v\|$, ainsi que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

ii) Pour toutes matrices $A, B \in V$ on a $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

iii) Pour toute matrice $X \in V$ telle que $\|X\| < 1$ on a $(1-X)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$, où par convention $X^0 = 1$ (matrice identité) et $\sum_{k=0}^{\infty} X^k := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} X^k$.

iv) Soit $A \in V$ une matrice inversible et $B \in V$ une matrice telle que $\|A^{-1}\|\,\|B - A\| < 1$. Alors B est inversible.

Ex. 3 - 7 au verso.

Exercice 3. (Théorème du point fixe)

Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction définie sur B telle que

i) $\varphi(B) \subset B$.

ii) $\forall x, y \in B \; \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \dfrac{1}{2}\|x - y\|$.

Montrer que pour tout choix de $x_0 \in B$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \varphi(x_{n-1})$ est de Cauchy et que ces suites convergent toutes vers l'unique solution dans B de l'équation $x = \varphi(x)$.

Exercice 4. (Dérivées d'intégrales avec paramètre)

Pour les fonctions $F\colon]1, \infty[\to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer la dérivée $F'(t)$.

i) $\displaystyle F(t) = \int_2^3 \frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)}\, dx$ *ii)* $\displaystyle F(t) = \int_t^{t^2} \ln(x^2 + t^2)\, dx$

Exercice 5. (Dérivées d'intégrales avec paramètre)

i) Soit la fonction $F\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\displaystyle F(t) = \int_{\sqrt{t}}^{1/t} \frac{\sin(\cos(tx))}{x}\, dx$. Calculer la dérivée $F'(t)$.

ii) Soit la fonction $F\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\displaystyle F(t) = \int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{e^{tx^3}}{x}\, dx$. Calculer $F'(1)$.

Exercice 6. (Fonctions implicites)

Vérifier que l'équation $F(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 et calculer la dérivée $f'(0)$.

i) $F(x, y) = 2x^3 - x^2y^4 + 2y^3 + 3x - 2$

ii) $F(x, y) = xe^y + ye^x + 2$

Exercice 7. (QCM : fonctions implicites)

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f\big(x, y, g(x, y)\big) = 11\,.$$

Sachant que $g(1, 3) = -2$, on a

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0$

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{12}{5}$

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{9}{2}$

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 11$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
2 mai 2025

Analyse avancée II – Série 9B

Échauffement. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit g une fonction de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$ et soit $f(x) = \int_0^1 g(x,t)\, dt$. Montrer que f est de classe $C^1\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$ et

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Exercice 1. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x \sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\, dt.$$

Montrer que f admet un minimum local en $x = 0$.

Exercice 2. (La fonction Gamma)

Soit la fonction $\Gamma\colon\ ]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Montrer :

i) $\Gamma \in C^1(\,]0, +\infty[\,, \mathbb{R})$ et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t}\, dt.$

ii) $\Gamma \in C^\infty(\,]0, +\infty[\,, \mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k\, t^{x-1} e^{-t}\, dt.$

iii) $\forall x \in\ ]0, +\infty[\,,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$ (par convention $0! = 1$).

Exercice 3. (Intégrales généralisées, procédure de "cut-off")

Montrer par la procédure qui suit qu'au sens des intégrales généralisées

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\ .$$

i) Montrer (par intégration par partie) que l'intégrale converge.

ii) Montrer que la fonction $f\colon\ ]0, \infty[\ \to \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \frac{\sin(t)}{t}\, dt,$ est de classe $C^1\,(]0, +\infty[\,, \mathbb{R})$ et que $I = \displaystyle\lim_{x \to 0+} f(x)$.

iii) Calculer la fonction $f'(x)$ et montrer (par intégration par partie) que $f'(x) = -1 - x^2 f'(x)$.

iv) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, de sorte que $I = -\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
1 mai 2025

Analyse avancée II – Série 10A

Échauffement 1. (Plan tangent, voir la série 7)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

Exercice 1. (Équation du plan tangent)

Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(x, y, z) = 0$ définit alors localement une surface. Déduire l'équation du plan tangent à cette surface en (x_0, y_0, z_0) par l'expression vue au § 6.2.2 du cours.

Exercice 2. (Plan tangent)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $xz^2 - 2x^2y + y^2z = 0$ aux points de la forme $(1, 1, z_0)$.

Échauffement 2. (Dérivée directionnelle)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}\,, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et soit $\boldsymbol{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ un vecteur unitaire. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0, 0)$.

Exercice 3. (Dérivée directionnelle, I)

Soient les fonctions $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (x - 2y)^2 \ln(1 + x^2 + y^2) \qquad \text{et} \qquad g(x, y) = \frac{e^{2x(y+1)}}{3 + x^2y^4}\,,$$

et soient le point $p_0 = (1, 1)$ ainsi que le vecteur $\boldsymbol{v} = (1, 2)^T$. Calculer les dérivées directionnelles de f et g en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$.

Exercice 4. (Dérivée directionnelle, II)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}\,, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et soit $\boldsymbol{e} = (u, v)^T$ un vecteur unitaire. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0, 0)$.

Ex. 5 - 9 au verso.

Exercice 5. (Pente extrémale)

Soit la fonction $f(x, y, z) = xyz$ et soit le point $p_0 = (1, -1, 2)$.

i) Trouver la dérivée directionnelle de f en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T$

ii) Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur unitaire exprimé en coordonnées sphériques, c.-à-d.

$$\boldsymbol{u} = \big(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\big)^T.$$

Calculer la pente de f en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$ en fonction de (θ, φ).

iii) Trouver les valeurs de θ et φ pour lesquelles la pente de f en p_0 est maximale respectivement minimale.

Exercice 6. (Approximation de Taylor dans $\mathbb{R}^3$)

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, une fonction de classe C^2 et soit $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Donner le développement limité *i*) linéaire et *ii*) quadratique de f au voisinage de (x_0, y_0, z_0).

Exercice 7. (Approximation de Taylor)

Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f au voisinage du point donné.

i) $f(x, y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1\,,\quad n = 2,\quad (x_0, y_0) = (0, 0)$

ii) $f(x, y, z) = e^x + y\sinh(z)\,,\quad n = 2,\quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

iii) $f(x, y) = 3xy + x^2 - y + 5x - 3\,,\quad n = 1,\quad (x_0, y_0) = (1, -2)$

iv) $f(x, y) = \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}+\sin(y)}\,,\quad n = 1,\quad (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

Pour *i*), vérifier que l'erreur est d'ordre $d^2 \cdot \varepsilon(x, y)$, où $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 8. (Approximation de Taylor)

Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction f au voisinage du point donné. Comparer avec la méthode de calcul par composition des développements limités.

i) $f(x, y, z) = e^{2xz+y}\,,\quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

ii) $f(x, y) = \sin(2x + y^2)\,,\quad (x_0, y_0) = (1, 1)$

Exercice 9. (QCM : révision limites et dérivées partielles)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
9 mai 202[illegible]

Analyse avancée II – Série 10B

Remarque : dans ce cours, des difféomorphismes sont par convention toujours de classe C^1.

Échauffement. (Théorème de la fonction réciproque)

Énoncer le théorème de la fonction réciproque (voir §5.4.3 du cours). Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continûment différentiable, strictement monotone et surjective, mais ne satisfait pas les conditions du théorème.

Exercice 1. (Théorème de la fonction réciproque)

Soit la fonction $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que F admet dans un voisinage du point $(1,0)$ une fonction réciproque, et que cette fonction réciproque locale est de classe C^1.

ii) Est-ce que F admet une fonction réciproque globale ?

Exercice 2. (Théorème de la fonction réciproque)

Soient $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts, et soient $\phi \in C^1(U,V)$ et $\psi \in C^1(V,W)$ deux difféomorphismes. Montrer que $\psi \circ \phi$ est un difféomorphisme.

Exercice 3. (Théorème de la fonction réciproque)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Par le théorème de la fonction réciproque il existent donc des voisinages $U \subset \mathbb{R}$ de x_0 et $V \subset \mathbb{R}$ de $f(x_0)$ et une fonction réciproque locale $g\colon V \to U$. Montrer que $g \in C^2(V,U)$.

Exercice 4. (Difféomorphismes et orientation)

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et $\psi\colon U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1. Si $\det(J_\psi)$ est strictement positif sur U on dit que ψ "préserve l'orientation", et si $\det(J_\psi)$ est strictement négatif sur U on dit que ψ "renverse l'orientation".

i) Montrer que si U est connexe par arc, alors soit ψ préserve l'orientation, soit ψ renverse l'orientation.

ii) Trouver des ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ qui ne sont pas connexes par arcs et un difféomorphisme $\psi\colon U \to V$ qui ne ni préserve ni renverse l'orientation.

Exercice 5. (Théorème des accroissements finis)

Démontrer l'inégalité du théorème des accroissements finis utilisée dans la démonstration du théorème d'inversion locale vu au cours (voir le paragraphe 5.4.7 du script), à savoir que

$$\|\varphi(\tilde{x}_1) - \varphi(\tilde{x}_2)\| \leq \frac{1}{2}\,\|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\| \;.$$

Analyse avancée II – Série 11A

Échauffement. (Extremums)

Déterminer les points stationnaires de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - y + 1$ et étudier leur nature.

Exercice 1. (Points stationnaires)

Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données ci-dessous, étudier la nature du point stationnaire $(0,0)$:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ *ii)* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *iii)* $f(x,y) = -x^2 + y^2$

iv) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ *v)* $f(x,y) = x^4 + y^4$ *vi)* $f(x,y) = x^4 - y^4$

vii) $f(x,y) = -x^4 + y^4$ *viii)* $f(x,y) = -x^4 - y^4$

Exercice 2. (Classification des points stationnaires)

i) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, soit (x_0, y_0) un point stationnaire de f et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$. Etablir la nature de (x_0, y_0) à partir de chacune des trois conditions sur λ_1, λ_2 vues au cours.

iii) Calculer les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ pour la fonction $f(x,y) = 4xy$ autour de son unique point stationnaire et en déduire sa nature.

Exercice 3. (Extremums, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

i) $f(x,y) = 2 + 3y^2 + \cos(x)$ *ii)* $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

iii) $f(x,y) = -3x^2 + xy^2 - y^4$

Exercice 4. (Extremums, $\mathbb{R}^3$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

i) $f(x,y,z) = -2x^2 - 5y^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 2$ *ii)* $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 4$

Exercice 5. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les extremums absolus de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

i) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$, où $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}$

ii) $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$, où $D = \{(x,y) : y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 32\}$

Indication : le polynôme qui apparaîtra admet certaines racines entières.

Ex. 6 - 8 au verso.

Exercice 6. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^3$)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z + 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x + 2\,.$$

Déterminer les extremums absolus de f sur le domaine

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c\}\,, \qquad \text{où}\ \ a, b, c > 0\,,$$

sachant que $f(0, 0, 0) = 3$.

Exercice 7. (Pentes extrémales)

Soient la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$, le point $p_0 = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$, ainsi que le vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$, donné en coordonnées sphériques (dans le référentiel local attaché en p_0) par

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La dérivée directionnelle de f en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$ est donnée par la fonction $g\colon [0, \pi] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$,

$$g(\theta, \varphi) = 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big) - \cos(\theta)$$

(cf. Ex. 3 de la Série 10). Trouver les extremums de g en calculant ses points stationnaires et calculer les vecteurs $\boldsymbol{u}$ associés. Comparer avec les résultats obtenus à la Série 10.

Exercice 8. (Dérivée (totale) et différentielle)

Soit V l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ équipé de la norme

$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|},$$

où $v \mapsto \|v\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ (par abus de notation nous utilisons la même notation pour la norme sur R^n et la norme matricielle sur V induite par cette norme). Soit la fonction $f\colon V \to V$ définie pour $X \in V$ par $f(X) = X^2$.

i) Montrer que f est différentiable en tout point $X_0 \in V$.

ii) Trouver la différentielle de f.

Exercice 9. (Norme d'une intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$)

Soient $I = [a, b]$, $a < b$, un intervalle fermé, $m \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon I \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Montrer que pout toute norme sur $\mathbb{R}^m$,

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\ dt\,,$$

où par définition l'intégrale de f est le vecteur des intégrales des composantes de f.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
16 mai 2025

Analyse avancée II – Série 11B

Échauffement. (Théorème des fonctions implicites)
Énoncer le théorème des fonctions implicites pour une équation de la forme $F(x, y) = 0$, où F est une fonction de de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exercice 1. (Théorème des fonctions implicites)
Soit le système d'équations

$$\begin{aligned} x - y^3 + z + 8 &= 0, \\ x^3 + y^4 - z^5 - 16 &= 0. \end{aligned}$$

i) Montrer que ces équations définissent, au voisinage du point $x = 0$, d'une manière implicite, deux fonctions $y = f_1(x)$ et $z = f_2(x)$, telles que $(f_1(0), f_2(0)) = (2, 0)$.

ii) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ pour chacune des deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

iii) Quelles autres fonctions implicites les équations définissent-t-elles ?

(a) $x = f_3(y)$ et $z = f_4(y)$ au voisinage de $y = 2$, avec $(f_3(2), f_4(2)) = (0, 0)$?
(b) $x = f_5(z)$ et $y = f_6(z)$ au voisinage de $z = 0$, avec $(f_5(0), f_6(0)) = (0, 2)$?

Exercice 2. (Théorème des fonctions implicites)
Soit l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \ln\left(\frac{\sqrt{1 + x + z}}{3z}\right) + \ln\left(\sqrt[3]{y^2 + z^3}\right) = 0.$$

i) Montrer que cette équation définit, dans un voisinage du point $(x, y) = (1, 0)$, une fonction implicite $z = f(x, y)$ telle que $f(1, 0) = 7$.

ii) Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(1, 0, 7)$.

Exercice 3. (Théorème des fonctions implicites)
Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$F\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2 + w_1^2 \\ e^{u_1} - 1 + u_2 + w_2 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que $F(0, 0) = 0$ et que $F \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

ii) Soit $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en $w \equiv (w_1, w_2) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $f \in C^1(B(0, \varepsilon), \mathbb{R}^2)$ telle que, $\forall w \in B(0, \varepsilon)$, $F(f(w), w) = 0$.

iii) Calculer $f'(0)$.

EPFL
Section PH

Peter Wittwer
15 m[illegible] 202[illegible]

Analyse avancée II – Série 12A

Échauffement. (Volume et surface d'un cylindre)

Utiliser les deux méthodes vues au cours pour déterminer le rayon r et la hauteur h qui maximisent le volume V d'un cylindre de surface S donnée.

Exercice 1. (Extremums liés)

Trouver les valeurs maximale et minimale des fonctions suivantes sous les contraintes données.

i) $f(x,y) = x^3 + y^3, \quad x^4 + y^4 = 32$

ii) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x - y = 1$

Exercice 2. (Extremums liés)

Trouver les points de cote z maximale et minimale sur la surface $4x^2+3y^2+3z^2+2yz-4x = 1$.

Exercice 3. (Extremums absolus)

i) Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$ sur le disque fermé $x^2 + y^2 \leq 32$.
Comparer les résultats avec l'Ex. 5 *ii)* de la Série 11.

ii) Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - \frac{5}{4}$ sur la boule fermée $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Exercice 4. (Un peu de géométrie, I)

i) Déterminer parmi les triangles rectangles ayant la même aire A, celui qui a la plus petite hypothénuse.

ii) Le cône $z^2 = x^2 + y^2$ est coupé par le plan $z = 1 + x + y$. Trouver le point qui se trouve dans l'intersection du cône et du plan et qui est le plus près de l'origine.

Exercice 5. (Un peu de géométrie, II)

Trouver les axes de l'ellipse déterminée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et du plan d'équation $x + y + 2z = 2$.

Exercice 6. (Un peu de géométrie, III)

Déterminer les points $P \in \{(x,y) : x + 2y \geq 8\}$ et $Q \in \left\{(x,y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ pour lesquels la distance de P à Q est minimale.
Donner une justification géométrique à votre réponse.

Ex. 7 au verso.

Exercice 7. (QCM : révision équations différentielles)

Q1 : Soit l'équation différentielle $y'\,(y+x^2y) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$. Alors la solution $y(x)$ vérifie

- ☐ $y(1) = \sqrt{4 + 2\,\ln(2)}$
- ☐ $y(1) = 2 + \sqrt{\ln(2)}$
- ☐ $y(1) = \sqrt{4 + \ln(2)}$
- ☐ $y(1) = -\sqrt{4 + \ln(2)}$

Q2 : Soit l'équation différentielle $y' \sin(x) + y \cos(x) + \sin(2x) = 0$ pour $x \in \,]0, \pi[\,$. Alors la solution générale est

- ☐ $y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \frac{\cos(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\cos(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = e^{-\ln(\sin(x))} \cos(2x) + \frac{C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Q3 : Soit l'équation différentielle $x\,y' - y = x\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$ pour $x \in \,]0, \infty[\,$ avec $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Alors

- ☐ $y(x) = x \arctan\big(\ln(x) + 1\big)$
- ☐ $y(x) = x \arctan\big(\frac{1}{x^2}\big)$
- ☐ $y(x) = \frac{1}{x} \arctan\big(\ln(x) + 1\big)$
- ☐ $y(x) = x \arctan\big(\ln(x)^2 + 1\big)$

Rappel : effectuer le changement de variables $y(x) = x\,v(x)$.

Exercice 8. (Dérivée directionnelle et nature d'un point)

Soit la fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1\,, \\ 0 & \text{si } |x| > 1\,, \end{cases}$$

la fonction $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\rho(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, et la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) + 2x\,h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right) & \text{si } x > 0\,, \\ \rho(x, y) & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Montrer que pour tout vecteur unitaire $\mathbf{e}$ la dérivée directionnelle unilatérale de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\mathbf{e}$ vaut -1, mais que f n'admet pas de maximum local en $(0, 0)$.

Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 12B

Exercice 1.

Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{(x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}}$. Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = y$
- ☐ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0$
- ☐ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 1$
- ☐ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)$ n'existe pas

Exercice 2.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + xy\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors

- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$

Exercice 3.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$. Alors $\displaystyle\int_D \frac{\tan(y)}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy > 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Ex. 4 - 31 sur les pages suivantes.

Exercice 4.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \big(\cos(xz),\, \sin(y-z)\big)^{\mathrm{T}}$. Alors la matrice jacobienne $J_f(x,y,z)$ de f évaluée au point $\mathbf{p} = \big(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ est :

- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

Soit $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $h(u,v) = \big(-u(1-2v),\, u^2(1-v),\, uv\big)^{\mathrm{T}}$ et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe C^1. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(u,v) = g\big(h(u,v)\big)$, satisfait en $(u,v) = (1,0)$:

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0,0) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = -\dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) + 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$

Exercice 6.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x - y - x^2 + y^3$ et soit le point $\mathbf{p} = (-2,1)$. Alors le plan tangent au graphe de f en $\big(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})\big)$ est donné par l'équation :

- ☐ $z - 5x - 2y + 6 = 0$
- ☐ $z - 5x - 2y - 2 = 0$
- ☐ $z - 5x - 2y - 8 = 0$
- ☐ $z - 2x - 5y + 7 = 0$

Exercice 7.

L'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$ est fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 8.

Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = e^{x^2+y-1}$$

au point $(1,0)$ est :

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 6(x-1)^2 + 4(x-1)y + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = -1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \dfrac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \dfrac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \dfrac{1}{2}y^2$

Exercice 9.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 2x^2y^3z^4 + 2x^3y^2 - 3y^2z - 1$ et soit $\mathbf{p} = (1,1,1)$. Puisque $f(\mathbf{p}) = 0$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \neq 0$, l'équation $f\big(x,y,z\big) = 0$ définit dans un voisinage de $(y,z) = (1,1)$ une fonction $x = g(y,z)$ qui satisfait $g(1,1) = 1$ et $f\big(g(y,z),y,z\big) = 0$ ainsi que :

- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -2$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\dfrac{4}{5}$

Exercice 10.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 1 \text{ et } y > -1\}$ et soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \ln\big(x^2+y\big)$. Alors un vecteur $\boldsymbol{v}$ dans la direction perpendiculaire à la ligne de niveau de f qui passe par le point $(2,0)$ est :

- ☐ $\boldsymbol{v} = (-4,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (1,-4)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (4,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(-\frac{1}{4},-1\big)^{\mathrm{T}}$

Exercice 11.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1$. Alors le point $\mathbf{p} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

- ☐ est un point de maximum local de f
- ☐ n'est pas un point stationnaire de f
- ☐ est un point selle de f
- ☐ est un point de minimum local de f

Exercice 12.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$. La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est :

- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ 0
- ☐ $-\sqrt{2}$

Exercice 13.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = y + 2x$. Alors le maximum absolu $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D et le minimum absolu $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D satisfont :

- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = 0$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -1$
- ☐ $M = 1$ et $m = -1$

Exercice 14.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\,,\ y \geq 0\,,\ x \leq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D x\,y\,dx\,dy$$

vaut :

- ☐ 3π
- ☐ 30
- ☐ -30
- ☐ 0

Exercice 15.

La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u''-4u'+5u = 8\sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est :

- ☐ $u(t) = -\sin(t)\big(2e^{2t}+1\big) + \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t}+1\big) + \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(4e^{2t}-1\big) + \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t}+1\big) - \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$

Exercice 16.

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $(x^2+9)\,y' + x\,y - x\,y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{4}$ satisfait aussi :

- ☐ $y(4) = 6$
- ☐ $y(4) = 1$
- ☐ $y(4) = \frac{1}{6}$
- ☐ $y(4) = -\frac{1}{4}$

Exercice 17.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx$$

est égale à :

- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\,dx\right)dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$

Exercice 18.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles ouverts et $f : A \to B$ une fonction bijective avec f et f^{-1} de classe C^1. Alors pour tout $\boldsymbol{p} \in A$ on a $\det(J_f(\boldsymbol{p})) \neq 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 19.

Soient p, q et g des fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et soit $L(u) = u'' + p\,u' + q\,u$. Si u_h est solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ et u_p est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$, alors $u_p + \frac{1}{2}u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 20.

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $\varphi \in \left[0, 2\pi\right[$ fixé on a $\lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = 1$, alors f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 21.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$ pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 22.

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 23.

Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction $h = g \circ f$ est de classe C^1 et on a pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ que $J_h(\mathbf{p}) = J_g\big(f(\mathbf{p})\big)\, J_f(\mathbf{p})$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 24.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction de classe C^2. Alors pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 25.

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en $\mathbf{p}$, alors $\mathbf{p}$ est un point stationnaire de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 26.

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{p}$ est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $H_f(\mathbf{p})$ est strictement négatif, alors f admet un maximum local en $\mathbf{p}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 27.

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$, une fonction qui est différentiable en un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur $\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), -\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), -\dfrac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}),\, 1\right)^{\mathrm{T}}$ est perpendiculaire à l'hyperplan tangent au graphe de f en $\big(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})\big)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 28.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble borné et fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé. Si $G\colon \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 alors on a :

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} f\big(G(u,v)\big)\,\big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\,du\,dv$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 29.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (1,1)^{\mathsf{T}}$ est égale à la limite :

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 30.

Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné et fermé. Si f n'admet pas de maximum absolu sur D, alors f n'est pas continue sur D.

☐ VRAI ☐ FAUX

Analyse avancée II – Série 13A

Échauffement. (Intégration sur un rectangle)

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dx \right) dy$ en intégrant d'abord

i) par rapport à x,

ii) par rapport à y.

Comparer les résultats.

Exercice 1. (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 \cos(x+y)\, dx \right) dy$ *ii*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{x+y}\, dy \right) dx$

Exercice 2. (Intégration sur un domaine)

Calculer l'intégrale (double) $\displaystyle\int_D f(x,y)\, dx\, dy$ et esquisser le domaine d'intégration D si

i) $f(x,y) = \sqrt{x+y}\,,\qquad D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$

ii) $f(x,y) = x^2 y\,,\qquad D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2\}$

iii) $f(x,y) = |(x-y)(x+y-2)|\,,\qquad D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x,\ x+y-2 \leq 0\}$

Exercice 3. (Ordre d'intégration)

Évaluer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)}\, dx \right) dy$ *ii*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \right) dy$

Exercice 4. (Décomposition du domaine)

Esquisser le domaine $D = \{(x,y) : y^2 \leq x,\ x-6 \leq y \leq x\}$ et calculer son aire.

Ex. 5 - 8 au verso.

Exercice 5. (Changement de variables)

Soient les domaines $D, \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soient $G \colon \widetilde{D} \to D$ et $H \colon D \to \widetilde{D}$ des applications bijectives telles que $G = H^{-1}$ et notons

$$G(u,v) = \big(G_1(u,v), G_2(u,v)\big) \qquad \text{et} \qquad H(x,y) = \big(H_1(x,y), H_2(x,y)\big).$$

i) Donner la formule générale du changement de variables pour calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ en intégrant sur le domaine $\widetilde{D}$.

ii) Dans le cas des coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, définir l'application G et calculer son Jacobien. Calculer aussi le Jacobien de H.

iii) Calculer l'aire du disque $D_R \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$, $R > 0$, par une intégrale double.

Exercice 6. (Comparaison de méthodes)

Calculer l'aire du parallélogramme représenté à la Fig. 1 d'abord sans et ensuite avec changement de variables. Un changement de variables vous semble-t-il utile dans ce cas?

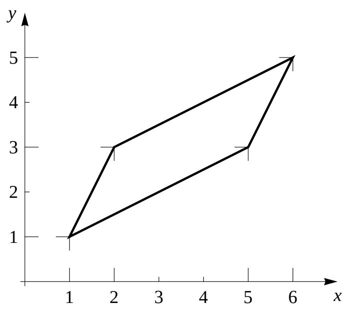


Fig. 1

Exercice 7. (Changement de variables)

i) Évaluer l'intégrale double

$$\int_D x^3 y^3\,dx\,dy\,,$$

où D est le domaine dans le premier quadrant limité par les courbes $x^2+y^2=5\,,\ x^2+y^2=9\,,\ x^2-y^2=1$ et $x^2-y^2=4\,.$

Esquisser les quatre courbes et le domaine d'intégration D.

ii) Esquisser le domaine $D = \{(x,y) : 0 \le x \le y \le 4x,\ 1 \le xy \le 2\}$ et calculer l'intégrale double

$$\int_D x^2\,y^2\,dx\,dy\,.$$

Exercice 8. (Changement de variables)

Évaluer l'intégrale double

$$\int_D \big(x^5 y + y^5 x\big)\,dx\,dy\,,$$

où D est le domaine dans le premier quadrant, limité par les courbes $x^2+y^2=3\,,\ x^2+y^2=4\,,\ x^2-y^2=1$ et $x^2-y^2=2\,.$

Analyse avancée II – Série 14A

Échauffement. (Volume de la sphère)

Calculer le volume d'une sphère de rayon R en coordonnées sphériques et cylindriques.

Exercice 1. (Calcul de volume)

Déterminer le volume du solide délimité par la surface cylindrique $x^2 + z^2 = 1$ et les plans $x + y + z = 1$, $2y - z = 6$ et $z = 0$ tel que $z \geq 0$.

Exercice 2. (Calcul de volume)

Soit D le domaine délimité par l'extérieur du cône d'équation $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}z - 3\right)^2$ et l'intérieur de la sphère de rayon 5 centrée en $(0, 0, 1)$ (cf. Fig. 1). Calculer le volume de D.

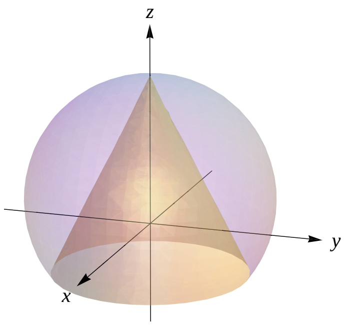


Fig. 1

Exercice 3. (Masse totale)

Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1,\ y \leq z \leq 1\}.$$

Calculer la masse totale de D, si la densité de masse $\rho\colon D \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\rho(x, y, z) = z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}}.$$

Exercice 4. (Centre de gravité I) Pour le domaine D représenté à la Fig. 2 ci-dessous, déterminer le centre de gravité G si la densité de masse $\rho\colon D \to \mathbb{R}$ est $\rho(x, y, z) = 4x^2$.

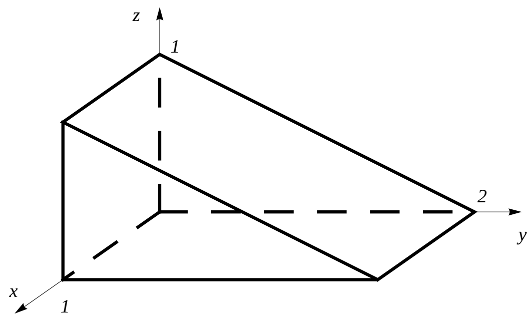


Fig. 2

Exercice 5. (Centre de gravité II)

Trouver la coordonnée z du centre de gravité du secteur sphérique représenté à la Fig. 3 ci-dessous en supposant que la densité de masse est proportionnelle à la distance à l'origine.

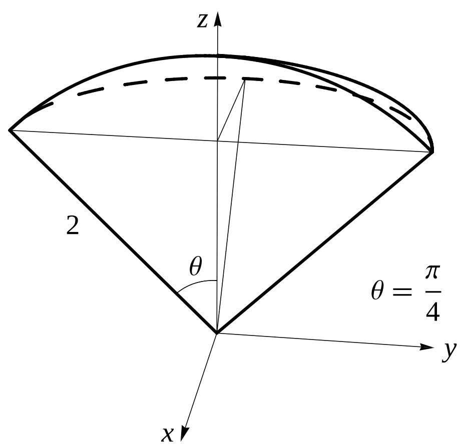


Fig. 3

Exercice 6. (Intégrale sur un tore)

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\int_D z^2\, dx\, dy\, dz$ où D est le tore solide engendré par la rotation du cercle $(x-a)^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$ $(0 < b < a)$ autour de l'axe z.

Exercice 7. (Exponentielle d'une matrice)

i) Trouver l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Trouver la solution $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^\top$ du problème de Cauchy $y' = Ay$, $y(0) = (1,1)^\top$.