Analyse avancée II – Corrigé de la série 4B

Échauffement. (Linéarité)

i) Soit $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(x)\,(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(x)\,(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1'' + \beta y_2'') + p(x)\,(\alpha y_1' + \beta y_2') + q(x)\,(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\,(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \beta\,(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = \alpha r(x) + \beta r(x) = (\alpha + \beta)r(x) = r(x)$.

ii) Soit $y = y_1 - y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (y_1 - y_2)'' + p(x)\,(y_1 - y_2)' + q(x)\,(y_1 - y_2) = (y_1'' - y_2'') + p(x)\,(y_1' - y_2') + q(x)\,(y_1 - y_2) = (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) - (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = r(x) - r(x) = 0$.

iii) Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène et soit $y = c_1y_1 + c_2y_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(x)\,(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(x)\,(c_1y_1 + c_2y_2) = (c_1y_1'' - c_2y_2'') + p(x)\,(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)\,(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\,(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2\,(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = c_1\,0 + c_2\,0 = 0$.

Exercice 1. (Réduction de l'ordre)

Toute solution d'une équation différentielle linéaire est définie sur l'intervalle I sur lequel les fonctions p et q sont continues (voir le cours). Ceci dit, il se peut que la fonction U de la méthode des facteurs intégrant ne soit pas définie en les points où la solution y_1 s'annule (voir l'exemple du point *ii)*). Le produit $U\,y_1$ pourra néanmoins être définie sur tout I par prolongement par continuité (et sera de classe C^2 sur I).

i) Supposons que $J \subset I$ est un intervalle sur lequel y_1 ne s'annule pas et soit $y = U\,y_1$ une solution sur J. Alors $y' = u\,y_1 + U\,y_1'$ et $y'' = u'\,y_1 + 2u\,y_1' + U\,y_1''$, et on obtient $y'' + p(x)y' + q(x)y = u'\,y_1 + 2u\,y_1' + U\,y_1'' + p(x)\,(u\,y_1 + U\,y_1') + q(x)U\,y_1 = U\,\,(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + u\,\,(2y1' + p(x)y_1) + u'\,y_1 = 0$. Puisque y_1 est une solution de l'équation ceci se réduit à l'équation différentielle du premier ordre pour u :

$$y_1(x)u' + (p(x)y_1(x) + 2y_1'(x))\,u = 0,$$

ou encore (sur tout intervalle $J \subset I$, tel que $\forall x \in J$, $y_1(x) \neq 0$),

$$u' + \left(p(x) + 2\,\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)u = 0.$$

ii) On pose $y(x) = U(x)\sin(x)$ et l'on obtient l'équation

$$\sin(x)u' + 2\cos(x)u = 0,$$

qu'il faut résoudre sur les intervalles ouverts où $\sin(x)$ ne s'annule pas. Par séparation des variables on trouve (on écrira pas les constantes multiplicatives arbitraires)

$$u(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2}$$

puis on intègre pour obtenir

$$U(x) = \cot(x)$$

et donc la deuxième solution $\cos(x) = \cot(x)\sin(x)$. On voit bien que la fonction $U(x) = \cot(x)$ n'est pas définie en les point où $\sin(x)$ s'annule, mais que le produit $\cos(x) = \cot(x)\sin(x)$ est néanmoins définit (et de classe C^2) sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (Deuxième ordre à coefficients constants)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay''+by'+cy = 0$.

i) De l'équation caractéristique $a\lambda^2+b\lambda+c = 0$ on obtient une première solution $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$ (cas où $b^2 - 4ac = 0$). On pose $y_2 = U\, y_1$, avec U une primitive d'une nouvelle fonction inconnue u. Pour u on obtient l'équation (voir Exercice 1.),

$$au' + \left(b + 2a\,\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)u = au' + \big(b + 2a\,\lambda\big)u = 0,$$

et donc, puisque $b+2a\,\lambda = 0$, $u' = 0$. Donc $u = 1$ (ou n'importe quelle autre constante non nulle), et donc $U(x) = x$ (par exemple) et une deuxième solution est donc $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$.

ii) C'est le cas ou l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées, $\lambda = \alpha+i\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ ce qui donne deux solutions complexes conjugués $\mathrm{e}^{\lambda x}$ et $\mathrm{e}^{\overline{\lambda} x}$. Pour obtenir une solution réelle on pose $C = \frac{1}{2}\,(C_1 - i\,C_2)$, avec C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \overline{C}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda} x} = \frac{1}{2}\,(C_1 - i\,C_2)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}\,(C_1 + i\,C_2)\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= C_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}$$

Exercice 3. (Wronskien)

Soient p, q et r des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Remarque : nous donnons ici pour le point ii) des arguments basés uniquement sur l'équation différentielle satisfaite par le Wronskien et le théorème d'existence et d'unicité pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est conseillé de revenir sur ce point une fois que nous aurons vu le théorème d'existence et d'unicité pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

i) S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $y_1(x) = c\,y_2(x)$ alors $\forall x \in I$, $w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = c \cdot 0 = 0$.

ii) On a $w' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = -y_1\,(p(x)y_2' + q(x)y_2) + (p(x)y_1' + q(x)y_1)\,y_2 = -p(x)w$ et donc

$$w(x) = c\,\mathrm{e}^{-P(x)},$$

avec P une primitive de p et c une constante. Par le théorème d'existence et d'unicité cette solution est unique et le Wronskien est donc ou bien non-nul ou identiquement nul sur I (théorème d'Abel), et puisque par hypothèse $w(x_0) = 0$ on trouve que $\forall x \in I$,

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 0.$$

Ceci est une équation différentielle du premier ordre pour y_2 donné y_1 (ou vice-versa). Il faut considérer plusieurs cas.

(a) $\forall x \in I$, $y_1(x) = 0$. Alors les fonction y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

(b) $\forall x \in I$, $y_1'(x) = 0$, c'est-à-dire y_1 est une fonction constante non nulle sur I. Alors l'équation différentielle pour y_2 se réduit à $\forall x \in I$, $y_2'(x) = 0$. La fonction y_2 est alors aussi constante et les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

(c) Il existe $x_1 \in I$ tel que $y_1'(x_1) \neq 0$. Alors, par le théorème d'existence et d'unicité on a que $y_2(x) = (y_2'(x_1))\,/y_1'(x_1)y_1(x)$, car ceci est une solution de l'équation différentielle pour y_2 et c'est l'unique solution telle que $y_2(x_1) = (y_2'(x_1)/y_1'(x_1))\,y_1(x_1)$. Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

iii) Par le théorème d'existence et d'unicité[1] il existent des solutions y_1 et y_2 telles que pour un $x_0 \in I$ $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$ et $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$. Vu que $w(x_0) = 1 \neq 0$ les deux solutions sont linéairement indépendantes et la dimension de l'espace vectoriel est donc au moins deux. Soit y_3 une autre solution et soit la combinaison linéaire suivante de y_1 et y_2 : $y = y_3(x_0)y_1 + y_3'(x_0)y_2$. On a $y(x_0) = y_3(x_0)$ et $y'(x_0) = y_3'(x_0)$ et donc $y_3 = y$ par l'unicité[1] des solutions. La dimension de l'espace des solutions est donc deux.

[1]Nous anticipons ici le théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles d'ordre n pour lesquelles une condition initiale est spécifiée en se donnant $y(x_0)$, ..., $y^{n-1}(x_0)$.