

Analyse avancée II – Corrigé de la série 4B

Échauffement. (Linéarité)

- i) Soit $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1'' + \beta y_2'') + p(x)(\alpha y_1' + \beta y_2') + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \beta(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = \alpha r(x) + \beta r(x) = (\alpha + \beta)r(x) = r(x)$.
- ii) Soit $y = y_1 - y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2) = (y_1'' - y_2'') + p(x)(y_1' - y_2') + q(x)(y_1 - y_2) = (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) - (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = r(x) - r(x) = 0$.
- iii) Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène et soit $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$.

Exercice 1. (Réduction de l'ordre)

Toute solution d'une équation différentielle linéaire est définie sur l'intervalle I sur lequel les fonctions p et q sont continues (voir le cours). Ceci dit, il se peut que la fonction U de la méthode des facteurs intégrant ne soit pas définie en les points où la solution y_1 s'annule (voir l'exemple du point ii)). Le produit $U y_1$ pourra néanmoins être définie sur tout I par prolongement par continuité (et sera de classe C^2 sur I).

- i) Supposons que $J \subset I$ est un intervalle sur lequel y_1 ne s'annule pas et soit $y = U y_1$ une solution sur J . Alors $y' = u y_1 + U y_1'$ et $y'' = u' y_1 + 2u y_1' + U y_1''$, et on obtient $y'' + p(x)y' + q(x)y = u' y_1 + 2u y_1' + U y_1'' + p(x)(u y_1 + U y_1') + q(x)U y_1 = U(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + u(2y_1' + p(x)y_1) + u' y_1 = 0$. Puisque y_1 est une solution de l'équation ceci se réduit à l'équation différentielle du premier ordre pour u :

$$y_1(x)u' + (p(x)y_1(x) + 2y_1'(x))u = 0,$$

ou encore (sur tout intervalle $J \subset I$, tel que $\forall x \in J, y_1(x) \neq 0$),

$$u' + \left(p(x) + 2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)u = 0.$$

- ii) On pose $y(x) = U(x) \sin(x)$ et l'on obtient l'équation

$$\sin(x)u' + 2 \cos(x)u = 0,$$

qu'il faut résoudre sur les intervalles ouverts où $\sin(x)$ ne s'annule pas. Par séparation des variables on trouve (on écrira pas les constantes multiplicatives arbitraires)

$$u(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2}$$

puis on intègre pour obtenir

$$U(x) = \cot(x)$$

et donc la deuxième solution $\cos(x) = \cot(x) \sin(x)$. On voit bien que la fonction $U(x) = \cot(x)$ n'est pas définie en les point où $\sin(x)$ s'annule, mais que le produit $\cos(x) = \cot(x) \sin(x)$ est néanmoins défini (et de classe C^2) sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (Deuxième ordre à coefficients constants)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$.

- i) De l'équation caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ on obtient une première solution $y_1(x) = e^{\lambda x}$ avec $\lambda = -\frac{b}{2a}$ (cas où $b^2 - 4ac = 0$). On pose $y_2 = U y_1$, avec U une primitive d'une nouvelle fonction inconnue u . Pour u on obtient l'équation (voir Exercice 1.),

$$au' + \left(b + 2a \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)u = au' + (b + 2a\lambda)u = 0,$$

et donc, puisque $b + 2a\lambda = 0$, $u' = 0$. Donc $u = 1$ (ou n'importe quelle autre constante non nulle), et donc $U(x) = x$ (par exemple) et une deuxième solution est donc $y_2(x) = xe^{\lambda x}$.

- ii) C'est le cas où l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées, $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ce qui donne deux solutions complexes conjuguées $e^{\lambda x}$ et $e^{\bar{\lambda}x}$. Pour obtenir une solution réelle on pose $C = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2)$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C e^{\lambda x} + \bar{C} e^{\bar{\lambda}x} = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{aligned}$$

Exercice 3. (Wronskien)

Soient p, q et r des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

- i) S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, y_1(x) = c y_2(x)$ alors $\forall x \in I, w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = c \cdot 0 = 0$.
- ii) On a $w' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = -y_1(p(x)y_2' + q(x)y_2) + (p(x)y_1' + q(x)y_1)y_2 = -p(x)w$ et donc

$$w(x) = c e^{-P(x)},$$

avec P une primitive de p et c une constante. Par le théorème d'existence et d'unicité cette solution est unique et le Wronskien est donc ou bien non-nul ou identiquement nul sur I (théorème d'Abel), et puisque par hypothèse $w(x_0) = 0$ on trouve que $\forall x \in I$,

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 0.$$

Montrons que l'hypothèse $w(x_0) = 0$ implique aussi que les deux solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes. Si $w(x_0) = 0$, les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants, ce qui veut dire qu'il existent des nombres réels c_1 et c_2 , tels que

$$\begin{aligned}c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0, \\c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0.\end{aligned}$$

Soit la fonction $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Comme combinaison linéaire des deux solutions y_1 et y_2 cette fonction satisfait notre équation différentielle du deuxième ordre. De plus on a par définition de c_1 et c_2 que $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$ et donc, par le théorème d'existence et d'unicité¹, que $\forall x \in I$, $y(x) = 0$, ce qui veut dire que les deux solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

iii) Par le théorème d'existence et d'unicité¹ il existent des solutions y_1 et y_2 telles que pour un $x_0 \in I$ $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$ et $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$. Vu que $w(x_0) = 1 \neq 0$ les deux solutions sont linéairement indépendantes et la dimension de l'espace vectoriel est donc au moins deux. Soit y_3 une autre solution et soit la combinaison linéaire suivante de y_1 et y_2 : $y = y_3(x_0)y_1 + y_3'(x_0)y_2$. On a $y(x_0) = y_3(x_0)$ et $y'(x_0) = y_3'(x_0)$ et donc $y_3 = y$ par l'unicité¹ des solutions. La dimension de l'espace des solutions est donc deux.

¹Nous anticipons ici le théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles d'ordre n pour lesquelles une condition initiale est spécifiée en se donnant $y(x_0)$, ..., $y^{n-1}(x_0)$.