

Analyse avancée II.

Section : PH

EPFL, printemps 2025

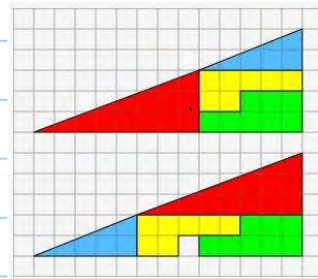
Manuscrit : Peter Wittwer

Prérequis

Analyse avancée I (note suffisante)

Algèbre linéaire avancée I (note suffisante)

+ esprit critique



Curry's
paradox.

+ logique sans faille.



Mix et
Remix

1. Equations différentielles, méthodes de résolution

Prérequis:

- méthodes d'intégration
- fonctions de classe C^1
- restriction d'une fonction

Motivation: physique, économie, biologie

1.1. Introduction, motivation, exemples

Une équation différentielle (ordinaire) est une expression de la forme

$$E(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (*)$$

↖ n-ème dérivée de la fonction y

La donnée du problème est une fonction

$$E: \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi_1, \dots, \xi_{n+2}) \longmapsto E(\xi_1, \dots, \xi_{n+2})$$

pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche un intervalle ouvert
 $I =]a, b[$, $a < b$ et une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{R}$
 de classe $C^n(I)$, de sorte que l'équation (*)
 soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Notation: pour simplifier la notation on écrit souvent

$$E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (*-*)$$

au lieu de (*) et, par abus de notation, on écrit de même $E(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ pour (la valeur de) la fonction E en un point $(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv (\xi_1, \dots, \xi_{n+2})$ donné de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Remarque: la notion "ordinaire" veut dire que la fonction recherchée est une fonction d'une seule variable réelle. Les équations différentielles aux dérivées partielles font intervenir des fonctions inconnues de plusieurs variables.

Acronymes: ED ou EDO (ODE en anglais)
EDP (PDE en anglais)

Définition: si la donnée E est une fonction non-constante de $\mathbb{E}_{n+2}$ ("E dépend de $y^{(n)}$ ") on dit que l'équation est d'ordre n

Définition: si la donnée E est une fonction constante de $\mathbb{E}_1$ ("E ne dépend pas de x ") l'équation est dite autonome sinon non autonome

Exemples

i) $E(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2) = \mathbb{E}_2$
 $y(x) = 0$

$n=0$, pas une ED

ii) $E(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3) = \mathbb{E}_3$
 $y'(x) = 0$

$n=1$ (premier ordre)
autonome.

iii) $E(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3) = \sin(\mathbb{E}_1) \mathbb{E}_3 - \sin(\mathbb{E}_2)$
 $\sin(x) y'(x) - \sin(y(x)) = 0$

$n=1$
non autonome

Exemples avec notation simplifiée

iv) $y''' + y'' + y' + y + \sin(x) = 0$

$n=3$

non autonome

(continue)

v) $y'' = F(y)$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

équation de Newton
(d'un point de masse dans $\mathbb{R}$)

Exemples de solutions (avec la notation simplifiée)

$$y' = 0 \quad \text{solutions} \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad y(x) = C, \quad x \in \mathbb{R} = I$$

$$y' - 1 = 0 \quad \text{solutions} \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad y(x) = x + C, \quad x \in \mathbb{R} = I$$

$$y' - e^x = 0 \quad \text{solutions} \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R} = I$$

$$y' - f(x) = 0 \quad \text{solutions} \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad y(x) = F(x) + C, \quad x \in]a, b[$$

$$\Leftrightarrow y' = f(x)$$

une primitive de f
avec f continue sur $]a, b[$.

Voir aussi la série OA, échauffement.

A propos la série OA: "typologie" des équations; les solutions sont données. Vérifier que les fonctions données satisfont l'équation.

Remarque: soit y une solution d'une ED sur $]a, b[$, et $]c, d[\subset]a, b[, c < d$. Alors la restriction de y à $]c, d[$ est aussi une solution.

Définition: on dit qu'une solution est maximale si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle plus grand.

Définition: la solution générale d'une ED est l'ensemble des solutions maximales de l'équation. Résoudre une ED revient à trouver la solution générale.

merci de regarder !

5

Plus d'exemples

$$A: y' = y$$

$$C: y'' = y$$

$$F: y' = y + 1$$

$$G: y' = -xy$$

$$B: y' = -y$$

$$D: y'' = -y$$

$$H: y' + \frac{1}{x}y = 0, x \in \mathbb{R}^*$$

Solutions (dans ce qui suit $I = \mathbb{R}$ sauf si indiqué autrement et $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.)

$$A: y(x) = C \cdot e^x$$

$$B: y(x) = C \cdot e^{-x}$$

$$C: y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} \quad \text{ou} \quad C_1 \cdot \sinh(x) + C_2 \cdot \cosh(x)$$

$$D: y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

$$F: y(x) = -1 + C \cdot e^x$$

$$G: y(x) = C e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

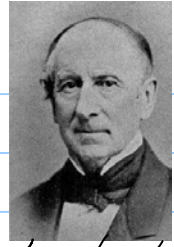
$$H: y(x) = \frac{C}{x}, x \in]-\infty, 0[\equiv (-\infty, 0)$$

$$y(x) = \frac{C}{x}, x \in]0, \infty[\equiv (0, \infty)$$

notations équivalentes

Constat: la solution d'une ED d'ordre n n'est typiquement pas unique. Elle dépend typiquement de n paramètres.

Le problème de Cauchy



Augustin-Louis Cauchy
1789 - 1857

Exemple 1

$$\underbrace{y' = y}_{ED}$$

$$\underbrace{y(0) = 1}_{CI}$$

(condition initiale)

problème de Cauchy

Solution générale de l'ED: $\forall C \in \mathbb{R}, y(x) = C \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$

La solution du problème de Cauchy, c'est-à-dire la solution qui satisfait $y(0) = 1$ est celle avec $C = 1$

$$y(0) = C \cdot e^0 = C \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow C = 1$$

Exemple 2:

$$y'' = -y$$

ED

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

CI

le même point x !

problème de Cauchy

Solution générale: $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x), x \in \mathbb{R}$

$$y(0) = C_2 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$y'(0) = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

La solution du problème de Cauchy donnée est: $y(x) = \cos(x)$

1.2. Equations différentielles du premier ordre

$$E(x, y, y') = 0$$

1.2.1. Séparation des variables

Une ED est dite à variables séparées, si on peut l'écrire sous la forme

$$E(x, y, y') = g(x) - f(y) \cdot y' = 0 \quad (*)$$

pour certaines fonctions f et g .

1.2. Equations différentielles du premier ordre

$$E(x, y, y') = 0$$

1.2.1. Séparation des variables

Une ED est dite à variables séparées, si on peut l'écrire sous la forme

$$E(x, y, y') = g(x) - f(y) \cdot y' = 0 \quad (*)$$

pour certaines fonctions f et g .

Résolution de l'équation (on suppose f, g continues sur $\mathbb{R}$)

Soit F une primitive de f et G une primitive de g . Alors toute fonction $y:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui satisfait pour une constante $C \in \mathbb{R}$ l'équation

$$G(x) - F(y(x)) = C, \quad x \in]a, b[\quad (**)$$

est une solution de $(*)$.

Remarque: donné une solution sous forme implicite (on a une équation pour $y(x)$) il faut encore (si possible) résoudre pour $y(x)$ (isoler $y(x)$ dans l'équation $(**)$) pour obtenir la (les) solution(s) sous forme explicite (sur $]a, b[$).

Vérification de $(**)$: $\frac{d}{dx}(**) \Rightarrow$

$$G'(x) - F'(y(x)) y'(x) = 0$$

et donc $g(x) - f(y(x)) y'(x) = 0$, puisque par définition de F et G on a $F' = f$ et $G' = g$. 9

Procédée de résolution pratique (recette de cuisine)

on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$ que l'on manipule comme une fraction de "dy" sur "dx". Si

$$g(x) - f(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad \cdot dx$$

$$g(x) \cdot dx = f(y) dy \quad , \quad \int$$

$$\int g(x) dx = \int f(y) dy + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

ici on traite y comme variable d'intégration

$$G(x) = F(y) + C \Rightarrow (**)$$

ici y est une fonction de x

Exemple 1:

$$y' = y \quad \underset{y \neq 0}{\iff} 1 - \frac{1}{y} y' = 0 \quad \text{donc } g(x) = 1, f(y) = \frac{1}{y}$$

Remarque: on verra plus loin que puisque $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y' = y$, aucune autre solution ne peut s'annuler, c'est-à-dire ou bien $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \neq 0$

$$y' = y \quad \xRightarrow{\text{recette}} \left[\frac{dy}{dx} = y \iff \frac{dy}{y} = dx \right]$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 1 \cdot dx + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

logarithme népérien: $e^{\ln(x)} = x, \forall x > 0$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = e^{x+C} = e^C \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = C \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm C e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C > 0$$

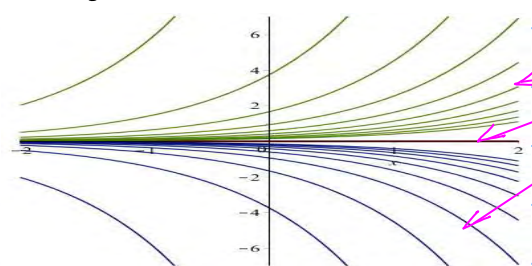
$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}^*$$

Il manque la solution $y(x) = 0 = C \cdot e^x$ pour $C = 0$

La solution générale est donc

en supposant que l'on ait
trouvé toutes les solutions.

$$\{ \forall C \in \mathbb{R}, y(x) = C \cdot e^x, x \in \mathbb{R} \}$$



graphes des solutions
 $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \cdot e^{-x} = C \}$

Exemple 2

Soit l'ED $y' = y^2$. Déterminer.

a) la solution générale

b) la solution maximale qui satisfait la CI
 $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, avec y_0 donné.

a) $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ est une solution

voir Analyse I. ceci veut dire $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto y(x) = 0$$

l'équation est à variables séparées:

$$\left\lceil \frac{dy}{dx} = y^2 \right\rceil \begin{matrix} y \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C, \quad \boxed{C \in \mathbb{R}}$$

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}$$

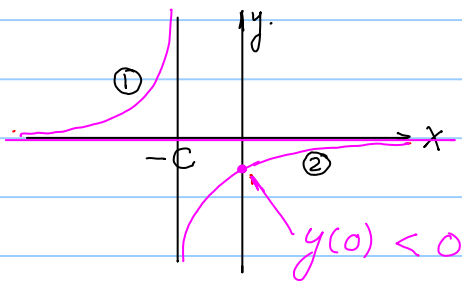
La solution générale est donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \end{array} \right.$$

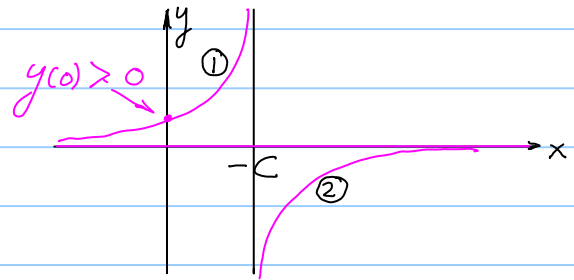
$$\textcircled{1} \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{-1}{x+C}, \quad x \in]-\infty, -C[;$$

$$\textcircled{2} \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{-1}{x+C}, \quad x \in]-C, \infty[\quad \left. \vphantom{\forall C \in \mathbb{R}} \right\}$$

pour $C > 0$



pour $C < 0$



b) $\exists y(0) = y_0$, avec $y_0 \in \mathbb{R}$ donnée

Pour $y_0 = 0$ on obtient la solution $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Pour $y_0 < 0$ on obtient une solution du type ② (voir le dessin), avec

$$y(0) = -\frac{1}{C} \stackrel{!}{=} y_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{y_0}.$$

Ceci donne: $y(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1 - xy_0}, \quad x \in]\frac{1}{y_0}, \infty[$

Pour $y_0 > 0$ on obtient une solution du type ① (voir le

dessin), avec $y(0) = -\frac{1}{C} \stackrel{!}{=} y_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{y_0}$

Ceci donne : $y(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1 - xy_0}$, $x \in]-\infty, \frac{1}{y_0}[$

La solution maximale avec CI $y(0) = y_0$ est donc :

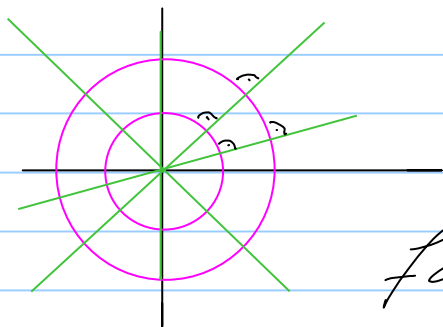
$$\begin{cases} y(x) = 0 & , x \in \mathbb{R} , \text{ si } y_0 = 0 \\ y(x) = \frac{y_0}{1 - xy_0} & , x \in]-\infty, \frac{1}{y_0}[, \text{ si } y_0 > 0 , \\ y(x) = \frac{y_0}{1 - xy_0} & , x \in]\frac{1}{y_0}, \infty[, \text{ si } y_0 < 0 \end{cases}$$

Exemple 3 voir la série B2, Ex. 1 (type Examen)

1.2.2. Familles de courbes orthogonales

But: donner une famille de courbes, trouver la famille des courbes orthogonales. (voir série B2, Ex. 2)

Exemple: famille donnée, cercles cocentriques, $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$



à lire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = C\}$.

famille recherchée, ^{demi} droites par l'origine

Lien avec les équations différentielles: localement on a (à des exceptions près, voir théorème des fonctions implicites plus loin dans le cours) pour un membre de la famille des cercles:

$$x^2 + y(x)^2 = C \quad , \quad C > 0$$

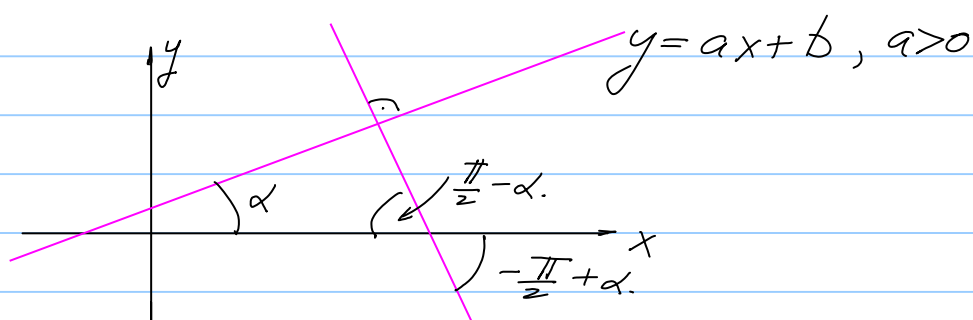
et donc, en dérivant par rapport à x .

$$2x + 2 \cdot y(x) \cdot y'(x) = 0 \quad (*)$$

C'est une équation différentielle qui a des familles de demi-cercles comme solution générale (résoudre l'équation $x + y y' = 0$!)

Quelle est l'équation différentielle qui correspond à la famille des courbes orthogonales ?

Rappel: condition d'orthogonalité pour deux droites:



$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

(produit des pentes = -1).

remplacer y' par $\frac{-1}{y'}$ dans (*)

$$(*) \Rightarrow 2x + 2 \cdot y(x) \frac{-1}{y'(x)} = 0 \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

(ED de la famille orthogonale)

separation des variables:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (y \neq 0, x \neq 0)$$

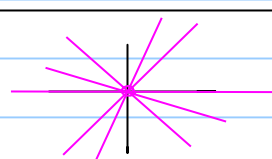
$\ln: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{R}$

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + \ln(C), \quad C > 0$$

et on trouve la solution générale

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall C \in \mathbb{R}, y(x) = C \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}_*^+ \\ \forall C \in \mathbb{R}, y(x) = Cx, \quad x \in \mathbb{R}_*^- \end{array} \right\}$$

Comme équation pour la famille des courbes orthogonales on a donc finalement

$$\frac{y}{x} = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{à lire} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x} = C\}$$


Ils manquent les demi-droites verticales (voir plus loin)

1.2.3. Applications

- modélisation de populations
- modélisation de certaines situations économiques
- modélisation du climat.

Modélisation

$y(t) \in \mathbb{R}$:- la taille d'une population
 - la quantité d'argent
 - la quantité de CO_2 dans l'atmosphère

choix de la
modélisation

$t \geq 0$ le temps, $y_0 \in \mathbb{R}$, la quantité initiale

modèle: $y' = k \cdot y$, $y(0) = y_0$ (problème de Cauchy)

motivation pour ce modèle: soit $\delta > 0$, petit.

$$y(t+\delta) = y(t) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{correction} \\ \text{proportionnelle à } y(t)}}{y(t) \cdot k \cdot \delta} + \underbrace{\text{"petit"}}_{=O(\delta)}$$

donc

$$y'(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y(t+\delta) - y(t)}{\delta} = y(t) \cdot k$$

Interprétation de k : $k > 0$ accroissement proportionnel à $y(t)$

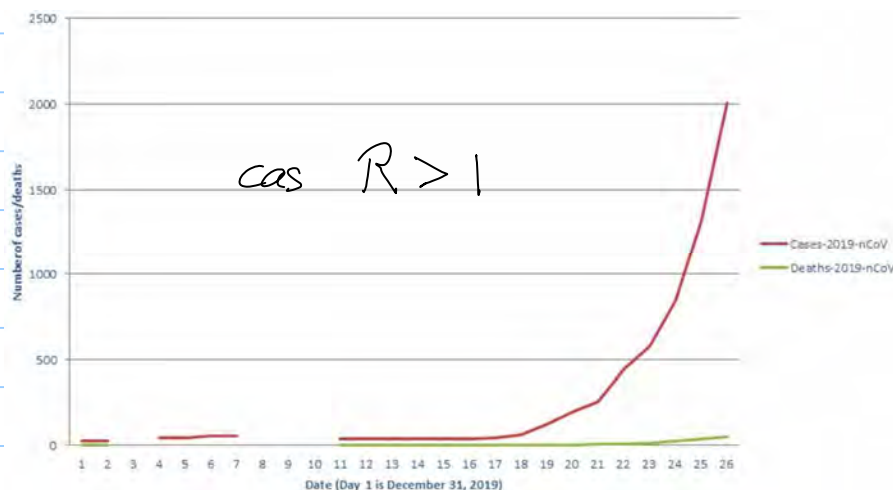
$k < 0$ "taux négatif" décroissement proportionnel à $y(t)$.

épidémiologie: $R := e^k > 1$ si $k > 0$

Solution du problème de Cauchy

$$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}, \quad t \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{croissance} \\ \text{exponentielle} \\ \text{(si } k > 0). \end{array}$$

Exemple: croissance exponentielle des cas covid-19, printemps 2020 en CH



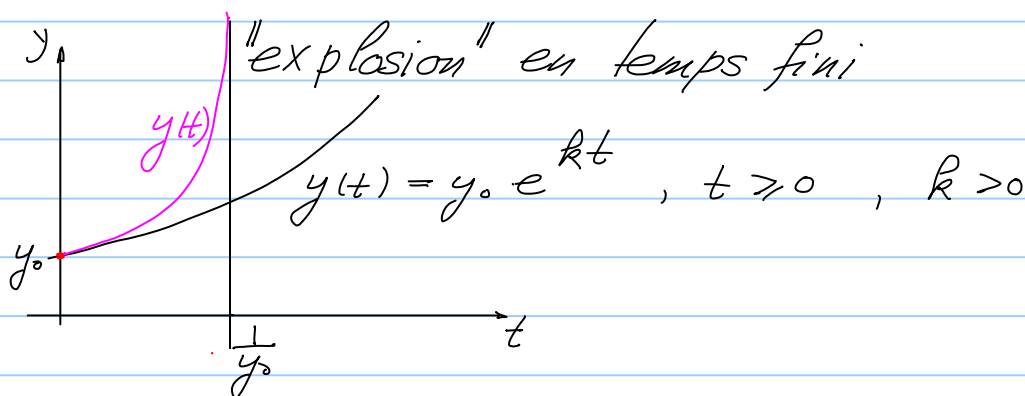
A comparer avec: $y' = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$

accroissement plus important que proportionnel (pour $y > 1$)

choix de la modélisation

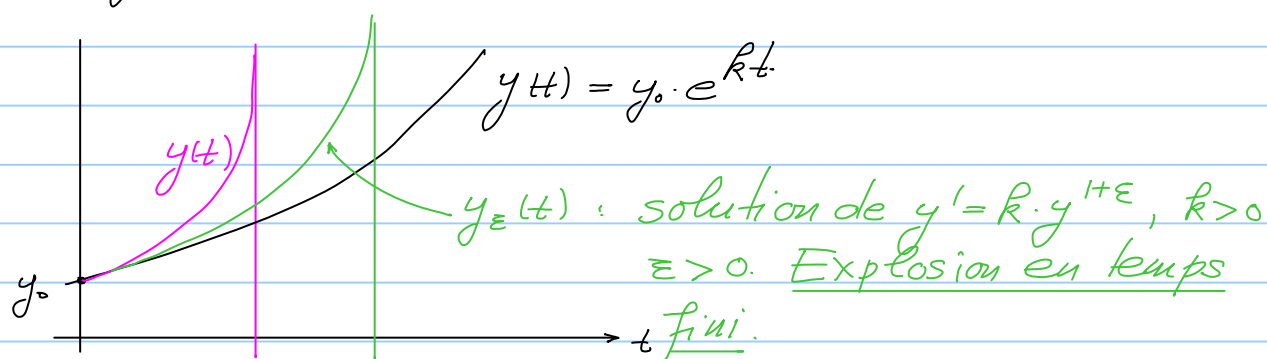
Solution: $y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$, $t \in [0, \frac{1}{y_0} [\subset] -\infty, \frac{1}{y_0} [$

solution maximale



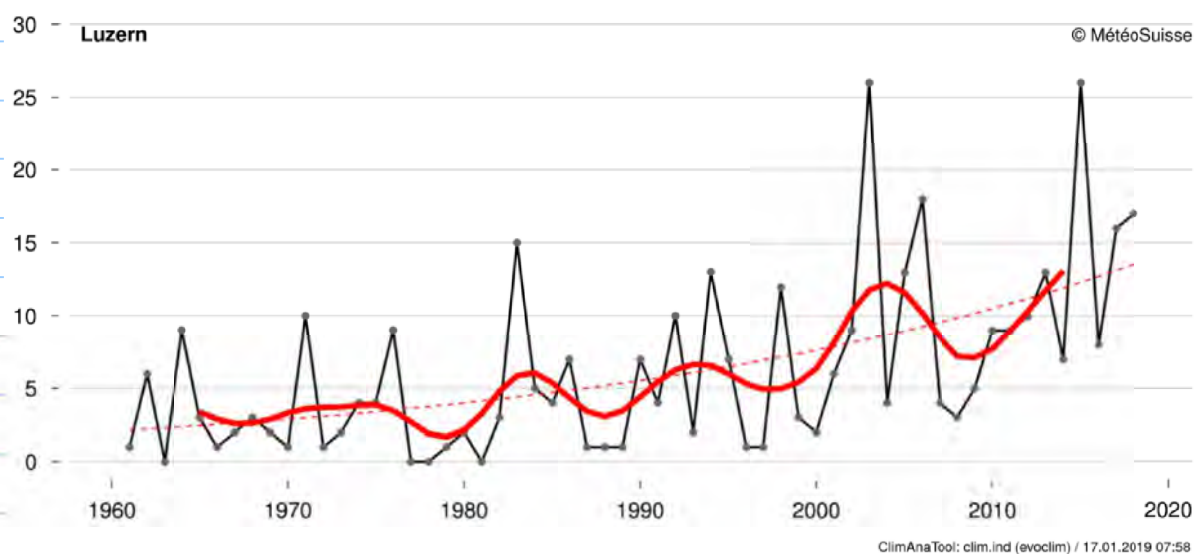
Remarque: (voir la série A1, exercice 3)

A comparer avec la solution de $y' = k \cdot y^{1+\varepsilon}$, $k > 0$, $y(0) = y_0 > 0$, $\varepsilon > 0$.



On a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{\varepsilon}(t) = y_0 \cdot e^{kt}$ pour tout $t \geq 0$

Exemple: nombre de jours tropicaux qui est considéré comme un indicateur des effets du réchauffement climatique

Jours tropicaux [Tmax >= 30°C] (jours)*année calendaire (jan.-déc.) 1961-2018*

1.3. ED linéaires du premier ordre

Prérequis: algèbre linéaire, structure de l'ensemble des solutions de $Av=b$, A une matrice $n \times n$, v et b des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

1.3.1. Définitions

Une ED linéaire du premier ordre est de la forme

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (*)$$

avec p et q des fonctions données continues sur un intervalle ouvert I .

Remarque: $(*) \Leftrightarrow E(x, y, y') = y' + p(x)y - q(x) = 0$

Terminologie homogène/inhomogène

- si $q=0$ l'équation $(*)$ est dite homogène
- si $q \neq 0$ l'équation $(*)$ est dite inhomogène et $y' + p(x)y = 0$ est appelée l'équation homogène associée à $(*)$.

On définit l'application $L: C^1(I) \rightarrow C^0(I)$

$$\eta \mapsto L(\eta)$$

par :

$$(L(\eta))(x) := \eta'(x) + p(x)\eta(x),$$

et l'équation $(*)$ devient (on écrira souvent $L\eta$ au lieu de $L(\eta)$):

$$Ly = q \quad (\text{analogue à } Av=b)$$

$C^1(I)$ et $C^0(I)$ sont des espaces vectoriels (de dimension ∞) et L est linéaire, c'est-à-dire $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \eta_1, \eta_2 \in C^1(I)$

$$L(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) = \alpha \cdot L(\eta_1) + \beta L(\eta_2)$$

(voir aussi série 2B, réchauffement)

$$\begin{aligned} & (\alpha \eta_1(x) + \beta \eta_2(x))' + p(x) (\alpha \eta_1(x) + \beta \eta_2(x)) \\ &= \alpha \cdot (\eta_1'(x) + p(x) \eta_1(x)) + \beta (\eta_2'(x) + p(x) \eta_2(x)) \end{aligned}$$

Le noyau de L est de dimension 1 (voir plus loin) et puisque l'équation est linéaire la solution générale de (*) est de la forme

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R}, y(x) = y_p(x) + \underbrace{C y_1(x)}_{y_h(x)}, x \in I \right\} (**)$$

où y_p est une solution quelconque du problème inhomogène, appelée solution particulière, et y_1 une fonction quelconque non nulle dans le noyau de L : $L y_1 = y_1' + p(x) y_1 = 0$. Nous verrons plus loin (théorème d'unicité) que, vu que $y(x) = 0, x \in I$, est une solution du problème homogène, aucune autre solution du problème homogène ne peut prendre la valeur zéro sur I .

1.3.2. Méthode de résolution générale

i) L'équation homogène peut être résolue par séparation des variables (au vu de (**))
il suffit de trouver une solution non nulle,
On a :

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

$$\ln(|y|) = -P(x)$$

avec P une primitive quelconque de p . $\square$

Donc

$$y_1(x) = e^{-P(x)}, \quad x \in I \quad \underline{\neq 0, \forall x \in I} \quad !$$

ii) Recherche d'une solution particulière

a) Méthode (dite) de la variation de la constante

On pose $y_p(x) = C(x) y_1(x)$, avec $C(x)$ une fonction inconnue et l'on substitue dans l'équation inhomogène:

$$(C(x) y_1(x))' + p(x) (C(x) y_1(x)) = q(x)$$

$$C'(x) \cdot y_1(x) + \underbrace{C(x) y_1'(x) + p(x) C(x) y_1(x)}_{= C(x) \cdot (y_1'(x) + p(x) y_1(x))} = q(x)$$

on obtient donc

$\overset{\text{par définition de } y_1}{=} 0$

un TEST !

$$C'(x) y_1(x) = q(x)$$

et donc

$$C'(x) = \frac{1}{y_1(x)} q(x) = \underbrace{e^{P(x)} q(x)}_{\text{continue sur } I}$$

et on obtient

$$C(x) = \int e^{P(x)} q(x) dx$$

et

$$y_p(x) = \left(\int e^{P(x)} q(x) dx \right) \cdot e^{-P(x)}, x \in I$$

De i) et ii) on obtient la solution générale (**)

Attention: y_1 et y_p ne sont pas uniques, ils dépendent du choix des primitives.

b) Méthode des coefficients indéterminés

attention: nécessite $p(x) = \text{const.} \equiv p \in \mathbb{R}$.

Cette méthode s'applique si $p(x) = p$ et si $q(x)$ est une combinaison linéaire de polynômes, fonctions exponentielles, $\sin$ et $\cos$ et produits de ces fonctions c'est-à-dire si $q(x) \in \text{vect}\{q_i(x)\}$, voir le tableau pour les fonctions q_i admises. Par linéarité, si

$$q(x) = \sum_{i=1}^m a_i q_i(x), \quad a_i \in \mathbb{R}$$

et si $\mathcal{L} y_{p,i} = q_i, i=1, \dots, m$, alors

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^m a_i y_{p,i}(x)$$

satisfait $Ly = q$. Pour les $y_{pi}(x)$ on a le tableau suivant:

Soit $r \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

fonction $q_i(x)$ $\longrightarrow$ fonction $y_{pi}(x) \in$

$$x^r \quad \text{vect} \{ x^r, x^{r-1}, \dots, x, 1 \}$$

$$x^r e^{\lambda x}, \lambda \neq -p \quad \text{vect} \{ x^r e^{\lambda x}, \dots, x e^{\lambda x}, e^{\lambda x} \}$$

$$\text{cas dit } \left. \begin{array}{l} \text{résonant} \end{array} \right\} x^r e^{-px} \quad \text{vect} \{ x^{r+1} e^{-px}, \dots, x e^{-px}, e^{-px} \}$$

$$\text{ou } \left. \begin{array}{l} x^r \sin(\alpha x) e^{\lambda x} \\ x^r \cos(\alpha x) e^{\lambda x} \end{array} \right\} \text{vect} \left\{ \begin{array}{l} x^r \sin(\alpha x) e^{\lambda x}, \dots, \sin(\alpha x) e^{\lambda x} \\ x^r \cos(\alpha x) e^{\lambda x}, \dots, \cos(\alpha x) e^{\lambda x} \end{array} \right\}$$

Explication: on écrit l'ED sous la forme

$$p.y(x) = q(x) - y'(x)$$

et compare les fonctions des deux côtés de l'équation

1.3.3. Exemples

$$1) \underbrace{y' + x^2 y}_{Ly} = \underbrace{x^2}_q \quad (p(x) = x^2, q(x) = x^2, I = \mathbb{R}). \quad (\Rightarrow y \text{ définie sur } \mathbb{R}).$$

i) problème homogène: $y' + x^2 y = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx, \quad \ln(|y|) = -\frac{1}{3} x^3 \quad \square$$

$$y_h(x) = e^{-\frac{1}{3} x^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) solution particulière (variation de la constante)

$y_p(x) = C(x) e^{-\frac{1}{3}x^3}$ à substituer dans l'équation

$$C'(x) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + \underbrace{C(x) e^{-\frac{1}{3}x^3} (-x^2) + x^2 C(x) e^{-\frac{1}{3}x^3}}_{\text{T E S T} = 0} = x^2$$

$$C'(x) e^{-\frac{1}{3}x^3} = x^2 \Rightarrow C'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow C(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} \Rightarrow y_p(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} = 1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{dérivée} \\ \text{si possible} \end{array}$$

Solution générale

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R}, y(x) = 1 + \underbrace{C e^{-\frac{1}{3}x^3}}_{y_h(x)}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Méthode b), voir la série 2B, Ex. 3i)

3) Voir série 2B, Ex 3ii) attention à mettre sous la forme $y' + p(x)y = q(x)$

1.4. Exemples d'ED du premier ordre qui ne sont pas linéaires et ne sont pas à variables séparées

1.4.1. Equation de Bernoulli (série 2B, Ex. 4)

C'est une équation de la forme

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad m \in \{2, 3, \dots\} \subset \mathbb{N}^* (*)$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont supposées continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

i) $y(x) = 0$, $x \in I$ est une solution.

ii) nous posons $u(x) = y(x)^{1-m}$ (voir la discussion sous le point iii)).

On a $u' = (1-m)y^{-m}y'$, et si on multiplie l'équation (*) avec $(1-m)y^{-m}$ on obtient l'équation

$$u' + (1-m)p(x)u = (1-m)q(x)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre pour la fonction u (sur I) que l'on sait résoudre.

iii) pour remonter à $y(x)$ à partir de $u(x)$ il faut distinguer deux cas:

- si m est impair, il faut restreindre $u(x)$ à des intervalles ouverts où $u(x) > 0$.
Chacun de ces intervalles donne une solution $y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-m}}$.

- si m est pair, il faut décomposer I en des intervalles où $u(x) > 0$ et $u(x) < 0$. On a.

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-m}} \quad \text{sur un intervalle où } u(x) > 0$$

$$y(x) = -(-u(x))^{\frac{1}{1-m}} \quad \text{sur un intervalle où } u(x) < 0.$$

1.4.2. Équations homogènes



(série 3B, éch. 1.1 + 1.2)

À ne pas confondre avec les équations linéaires homogènes

Une équation homogène est de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (*)$$

Méthode de résolution : on pose

$$y(x) = x \cdot v(x)$$

et on cherche la fonction $v(x)$: on a

$$y'(x) = v(x) + x \cdot v'(x)$$

et on obtient à partir de (*) l'équation suivante pour v :

$$v + x v' = f(v)$$

que l'on peut résoudre par séparation des variables

1.4.3. Équation de Riccati (série 3B, Ex. 3)

C'est une équation de la forme ($y_R \leftarrow \text{Riccati}$)

$$y_R' = a(x) y_R^2 + b(x) y_R + c(x) \quad (*)$$

avec $a(x), b(x), c(x)$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Si c est identiquement zéro c'est une équation de Bernoulli ($m=2$).

On ne sait pas résoudre, sauf si on connaît déjà une solution $y_1(x)$. Dans ce cas on pose

$$y_R(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

avec $u(x)$ une nouvelle fonction inconnue et on substitue dans (*).

1.4.4. Equation de Clairaut (serie 3B, Ex. 4)

Soit $l'ED$.

$$y = xy' + f(y')$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors on pose $y' = p$ et donc

$$y = x \cdot p + f(p) \quad (*)$$

La dérivée de (*) par rapport à x donne l'équation

$$p = p + xp' + f'(p)p'$$

ou encore

$$(x + f'(p))p' = 0$$

i) $p' = 0$: $\Rightarrow p(x) = c \xRightarrow{(*)} y = c \cdot x + f(c)$

(une famille de droites)

ii) $x + f'(p) = 0$: donc, et en utilisant (*).

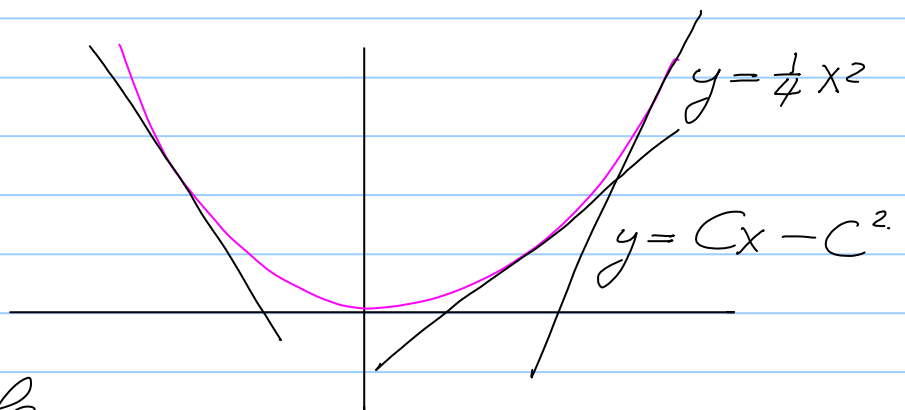
$$x = -f'(p) \quad \equiv x_p$$

$$y = -p \cdot f'(p) + f(p) \quad \equiv y_p$$

Ces deux équations définissent une courbe (voir plus loin) dans le plan, paramétrisée par $p \in \mathbb{R}$ (voir la note de bas de page).

Exemple

$$y'^2 - xy' + y = 0$$



solution générale:

$$\left\{ y(x) = \frac{1}{4} x^2, x \in \mathbb{R}; \right.$$

$$\left. \forall C \in \mathbb{R}, y(x) = Cx - C^2, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

La solution $\frac{1}{4} x^2$ est appelée "l'enveloppe". Pour les points de l'enveloppe il y a violation du théorème d'unicité (deux solutions passent par le même point).

Si la courbe paramétrisée par p est de sorte que l'on puisse aussi la voir comme le graphe d'une fonction $y(x)$, i.e., telle que $y(x_p) = y_p$, alors on aura que $y'(x_p) = p$.

1.5 ED linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

15.1. Définitions

Une ED linéaire du deuxième ordre à coefficients constants est de la forme

$$a y'' + b y' + c y = q(x) \quad (*)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et q une fonction continue sur un intervalle ouvert I . Cette équation est de la forme

$$L y = q$$

avec $L: C^2(I) \rightarrow C^0(I)$ définie par

$$(L \eta)(x) \equiv (L(\eta))(x) := a \cdot \eta''(x) + b \eta'(x) + c \eta(x)$$

et L est une application linéaire.

Remarque: donc de nouveau, par linéarité, si

$$q(x) = \sum_{i=1}^m a_i q_i(x), \quad a_i \in \mathbb{R}, \text{ c.-à-d., si}$$

$$q \in \text{vect}\{q_1, \dots, q_m\} \text{ et si}$$

$$L y_i = q_i, \quad i=1, \dots, m, \text{ alors } y(x) = \sum_{i=1}^m a_i y_i(x)$$

$$\text{satisfait } L y = q.$$

Remarque: voir aussi la série 4B, échauffement

1.5.2. Méthode de résolution

La procédure est analogue au cas des équations linéaires du premier ordre.

i) Méthode de résolution de l'équation homogène $Ly=0$
La solution est de la forme

$$\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), x \in \mathbb{R} \}$$

Pour trouver y_1 et y_2 on essaye $y(x) = e^{\lambda x}$ (ça marche car l'équation est à coefficients constants) que l'on substitue dans $Ly = ay'' + by' + cy = 0$ et on trouve

$$e^{\lambda x} \underbrace{(a \cdot \lambda^2 + b \lambda + c)}_{=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{équation caractéristique}$$

1^{er} cas: $b^2 - 4ac > 0$. Deux solutions réelles pour λ , $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y_h(x) = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 x}}_{=y_1(x)} + \underbrace{C_2 e^{\lambda_2 x}}_{=y_2(x)}, x \in \mathbb{R} \}$$

2^{ème} cas: $b^2 - 4ac = 0$. Seulement une solution réelle $\lambda \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation homogène est (voir série 4B, Ex 2i) pour $y_2(x)$)

$$\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y_h(x) = \underbrace{C_1 e^{\lambda x}}_{=y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{x e^{\lambda x}}_{=y_2(x)}, x \in \mathbb{R} \}.$$

3^{ème} cas: $b^2 - 4ac < 0$. Deux solutions complexes conjugués pour λ , $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. La solution (réelle) générale de l'équation homogène est (voir série 4B, Ex 2ii))

$$\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y_h(x) = \underbrace{C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x)}_{=y_1(x)} + \underbrace{C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)}_{=y_2(x)}, x \in \mathbb{R} \}$$

ii) Recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène $Ly = q$.

a) Méthode de la variation des constantes

Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ les deux solutions construites sous i). Alors on pose

$$y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad \Rightarrow \quad (0)$$

$$y'(x) = C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) \quad (1)$$

on impose $0 \stackrel{!!}{=} C_1(x) \cdot y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) \quad (1)$

$$y''(x) = C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) \quad (2)$$

$$+ C_1(x) y_1''(x) + C_2(x) y_2''(x) \quad (2)$$

On obtient

$$a \cdot \boxed{}_{(2)} + b \cdot \boxed{}_{(1)} + c \cdot \boxed{}_{(0)}$$

$$+ a \cdot \boxed{}_{(2)} = q(x).$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{C_1(x) (a y_1'' + b y_1' + c y_1) + C_2(x) (a y_2'' + b y_2' + c y_2)} \quad \text{TEST !}$$

$$\underset{=0}{\text{car } Ly_1=0} + a \cdot \boxed{}_{(2)} = q(x) \quad \underset{=0}{\text{car } Ly_2=0} \quad (2), (1), (0)$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \textcircled{(1)} & \rightarrow C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \quad \leftarrow \text{le choix imposé} \\ \textcircled{(2)} & \rightarrow C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \frac{1}{a} q(x) \end{aligned}$$

ou encore (écriture matricielle)

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} q(x) \end{pmatrix} \quad \text{apprendre par cœur}$$

et on obtient (voir la remarque en bas)

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} q(x) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{continue} \\ \text{sur } I \end{matrix}$$

puis on intègre les fonctions $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$ pour obtenir $C_1(x)$ et $C_2(x)$ et donc une solution particulière.

$$y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad , \quad x \in I$$

iii) Solution générale du problème

Par la linéarité du problème la solution générale de l'équation (*) est

$$\left\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \right. \\ \left. \text{avec } x \in I \right\}$$

Remarque: la fonction

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \\ = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$$

est appelée le Wronskien des solutions y_1 et y_2 .
Il est non nul (pour tout x) puisque les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas des multiples l'une de l'autre, c'est-à-dire puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes.

┌ Démonstration: voir la série 4B, Ex.3 ┘

De retour à ii)

b) Méthode des coefficients indéterminés

Soit $q \in \text{vect} \{ q_i, i=1 \dots m \}$

Cas résonants: (soit $r \in \mathbb{N}$)

1^{er} cas: $y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Si $q_i(x) = x^r e^{\lambda x}, \lambda = \lambda_1 \text{ ou } \lambda = \lambda_2$

Alors $y_{p,i}(x) \in \text{vect} \{ x^{r+1} e^{\lambda x}, x^r e^{\lambda x}, \dots, x^1 e^{\lambda x} \}$

2^{ème} cas: $y_h(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$

Si $q_i(x) = x^r e^{\lambda x}$

Alors $y_{p,i}(x) \in \text{vect} \{ x^{r+2} e^{\lambda x}, \dots, x^2 e^{\lambda x} \}$

3^{ème} cas: $y_h(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Si $q_i(x) = x^r e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ou $x^r e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Alors $y_{pi}(x) \in \text{vect} \{ x^{r+1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^1 e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^{r+1} e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \}$

Cas non-résonant: (tous les autres cas, voir le tableau)

$y_{pi} \in \text{vect} \{ q_i, q_i', \dots \}$

Soit $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ (cas non-résonants):

fonction $q_i(x)$ $\longrightarrow$ fonction $y_{pi}(x) \in$

x^r $\text{vect} \{ x^r, x^{r-1}, \dots, x, 1 \}$

$x^r e^{\lambda x}$ $\text{vect} \{ x^r e^{\lambda x}, \dots, x e^{\lambda x}, e^{\lambda x} \}$

$x^r \sin(\beta x) e^{\alpha x}$ $\text{vect} \{ x^r \sin(\beta x) e^{\alpha x}, \dots, \sin(\beta x) e^{\alpha x}, x^r \cos(\beta x) e^{\alpha x}, \dots, \cos(\beta x) e^{\alpha x} \}$

$x^r \cos(\beta x) e^{\alpha x}$ $\longrightarrow$ dito $\longrightarrow$

1.5.3. Exemples

Voir les séries 2A, 3A

1.6. ED linéaires du deuxième ordre (à coefficients variables)

1.6.1. Equations homogènes

C'est une équation de la forme

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (*)$$

avec p et q des fonctions continues sur un intervalle I .

Il n'existe aucune méthode de résolution générale !^{*)}

Réduction de l'ordre: si on connaît une solution non nulle $y_1(x)$ de $(*)$ sur I on pose:

$$y(x) = U(x) \cdot y_1(x) \quad (**)$$

où $U(x)$ est une primitive d'une nouvelle fonction inconnue $u(x)$.

En substituant $(**)$ dans l'équation $(*)$ on trouve:
(voir série 4B, Ex.1)

$$y_1(x) u'(x) + (2y_1'(x) + p(x)y_1(x)) u(x) = 0 \text{ sur } I$$

ce qui est une ED linéaire homogène du premier ordre que l'on sait résoudre (par séparation des variables) pour trouver $u(x) (\neq 0)$, puis on détermine une primitive $U(x)$ de $u(x)$ pour obtenir une deuxième solution $y_2(x) = U(x) \cdot y_1(x)$ linéairement indépendante de $y_1(x)$.

^{*)} Ceci veut dire qu'en général on ne sait pas exprimer les solutions en termes de primitives. Le théorème d'existence (et d'unicité) nous permettra cependant d'exprimer les solutions comme limites de suites de fonctions.

1.6.2. Equations inhomogènes

C'est une équation de la forme

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (*)$$

avec p, q et f continues sur un intervalle I .

- i) soient y_1 et y_2 (les) deux solutions linéairement indépendantes du problème homogène associé à $(*)$.
- ii) la méthode de la variation des constantes marche exactement comme pour le cas des coefficients constants (voir 1.5.2.). On pose

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

avec $C_1(x)$ et $C_2(x)$ solution de

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Voir le paragraphe 1.5.2. pour les détails

- iii) la solution générale est de la forme

$$\left\{ \forall C_1, C_2, \quad y(x) = y_p(x) + \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}_{\equiv y_h(x)}, \quad x \in I \right\}$$

1.7. Autres équations du deuxième ordre

1.7.1. Équations indépendantes de y (série 5B, Ex 2)

Soit l'équation

$$E(x, y', y'') = 0 \quad (*)$$

On pose $u = y'$ et on obtient l'équation du premier ordre

$$E(x, u, u') = 0 \quad (**)$$

et toute primitive d'une solution de (**).
est une solution de (*)

1.7.2. Equations indépendantes de x (série 5B, Ex 3)

Soit l'équation

$$E(y, y', y'') = 0. \quad (*)$$

On pose

$$y'(x) = u(y(x))$$

avec u une nouvelle fonction inconnue.

On a

$$\begin{aligned} y''(x) &= u'(y(x)) y'(x) \\ &= u'(y(x)) u(y(x)) \end{aligned}$$

En substituant dans (*) on obtient

$$E(y, u(y), u'(y)u(y)) = 0,$$

ou encore, en considérant y comme variable indépendante

$$E(y, u, u'u) = 0 \quad (**)$$

Donnée une solution $u(y)$ de (**), on revient à (mais la fonction u est maintenant connue).

$$y' = u(y)$$

que l'on peut résoudre par séparation des variables.

1.7.3. Equations indépendantes de x et y (série 5B Ex 4)

Soit l'équation.

$$y'' = f(y') \quad (*)$$

On peut traiter (*) avec les méthodes vues dans les paragraphes 1.7.1 et 1.7.2. ou par la méthode suivante. Soit

$$y' = u \quad (**_1)$$

alors on a de (*)

$$u' = f(u) \quad (**_2)$$

séparation des variables:

$$(**_2) \text{ donne } dx = \frac{du}{f(u)}.$$

$$(**_1) \text{ donne } dy = u dx = \frac{u du}{f(u)}$$

La solution générale est donnée sous forme paramétrique par.

$$\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

$$x = \int \frac{du}{f(u)} + C_1$$

$$y = \int \frac{u du}{f(u)} + C_2.$$

$$\text{avec } u \in I \text{ (à trouver)} \quad \}$$

1.7.4. Equations indépendantes de x et y'

Soit l'équation (de Newton)

$$y'' = f(y) \quad (*)$$

avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On peut traiter (*) par la méthode du paragraphe 1.7.2, ou encore en multipliant (*) avec y' ce qui donne l'équation

$$y'' \cdot y' - f(y) y' = 0 \quad (**)$$

Soit U l'opposé d'une primitive de f , i.e. $U' = -f$, alors toute solution de (**) est solution de l'équation

$$\frac{1}{2} y'^2 + U(y) = E \quad (***)$$

pour une constante $E \in \mathbb{R}$ (appelée énergie mécanique).
L'équation (***) donne lieu aux deux équations $y' = \pm \sqrt{2E - 2U(y)}$, que l'on peut résoudre par séparation des variables.

1.8. ED linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur

Soit l'ED

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = q(x) \quad (*)$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}^*$, $q(x)$ une fonction continue sur un intervalle I .

i) résolution de l'équation homogène (associée à $(*)$)

On essaye $y(x) = e^{\lambda x}$ et on trouve que nécessairement

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_n (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{p_m} = 0$$

avec $1 \leq m \leq n$, $p_i \geq 1$, $i=1 \dots m$, $p_1 + \dots + p_m = n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ (voir la série 4B Ex. 2ii) pour le cas $\lambda \in \mathbb{C}$.)

La solution générale du problème homogène est

$$y_h(x) = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_m(x) e^{\lambda_m x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

avec P_i , $i=1, \dots, m$ des polynômes de degré p_i-1 :

$$P_1(x) e^{\lambda_1 x} = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{= y_1(x)} + C_2 \underbrace{x e^{\lambda_1 x}}_{= y_2(x)} + \dots + C_{p_1} \underbrace{x^{p_1-1} e^{\lambda_1 x}}_{= y_{p_1}(x)}$$

$$P_m(x) e^{\lambda_m x} = C_{n-p_m+1} \underbrace{e^{\lambda_m x}}_{= y_{n-p_m+1}(x)} + \dots + C_n \underbrace{x^{p_m-1} e^{\lambda_m x}}_{= y_n(x)}$$

Dans le cas où $m=n$ ou a $P_i(x) \equiv C_i$, $i=1 \dots n$, avec $C_i \in \mathbb{R}$.

$$y_h(x) = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 x}}_{=y_1(x)} + \dots + \underbrace{C_n e^{\lambda_n x}}_{=y_n(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) – la méthode de la variation des constantes se généralise. On a que $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ avec $C_1(x), \dots, C_n(x)$ solutions de:

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} q(x) \end{pmatrix}$$

– la méthode des coefficients indéterminés se généralise (voir la [série 3A](#) pour des exemples)

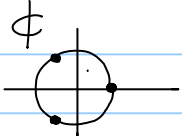
iii) la solution générale est de la forme

$$\left\{ \forall C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \quad y(x) = y_p(x) + y_h(x), \quad x \in I \right\}$$

trouvé sous ii) trouvé sous i)

Exemple (voir aussi 1.5.2 et la [série 4B](#))

$$y''' - y = 2x^3 = q(x), \quad I = \mathbb{R}$$

i) $\lambda^3 - 1 = 0$  $\lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha + i\beta$

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

ii) $q(x)$ n'est pas résonnant (pas de la forme $x^r q_0(x)$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $q_0(x)$ solution de l'équation homogène. Par conséquent $y_p(x) \in \text{vect} \{ q(x), q'(x), \dots \}$:

$$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

$$y_p'''(x) = 6A$$

$$x^3: \overset{\text{zero}}{0} - A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -2$$

$$x^2: 0 - B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$x: 0 - C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$1: 6A - D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 6A = -12$$

Donc $y_p(x) = -2x^3 - 12$

iii) la solution générale du problème est

$$\{ \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}, y(x) = y_p(x) + y_h(x), x \in \mathbb{R} \}$$

1.9. Solutions qualitatives, méthode des isoclines

Soit une ED du premier ordre. On suppose que l'on puisse l'écrire sous la forme (isoler y'):

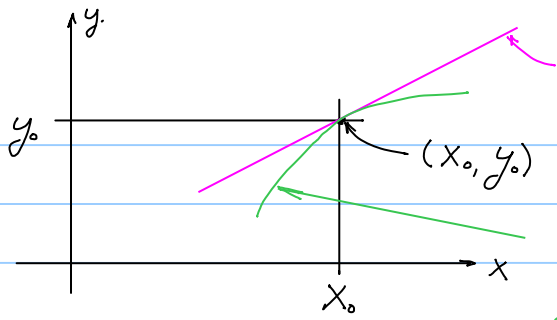
$$y' = f(x, y) \quad \text{pour une fonction } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemples: $f(x, y) = y, y^2, \dots$ (revoir tous les exemples)

Interprétation géométrique de $y' = f(x, y)$

En chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on connaît $f(x_0, y_0)$ et donc la dérivée $y'(x_0)$ de toute solution $y(x)$ qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$, car on a

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$$

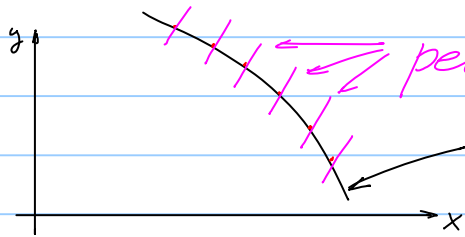


droite de pente $f(x_0, y_0)$ qui passe par le point (x_0, y_0) .

exemple du graphe d'une solution $y(x)$ de l'équation qui passe par (x_0, y_0) . La droite magenta est tangente au graphe de $y(x)$ en $(x_0, y_0 = y(x_0))$.

Méthode des isoclines

On considère les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = c$, pour c donnée. Nous verrons dans la suite que ceci correspond souvent, pour chaque valeur de c , à un ensemble de courbes :

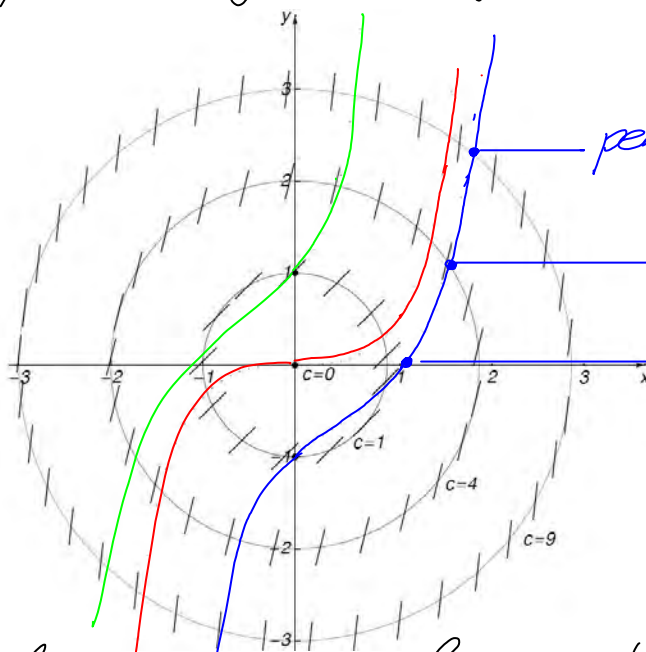


petits segments de pente c

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} = \text{isocline de } f \text{ pour } c.$

Une solution de l'ED qui coupe une isocline de f pour c doit avoir une tangente de pente c en ce point.

Exemple: $y' = x^2 + y^2 = f(x, y)$ (eq. de Riccati)



pente = 9 en ce point

pente = 4 en ce point

pente = 1 en ce point.

Remarque: les graphes ne s'intersectent pas !

1.10 Théorème d'existence et d'unicité

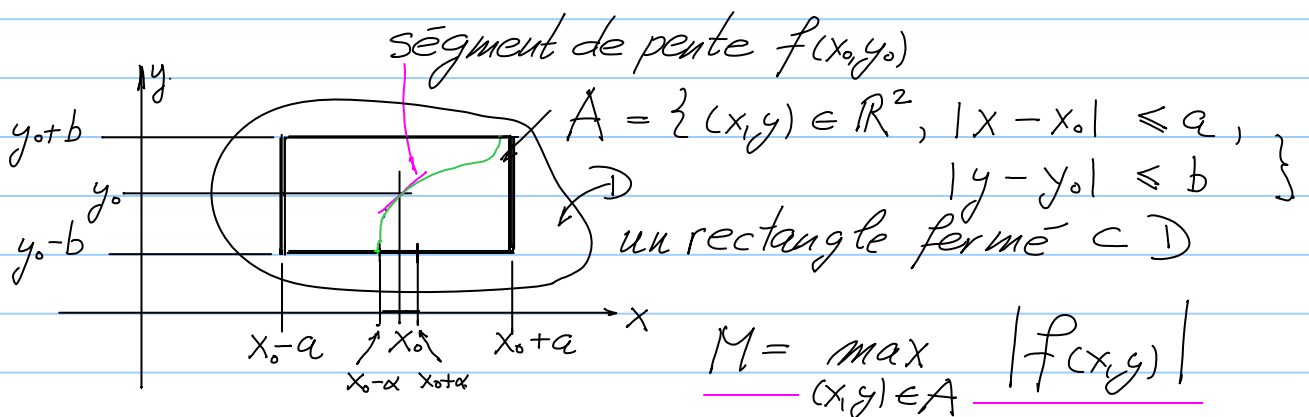
Théorème: Soit le problème de Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) , & f: D \rightarrow \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \therefore$$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $(x_0, y_0) \in D$.

f continue sur D
 $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur D } voir les chapitres à suivre

↖ fonction dérivée partielle de f par rapport à y : à définir dans les chapitres à suivre



Alors il existe exactement une fonction $y(x)$ continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ et continument dérivable sur $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ solution de $(*)$ sur I . où $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

Remarque: puisque A est fermé, la condition que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient des fonctions continues implique que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur A . (voir les chapitres à suivre).

Remarque: le théorème s'applique à $(x_0, y_0) \in D$ arbitraire

Démonstration (idée de base):

(*) est équivalent à :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

On pose $y_0(x) \equiv y_0$ et puis, pour $n=1, 2, \dots$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi$$

puis on montre que, par le théorème de l'application contractante (théorème de point fixe de Banach), la suite des fonctions y_n converge sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ dans l'espace vectoriel de fonctions $C^0([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \mathbb{R})$ équipé de la norme $\| \cdot \|_\infty$ (voir plus loin dans le cours, C est un espace de Banach).

Exemple

$$\left. \begin{array}{l} y' = y \quad (= f(x, y)) \\ x_0 = 0, \quad y(0) = y_0 = 1 \end{array} \right\} \text{ solution: } y(x) = e^x.$$

Avec le théorème:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_0(\xi)) d\xi = 1 + \int_0^x 1 d\xi = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_1(\xi)) d\xi = 1 + \int_0^x (1 + \xi) d\xi$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_2(\xi)) d\xi = 1 + \int_0^x (1 + \xi + \frac{1}{2} \xi^2) d\xi.$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x = y(x).$$

convergence uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$
avec $\alpha > 0$ arbitraire.

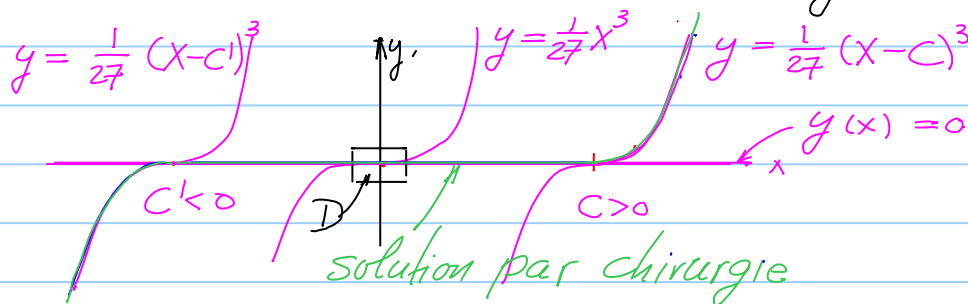
Contre-exemple: (seulement f continue ne suffit pas).

$$y' = |y|^{\frac{2}{3}} = f(x, y) \quad (\text{continue sur } D = \mathbb{R}^2)$$

$y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ est une solution

$y(x) = \frac{1}{27} (x - C)^3$, $x \in \mathbb{R}$, est une solution
pour tout $C \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $y(0) = 0$ ne sélectionne donc pas une solution unique, car $y(x) = 0$ et $y(x) = \frac{1}{27} x^3$ sont les deux des solutions qui satisfont $y(0) = 0$. Pire encore: il existe une infinité de solutions telles que $y(0) = 0$ qui peuvent être construites par "chirurgie":



Solutions par chirurgie: $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}(x-C)^3, & x > C > 0 \\ \frac{1}{27}(x-C')^3, & x < C' < 0 \\ 0, & C' \leq x \leq C \end{cases}$

où les choix de $C' < 0$ et $C > 0$ sont arbitraires.

Explication:

Le théorème d'existence et d'unicité ne s'applique pas en $(0,0)$ car la fonction $f(x,y) = |y|^{\frac{2}{3}}$ (vue comme fonction de y) n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Remarque: f continue suffit pour démontrer l'existence d'une solution (Théorème de Peano)

2. L'espace $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, rappels, définitions, notations

<u>prérequis</u>	<u>Analyse I :</u> · produit cartésien d'ensembles · intervalles ouverts, fermés, etc. · classes d'équivalence · suites numériques, sous-suites, BW · suites de Cauchy · définition de la limite · définition de la continuité · définition de la dérivabilité
	<u>Algèbre linéaire :</u> · espace vectoriel · produit scalaire · définition d'une norme

2.0. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) comme ensemble (voir analyse I)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}, \quad n \text{ facteurs}, \quad \times = \text{produit cartésien} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n\}\end{aligned}$$

↑
n-tuples

Notations : $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$

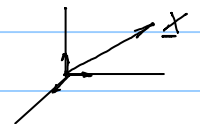
pour $n=2$: $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

pour $n=3$: $\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Si aucune confusion n'est possible on écrira aussi simplement $x \in \mathbb{R}^n$ au lieu de $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.1. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) comme espace vectoriel (voir algèbre linéaire)

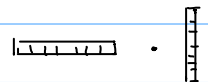
Notation : $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{x}$ un vecteur
 $x_i \in \mathbb{R}$ ses coordonnées



souvent on écrira juste x au lieu de $\underline{x}$.

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$, $\langle , \rangle$ un produit scalaire
(voir la série 6B pour le cas général)

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \cdot \underline{y}$$

 (produit des "matrices")

2.2. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est un espace vectoriel normé

La fonction $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\| \underline{x} \| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (= longueur du vecteur $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)

Remarque: pour $n=1$ c'est simplement la fonction valeur absolue.

Propriétés (définition d'une norme)

i) $\| \underline{x} \| \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\| \underline{x} \| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ ↑
vecteur zéro

ii) $\| \lambda \underline{x} \| = |\lambda| \cdot \| \underline{x} \|$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) inégalité triangulaire: $\| \underline{x} + \underline{y} \| \leq \| \underline{x} \| + \| \underline{y} \|$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

[iv) inégalité triangulaire inverse: $\| \underline{x} - \underline{y} \| \geq | \| \underline{x} \| - \| \underline{y} \| |$,
↑ car iii) $\Leftrightarrow$ iv) $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$]

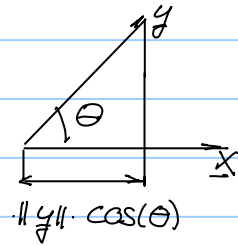
Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$| \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle | \leq \| \underline{x} \| \cdot \| \underline{y} \|$$

Démonstration: voir la série 6B

Interprétation géométrique

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos(\theta)$$



Distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$

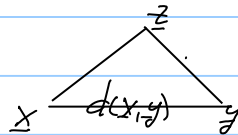
$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Propriétés (définition d'une distance, $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

i) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ et $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

ii) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

iii) inégalité triangulaire



$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}), \quad \forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$$

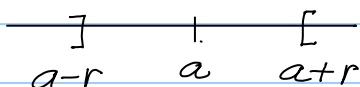
2.3. Sousensembles de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

Définition: soit $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. L'ensemble

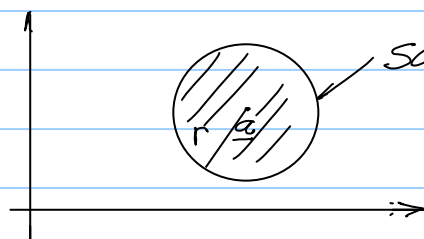
$$B(\underline{a}, r) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{a}) < r \}$$

est appelée "boule ouverte de centre $\underline{a}$ et rayon r ."

$n=1$:



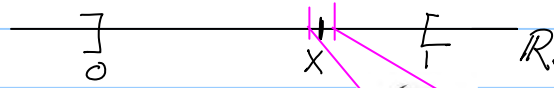
$n=2$:



sans le cercle

Définition: un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit ouvert, si $\forall x \in X, \exists r > 0$, tel que $B(x, r) \subset X$.

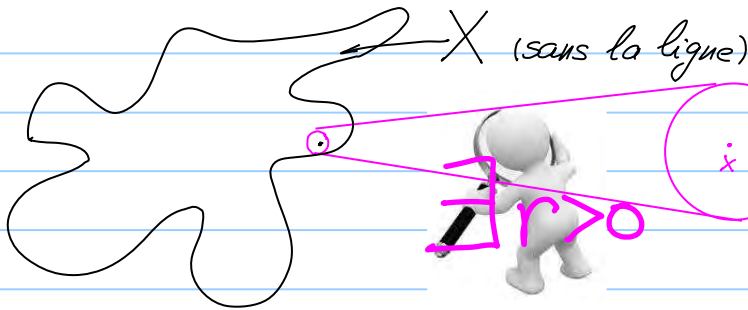
$n=1$: $X =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$



tous ces points $\in X$

$$\begin{cases} r = \frac{1-x}{2}, & x \geq \frac{1}{2} \\ r = \frac{x}{2}, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$n=2$:



$B(x, r) \subset X$
pour un $r > 0$
suffisamment petit!

Remarque: la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, $B(a, r)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque: $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
 $\emptyset$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

"ensemble vide" (rien à contrôler)

Attention (notation) pour tout ensemble X , $X \subset X$

le symbole $\subset$ ne signifie pas inclusion stricte!

Définition: un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit fermé si l'ensemble $X^c \equiv \mathbb{R}^n \setminus X$ est ouvert.

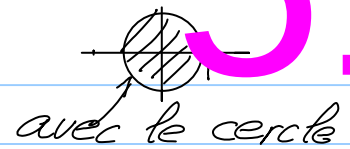
Exemples: $X = [0, 0] = \{0\} \subset \mathbb{R}$

$X =]-\infty, 0] \equiv \mathbb{R} \setminus]0, \infty[$

—•— $\mathbb{R}$

||||| — $\mathbb{R}$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, 0) \leq 1\}$$



Remarque: $\mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n$ est fermé (car $\emptyset$ ouvert) et $\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ est fermé (car $\mathbb{R}^n$ ouvert) et $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont donc à la fois ouverts et fermés

Définition: l'intérieur $\overset{\circ}{X} \subset X \subset \mathbb{R}^n$ est le plus grand sous-ensemble ouvert contenu dans X , c.-à-d. si $Y \subset X$, Y ouvert, alors $Y \subset \overset{\circ}{X}$.

Exemple: $X = [0, 1[$, $\overset{\circ}{X} =]0, 1[$

Définition: l'adhérence $\bar{X} \supset X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ est le plus petit sous-ensemble fermé qui contient X , c.-à-d. si $Y \supset X$, Y fermé, alors $Y \supset \bar{X}$

Exemple: $X = [0, 1[$, $\bar{X} = [0, 1]$

Identities: $\bar{X} = \left(\left(\overset{\circ}{X} \right)^c \right)^c$, tout $X \subset \mathbb{R}^n$.

$$X = \overset{\circ}{X} \iff X \text{ ouvert}$$

$$X = \bar{X} \iff X \text{ fermé}$$

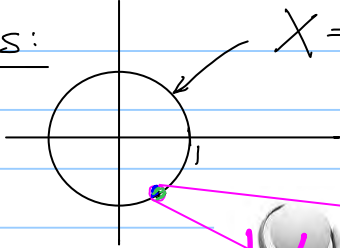
Définition: $\partial X := \bar{X} \setminus \overset{\circ}{X}$ est appelé le bord de l'ensemble X .

Remarque:

$$\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, B(x, r) \cap X \neq \emptyset, B(x, r) \cap X^c \neq \emptyset\}$$

Exemples:

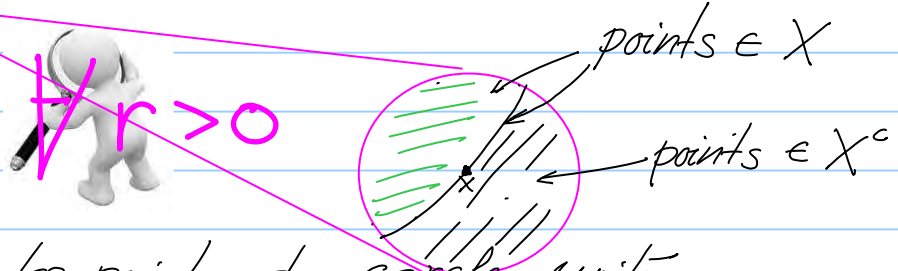
$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, 0) \leq 1\}$$



$$\overset{\circ}{X} = B(0, 1)$$

$$\bar{X} = X$$

$\partial X =$ l'ensemble des points du cercle unité



$$X = \emptyset \subset \mathbb{R}, \quad \overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset, \quad \bar{\emptyset} = \mathbb{R} = \partial \emptyset$$

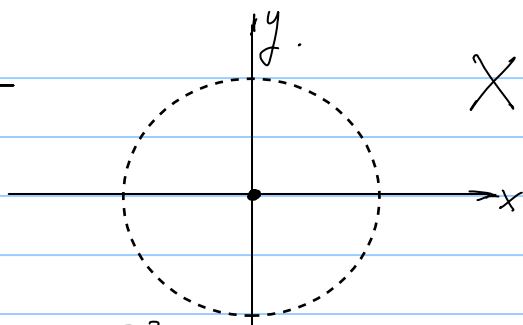
$$X = \mathbb{R} \setminus \emptyset \subset \mathbb{R}, \quad \overset{\circ}{X} = \emptyset, \quad \bar{X} = \mathbb{R} = \partial X$$

Definition $x \in X$ est appelé un point isolé s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap X = \{x\}$.

Remarque: les points isolés de $X \subset \mathbb{R}^n$ sont un sous-ensemble (au plus dénombrable) de ∂X .

Attention: les points isolés sont par définition des éléments de X , par contre les autres éléments de ∂X ne le sont pas forcément!

Definition $x \in \bar{X} \setminus \{\text{les points isolés de } X\}$ est appelé un point d'accumulation de X .

Exemple(voir aussi la
série 6 B)

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

$$\overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

$$\overline{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

$$\partial X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

$(0, 0) \in \partial X \cap X$ est un point isolé

l'ensemble des points d'accumulation de X est

$$\overline{X} \setminus \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Remarque (ensembles ouverts)

- une réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
- une intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

[voir la série 7 B pour les détails]

D'une manière analogue on a (utiliser la série 1 B)

- une intersection quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$
- une union finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

$$X := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, y = 0 \right\}.$$

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset$$

$$-x^2 \leq 1$$

ensemble des points isolés de $X = \cancel{X}$.

ensemble des points d'accumulation de $X = \{ (0, 0) \}$.

$$\bar{X} = \cancel{X} \cup \{ (0, 0) \}.$$

$$\partial X = \overline{\cancel{X}}$$

2.4. Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition: on appelle suite de points de $\mathbb{R}^n$ (ou suite dans $\mathbb{R}^n$) toute application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

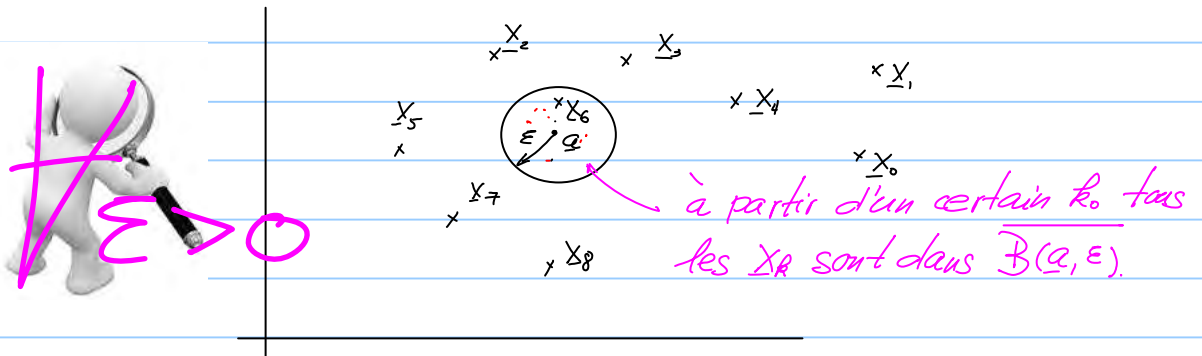
Notation (pour les suites): on pose $\underline{x}_k = f(k)$ et on écrit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ ou encore $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots$ pour les suites

Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, et l'on écrit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{a},$$

si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on a que $\underline{x}_k \in \overline{B}(\underline{a}, \varepsilon)$
c.-à-d. $d(\underline{x}_k, \underline{a}) = \|\underline{x}_k - \underline{a}\| \leq \varepsilon$.

Illustration



Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est bornée, s'il existe $C > 0$, tel que pour tout $k \geq 0$
 $\underline{x}_k \in \overline{B}(0, C) \Leftrightarrow d(0, \underline{x}_k) \leq C \Leftrightarrow \|\underline{x}_k\| \leq C$

Autres notions identiques à Analyse I

- définition d'une suite divergente
- définition d'une suite de Cauchy
- sous-suites, Théorème de B.W. (Bolzano-Weierstrass)
- le fait que $\mathbb{R}^n$ est complet (toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}^n$ converge vers un élément de $\mathbb{R}^n$) ($\mathbb{Q}^n$ n'est pas complet)
- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé complet
= espace de Banach

Théorème: une suite (x_k) , $x_k \in \mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration: voir la série 7B

Théorème: (Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$)

Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j \geq 0}$ qui est convergente.

Démonstration: voir la série 7B

2.5. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Définition (limite = limite épointée) Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ et x^* un point d'accumulation de $D \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f admet pour limite (épointée) $\underline{\ell} \in \mathbb{R}^m$ lorsque x tend vers $x^* \in \mathbb{R}^n$, si pour toute suite $(x_k)_{k \geq 0}$, $x_k \in D \setminus \{x^*\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ la suite $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k = f(x_k)$ converge et $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \underline{\ell}$ (le même $\underline{\ell}$ pour toutes les suites!)

Notation $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^*} f(\underline{x}) = \underline{\ell}$
 $(\underline{x} \neq \underline{x}^*)$ — si on veut souligner que c'est la limite épointée

Définition: (continuité) une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est continue en $\underline{x}^* \in D$, si $\underline{x}^*$ est un point isolé de D , ou si

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^*} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^*) \quad (\text{existence de la limite et égalité avec la valeur } f(\underline{x}^*))$$

2.6. Autres normes sur $\mathbb{R}^n$

Proposition: les fonctions $\|\cdot\|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définies pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty[$ par

$$\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

et pour $p = \infty$ par

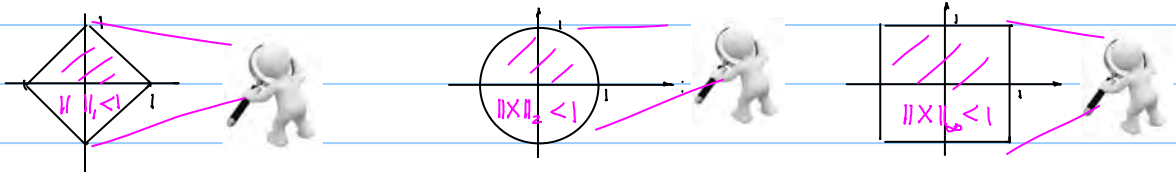
$$\|\underline{x}\|_\infty := \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}$$

définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

┌ Démonstration: voir série 8B. ─

Notation: $\|\underline{x}\|_2 \equiv \|\underline{x}\|$ (la norme Euclidienne)

Illustration:



Boule ouverte centrée en zéro de rayon $r=1$, dans les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

Estimation d'une norme par une autre

$n=1$: $\|\underline{x}\|_2 = \|\underline{x}\|_\infty = \|\underline{x}\|_1$, même chose à chaque fois

$n=2$: soit $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\textcircled{1} \quad \|\underline{x}\|_1 = |x| + |y| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2|x||y|} \geq \sqrt{x^2 + y^2} = \|\underline{x}\|_2$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{2} \|\underline{x}\|_2 = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2 + \underbrace{(|x| - |y|)^2}_{\geq 0}} \geq$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{\sqrt{2}} \|\underline{x}\|_1 \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \|\underline{x}\|_2 \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \|\underline{x}\|_1 \quad \Rightarrow |x| + |y| = \|\underline{x}\|_1$$

$$(\Leftrightarrow \|\underline{x}\|_2 \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \|\underline{x}\|_1 \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \sqrt{2} \|\underline{x}\|_2)$$

Définition: deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un espace vectoriel V sont dites équivalentes, s'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour tout $\underline{x} \in V$

$$C_1 \|\underline{x}\|_a \leq \|\underline{x}\|_b \leq C_2 \|\underline{x}\|_a$$

Théorème: sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes
et en particulier, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1$$

$$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\underline{x}\|_\infty$$

Voir la série 4A

Proposition 2.6 soit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$
une suite dans $\mathbb{R}^n$ et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Alors:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{a} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i, \quad i=1, \dots, n.$$

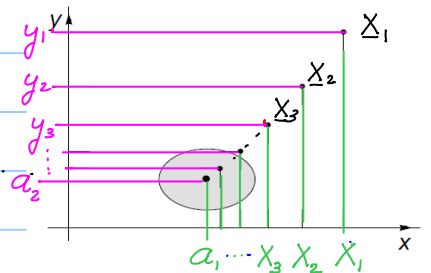
définie avec la
norme Euclidienne:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, \text{ t.q. } \forall k \geq k_0$$

$$\|\underline{x}_k - \underline{a}\| \leq \varepsilon.$$

convergence des suites
des composantes

Illustration ($n=2$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$, $\underline{a} = (a_1, a_2)$).



Démonstration

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |x_{k,i} - a_i| &\leq \max_i |x_{k,i} - a_i| = \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_\infty \leq \\ &\leq \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow \quad \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_2 &\leq \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_{k,i} - a_i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\quad \text{un nombre fini de termes } \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \forall i \end{aligned}$$

Définition (continuité, ε - δ)

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\underline{x}^* \in D$. Alors f est dite continue en $\underline{x}^*$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.q.
 $\forall \underline{x} \in D$

$$\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)\| \leq \varepsilon$$

Remarques:

- f est continue en $\underline{x}^*$ indépendamment du choix des normes dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Pourquoi?
- on devrait s'attendre que la bonne définition serait de demander $0 < \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta$ (comme pour la limite épointée), mais pour les points d'accumulation $\in D$ ceci ne change pas la définition, car $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) = 0$ si $\underline{x} = \underline{x}^*$ et l'implication est trivialement satisfaite. De plus, cette définition inclut la continuité pour $\underline{x}^*$ un point isolé. (voir la définition avec les suites).
- on peut écrire $\dots < \varepsilon$ et $\dots < \delta$ au lieu de $\dots \leq \varepsilon$ et $\dots \leq \delta$, sans que ça change la définition (pourquoi?).

Proposition soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors $\|\cdot\|$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration avec les suites voir série 4A

Démonstration avec ε - δ

Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.g. $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$(\|x - x^*\| \leq \delta) \Rightarrow |\|x\| - \|x^*\|| \leq \varepsilon.$$

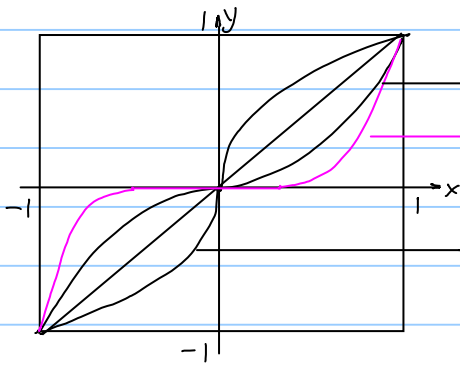
← norme dans $\mathbb{R}$.

car, avec $\delta = \varepsilon$ et la propriété iv) de la norme on a.

$$|\|x\| - \|x^*\|| \leq \|x - x^*\| \leq \delta = \varepsilon.$$

La norme sous étude. Si on veut utiliser la norme Euclidienne, on utilise qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq C \|x\|_2$, puis on pose, donné $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{1}{C} \varepsilon$.

Fonctions réciproques



$y = x^3$; fonction strictement monotone
fonction monotone.

$$y = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \equiv I$$

$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

- continue sur I
- dérivable sur I
- continûment dérivable sur I
- monotone
- strictement monotone
- bijective
- $\exists f^{-1}$ (existence d'une fonction réciproque)
- f^{-1} continue sur I .
- f^{-1} n'est pas dérivable en $x=0$ (donc pas dérivable sur I)

Théorème (de la bijection)

Soient I_1 et I_2 deux intervalles fermés, et $f: I_1 \rightarrow I_2$ une fonction continue, strictement monotone et surjective. Alors, f admet une fonction réciproque, $f^{-1}: I_2 \rightarrow I_1$, et f^{-1} est une fonction continue strictement monotone et surjective.

Démonstration: voir Analyse I

Théorème

Soient I_1, I_2 et f comme dans le théorème précédent.
 Si de plus f est continument dérivable sur I_1 ,
 et si $\forall x \in I_1, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est continument dérivable sur I_2 .

┌ Démonstration: voir Analyse I ─┐

Remarques:

- $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, définie par $f(x) = x^3$ satisfait les conditions du théorème de la bijection, mais pas celles du deuxième théorème car $f'(0) = 0$.
- l'exemple standard d'une fonction dérivable en tout point d'un intervalle fermé, mais qui n'est pas continument dérivable est

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

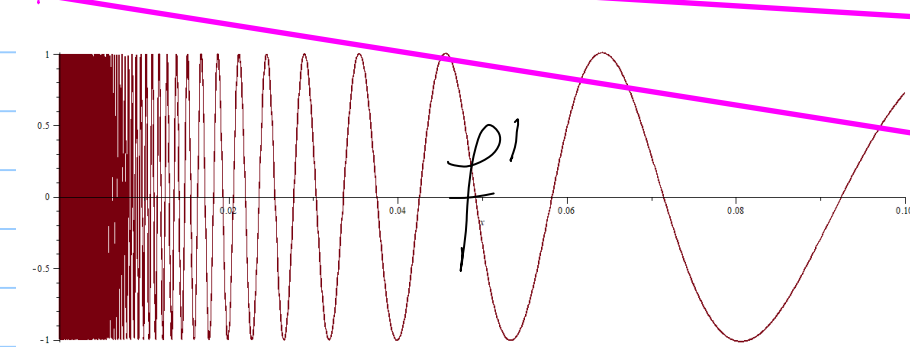
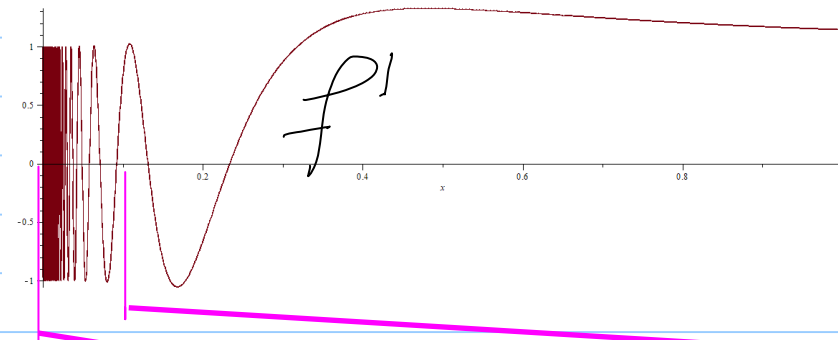
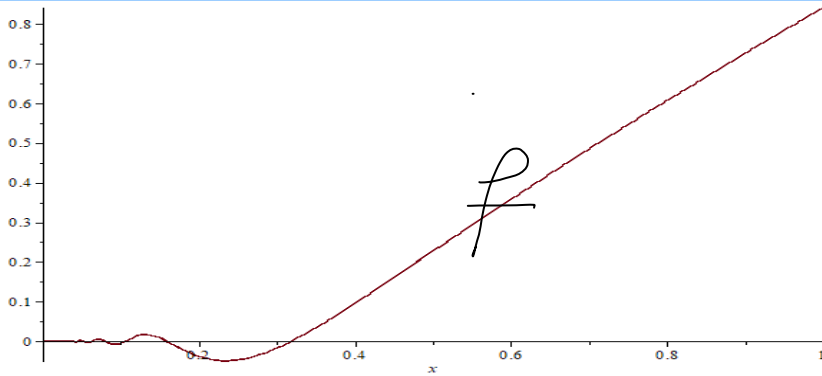
On trouve.

$$f': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \cdot \sin(\frac{1}{h}) \right) = 0$$

mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ n'existe pas.



Definition (continuité, ε - δ)

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\underline{x}^* \in D$. Alors f est dite continue en $\underline{x}^*$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.q.
 $\forall \underline{x} \in D$

$$\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)\| \leq \varepsilon$$

Proposition soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors $\|\cdot\|$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration avec ε - δ

Soit $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.q. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$(\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta) \Rightarrow |\|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\|| \leq \varepsilon.$$

← norme dans $\mathbb{R}$.

car, avec $\delta = \varepsilon$ et la propriété iv) de la norme on a.

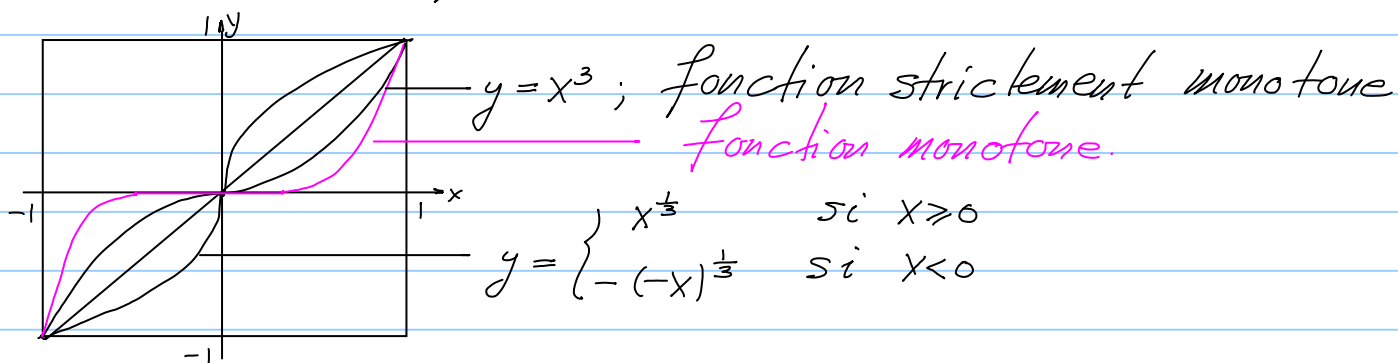
$$|\|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\|| \leq \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta = \varepsilon.$$

la norme sous étude.

Si dans la définition de la continuité on veut utiliser la norme Euclidienne il faut utiliser qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{x}\| \leq C \|\underline{x}\|_2$, puis on pose, donné $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{1}{C} \varepsilon$:

$$\begin{aligned} |\|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\|| &\leq \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq C \|\underline{x} - \underline{x}^*\|_2 \leq \\ &\leq C \delta = C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon \end{aligned}$$

Fonctions réciproques



$$f: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \equiv I$$

$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

- continue sur I
- dérivable sur I
- continûment dérivable sur I
- monotone
- strictement monotone
- bijective
- $\exists f^{-1}$ (existence d'une fonction réciproque)
- f^{-1} continue sur I .
- f^{-1} n'est pas dérivable en $x=0$ (donc pas dérivable sur I)

Théorème (de la bijection)

Soient I_1 et I_2 deux intervalles fermés, et $f: I_1 \rightarrow I_2$ une fonction continue, strictement monotone et surjective. Alors, f admet une fonction réciproque, $f^{-1}: I_2 \rightarrow I_1$, et f^{-1} est une fonction continue strictement monotone et surjective.

Démonstration: voir Analyse I

Théorème

Soient I_1, I_2 et f comme dans le théorème précédent.
 Si de plus f est continument dérivable sur I_1 ,
 et si $\forall x \in I_1, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est continument dérivable sur I_2 .

┌ Démonstration: voir Analyse I ─┐

Remarques:

- $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, définie par $f(x) = x^3$ satisfait les conditions du théorème de la bijection, mais pas celles du deuxième théorème car $f'(0) = 0$.
- l'exemple standard d'une fonction dérivable en tout point d'un intervalle fermé, mais qui n'est pas continument dérivable est

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

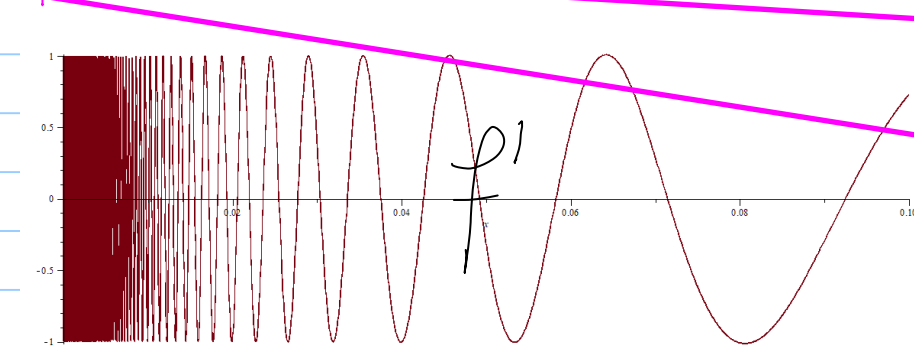
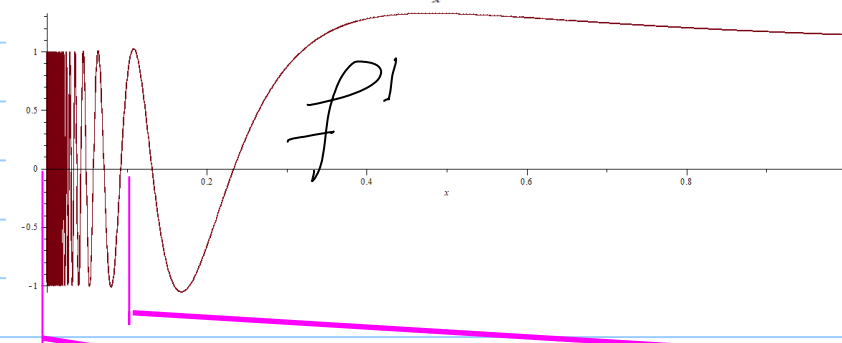
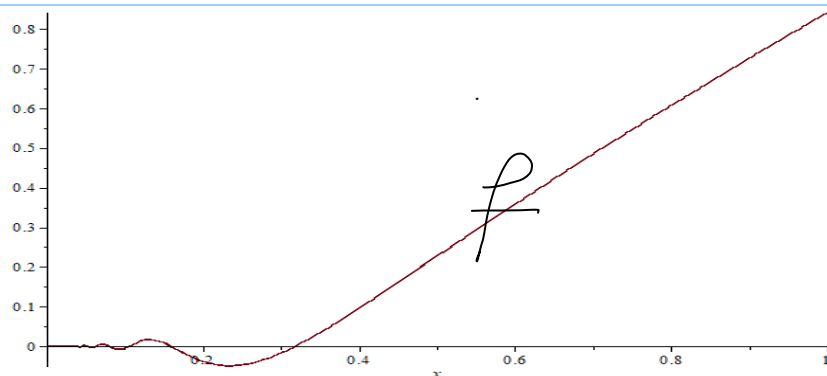
On trouve.

$$f': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \cdot \sin(\frac{1}{h}) \right) = 0$$

mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ n'existe pas.



INTERMEZZO

3. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$ transposée
 $x \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$

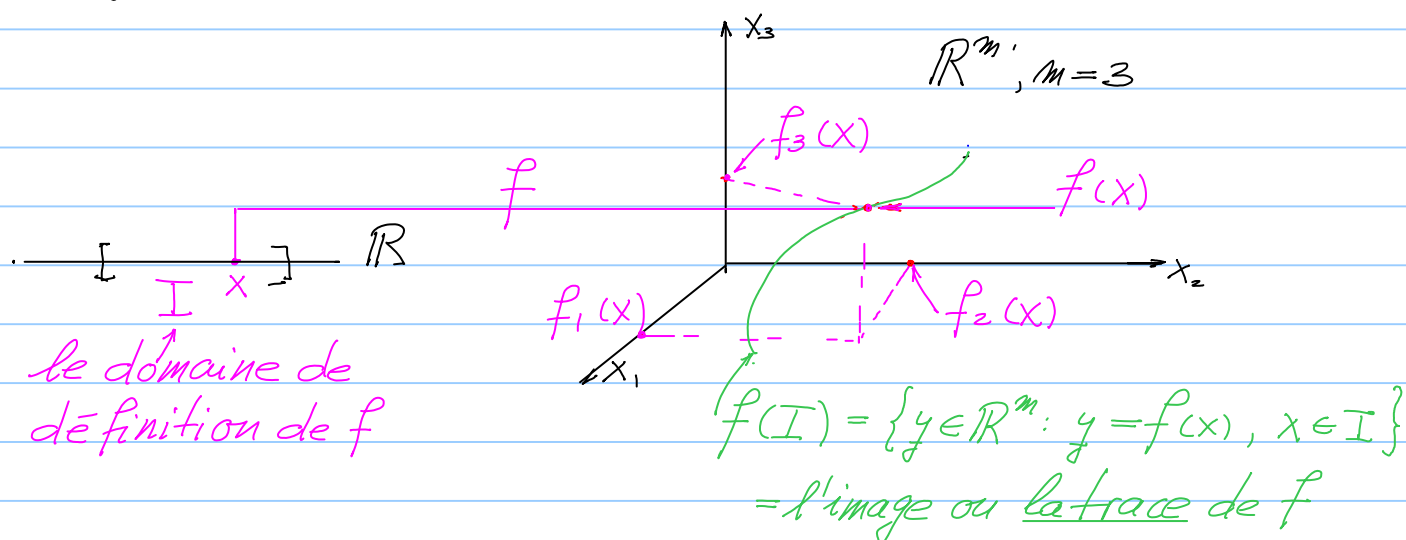
avec $f_i: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$ les composantes de f .

3.0. Fonctions continues

Définition: une fonction continue $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé) est appelée un chemin, ou une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^m$.

Remarque: la proposition 2.6 implique qu'une fonction $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ est continue en un point $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i , $i=1, \dots, m$, sont toutes continues en $x \in I$ (ou sur I).

Image d'une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle

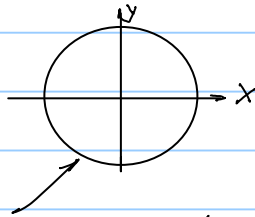


Définition: l'image f s'appelle aussi la trace de f
 d'un chemin

Exemple 1 $f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))^T$

$g: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$

$f \neq g$ mais la trace de f = la trace de g .



$\text{trace}(f) = \text{trace}(g)$

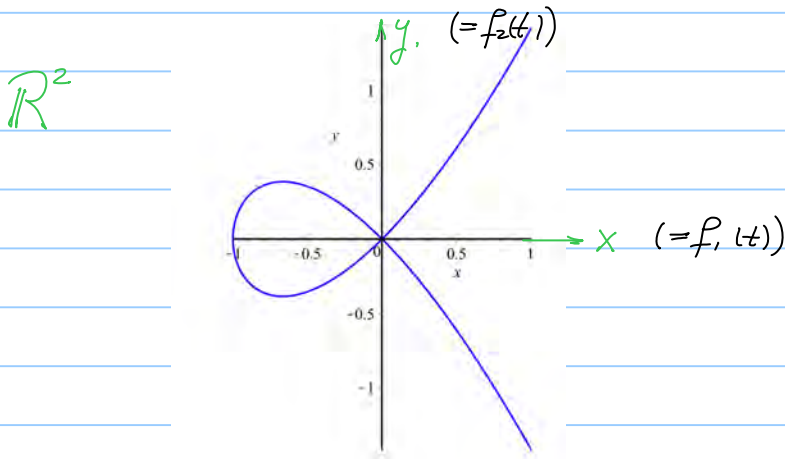
Exemple 2

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$t \longmapsto f(t) = (\underbrace{t^2 - 1}_{f_1(t)}, \underbrace{t^3 - t}_{f_2(t)})^T$

Trace de f ($\equiv$ image de f) $\subset \mathbb{R}^2$

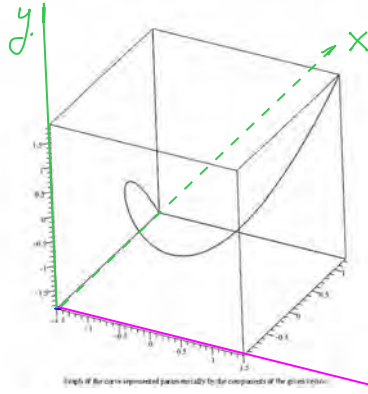
$\text{Im}(f) = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x, y)^T = f(t), t \in \mathbb{R} \}$



Graphe ($\equiv$ graphique) de f $\subset \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2}_{\psi} \xrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^3$ (noté $T^1(f)$)
 $(t, (x, y)^T)$

On écrit $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

$$T(f) = \{ (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : (x, y)^T = f(t) \}$$



voir maple oo. mws.

Definition:

m est fixe

Soit $\mathcal{C} := \{ \text{tous les chemins dans } \mathbb{R}^m \}$

Deux chemins $f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont équivalents, $f \sim g$, s'il existe une fonction continue, strictement monotone et surjective $w: I_1 \rightarrow I_2$ telle que $\forall t_1 \in I_1, g(w(t_1)) = f(t_1)$

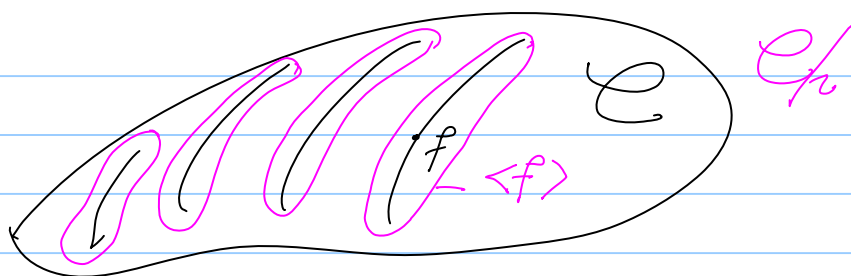
i) réflexive $\forall t_1 \in I_1, \overset{w(t_1)}{f(t_1)} = f(t_1)$ (choisir $w(t_1) = t_1$).
 $\underbrace{f \sim f}$

ii) symétrique $\forall t_1 \in I_1, g(w(t_1)) = f(t_1) \Leftrightarrow \forall t_2 \in I_2, \underbrace{f(w^{-1}(t_2))}_{g \sim f} = g(t_2)$
 $\underbrace{f \sim g}$

iii) transitive $\forall t_1 \in I_1, g(w_1(t_1)) = f(t_1)$ et $\forall t_2 \in I_2, \underbrace{h(w_2(t_2))}_{g \sim h} = g(t_2)$
 $\underbrace{f \sim g \text{ avec } w_1} \quad \underbrace{g \sim h \text{ avec } w_2}$

$$\Rightarrow \forall t_1 \in I_1, \underbrace{h(w_2(w_1(t_1)))}_{=(w_2 \circ w_1)(t_1)} = g(w_1(t_1)) = f(t_1)$$

ce qui veut dire que $f \sim h$ avec $w_2 \circ w_1: I_1 \rightarrow I_3$,
(continue, strictement monotone et surjective).



Definition : une classe d'équivalence de chemins est appelée une courbe continue, et on note $\langle f \rangle$ la classe d'équivalence qui contient f

Terminologie : soit γ une courbe continue. On appelle $f \in \gamma$ aussi une paramétrisation de la courbe continue γ

3.1. Fonctions dérivables (ou différentiables)

Définition (provisoire) :

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (*)$$

"moins" entre deux vecteurs

définition "usuelle"
de la dérivée en un point

Proposition : soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé). Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, est dérivable en $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i , $i=1, \dots, m$ sont toutes dérivables en $x \in I$ (ou sur I)

Explication

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

↑ par définition (*)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}, \dots, \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \right)^T$$

calcul dans l'espace vectoriel

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \right)^T$$

ceci est vrai par la proposition 2.6.

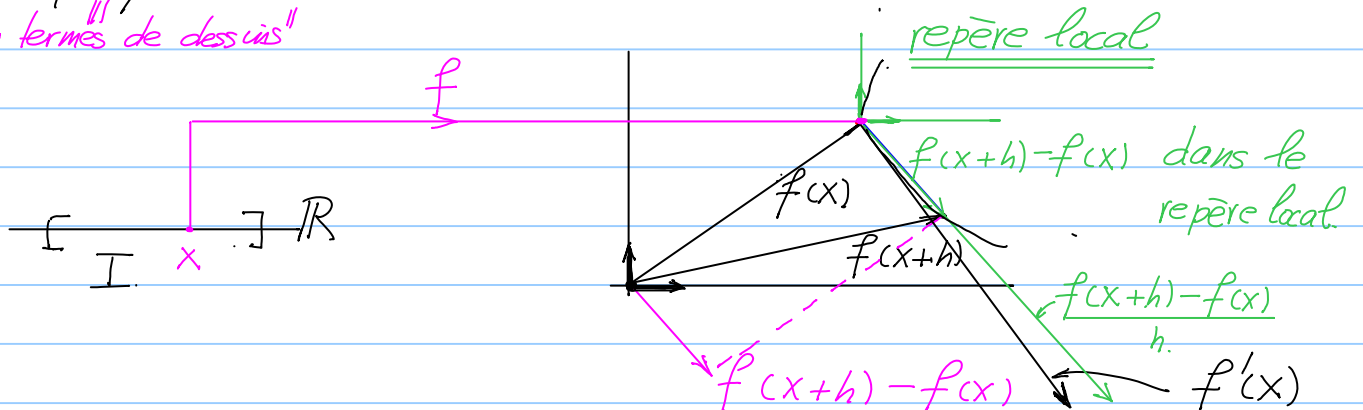
$$= (f'_1(x), \dots, f'_m(x))^T$$

↑ par la définition de la dérivée pour $f_1, \dots, f_m$.

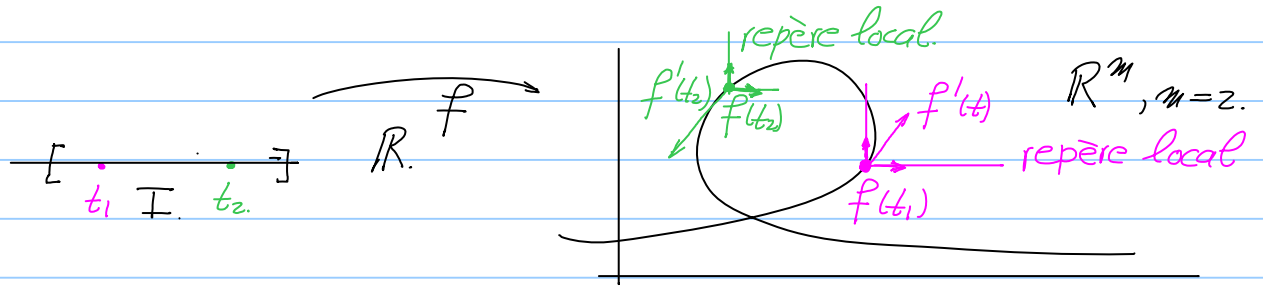
Interprétation: si on interprète $t \equiv x$ comme le temps et $f(t)$ comme la position d'un objet dans $\mathbb{R}^m$ ($m=3$ par exemple), alors $f'(t)$ est le vecteur de la vitesse instantanée de l'objet au temps t .

Graphiquement (calcul de la limite, $m=2$).

"en termes de dessins"



Remarque: graphiquement, pour illustrer $f'(t)$, on "attache" en $f(t) \in \mathbb{R}^m$ une copie (dite locale) de $\mathbb{R}^m$.



Longueur d'un chemin continûment dérivable

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a < b$, un chemin continûment dérivable sur $[a, b]$ (c'est-à-dire $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ avec $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables). Alors sa longueur $l \in \mathbb{R}$ est par définition:

$$l := \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Annotations:
 - "on suppose f' continue" (pointing to the integrand)
 - "la norme est une fonction continue de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ " (pointing to the norm symbol)
 - "la norme Euclidienne" (pointing to the norm symbol)

Remarque: comme sur l'ensemble des chemins continus on peut définir des classes d'équivalence sur l'ensemble des chemins continûment dérivables (demander que $w: I_1 \rightarrow I_2$, qui définit l'équivalence soit de classe C^1 et tel que $\forall t_i \in I_1$, $w'(t_i) \neq 0$). Les classes d'équivalence sont appelées courbes de classe C^1 .

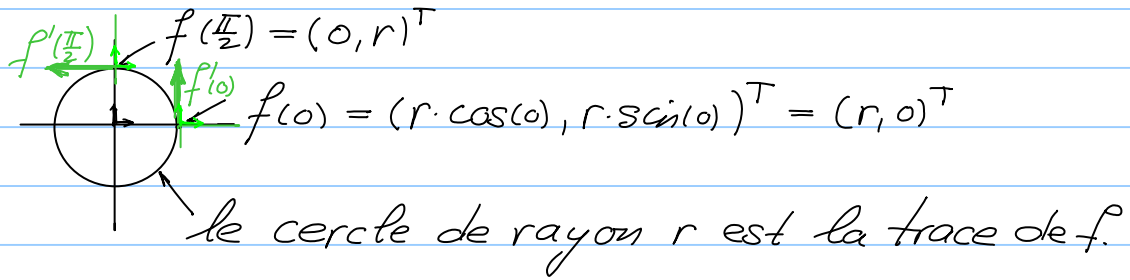
Remarque: soit γ une courbe de classe C^1 . Alors

$$|\gamma| := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (\text{longueur de } \gamma)$$

avec $\gamma \in \gamma$ une paramétrisation continûment dérivable quelconque. Différentes paramétrisations donnent la même longueur, car changer la paramétrisation de la courbe revient à faire un changement de variables dans l'intégrale Le vérifier!

Exemples:

1) $I = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, $r > 0$, $f(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))^T \in \mathbb{R}^2$



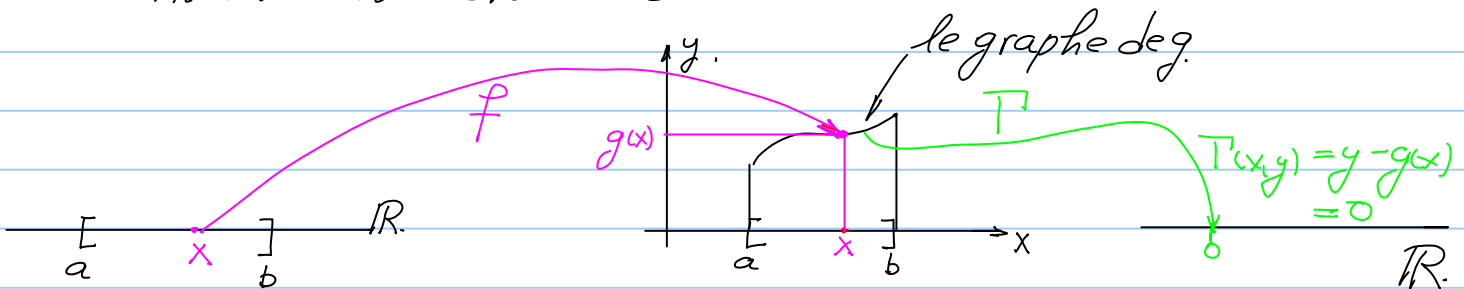
On a $f'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))^T$

Par exemple $f'(0) = (0, r)^T$
 $f'(\frac{\pi}{2}) = (-r, 0)^T$ } voir le dessin (dans des repères locaux)

Puisque $\|f'(t)\| = \sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2} = r$
 on trouve pour la longueur du chemin

$$l = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

2) Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a < b$ une fonction continûment dérivable



Le graphe de g est aussi la trace du chemin

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (x, g(x))^T$$

On a $f'(x) = (1, g'(x))^T$ et $\|f'(x)\| = \sqrt{1 + g'(x)^2}$

La longueur du graphe de g est donc

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

longueur du graphe d'une fonction $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Paramétrisation par la longueur d'arc

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a < b$, une paramétrisation continument dérivable d'une courbe γ de classe C^1 telle que $\forall t \in [a, b]$, $f'(t) \neq 0$, et soit la fonction $w: [a, b] \rightarrow [0, |\gamma|]$ définie par

$$w(t) := \int_a^t \|f'(r)\| dr = \begin{cases} \text{longueur parcourue} \\ \text{jusqu'au temps } t. \end{cases}$$

w est bijective et de classe C^1 , et puisque $\forall t \in [a, b]$, $f'(t) \neq 0$ on a que $w'(t) = \|f'(t)\| \neq 0$, et la fonction réciproque $\sigma = w^{-1}$ est donc aussi de classe C^1 . (voir le Intermezzo).

Définition: le chemin $c(s) = f(w^{-1}(s)) = f(\sigma(s))$, $s \in [0, |\gamma|]$ est appelé la paramétrisation canonique de la courbe γ . On a.

$$c'(s) = f'(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) = f'(\sigma(s)) \frac{1}{w'(\sigma(s))} = \frac{1}{\|f'(\sigma(s))\|} f'(\sigma(s))$$

Définition: (intégrale curviligne)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une paramétrisation continument différentiable d'une courbe γ de classe C^1 et soit $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. L'intégrale.

$$W := \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t) \rangle dt$$

$\nearrow$ produit scalaire euclidien.

dans une copie locale de $\mathbb{R}^m$ en $f(t)$.

est appelée intégrale curviligne de F le long de la courbe γ , et l'on écrit symboliquement

$$W = \int_{\gamma} F(r) \cdot dr \quad (\text{ou similaire}).$$

Remarque: W est indépendant de la paramétrisation au signe de l'orientation près. (à montrer !)

4. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

4.1. Introduction, définitions, exemples ($n=2$)

Exemple 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

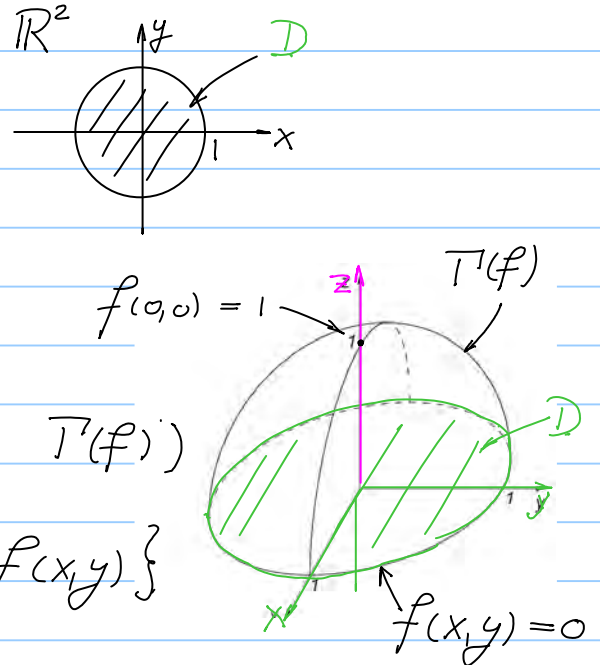
$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Im}(f) = [0, 1] \quad (\text{voir le graphe } T'(f))$$

$$T'(f) = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

$$f(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 1$$

$$f(0, 0) = 1$$



Exemple 2 (important ! voir série 5A, Échauffement 2.

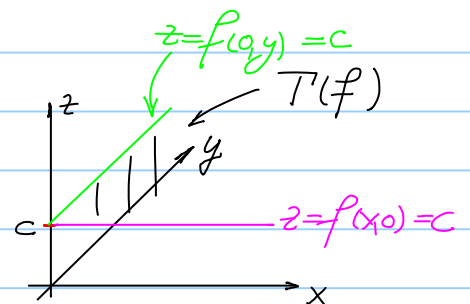
$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ donnés.}$$

$$T'(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

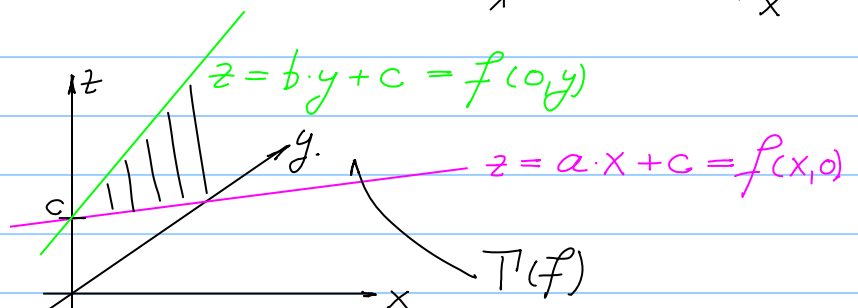
$$i) \quad a = b = 0, \quad f(x, y) = c, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Im}(f) = \{c\} \subset \mathbb{R}.$$



$$ii) \quad a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0,$$

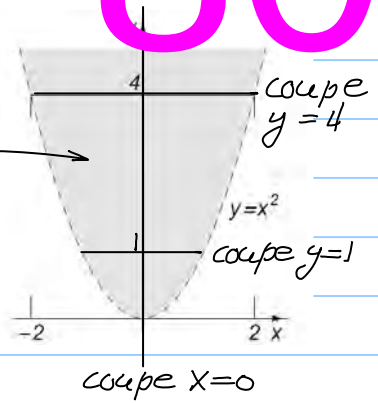
$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$



Exemple 3

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 < y\}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{xy - 1}{\sqrt{y - x^2}}$$

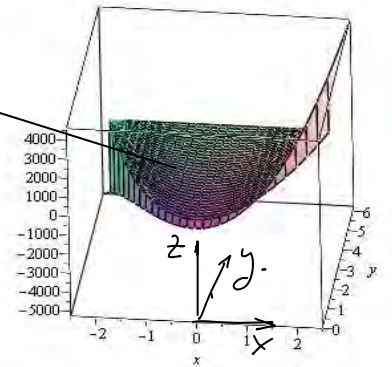
Remarque:

$D :=$ "le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x, y)$ est bien définie" + éventuellement des points par un prolongement par continuité

A noter que D est un sous-ensemble ouvert et non borné (pas sous-ensemble d'une boule)

$$T(f) = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R}: z = f(x, y)\}$$

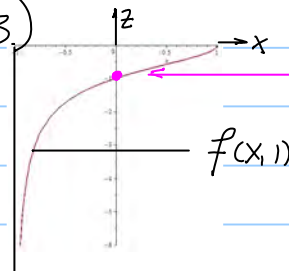
$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

4.2. Techniques d'illustration.

(illustrations pour l'exemple 3)

Coupe à $y=1$

$$f(x, 1) = \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x^2 < 1$$

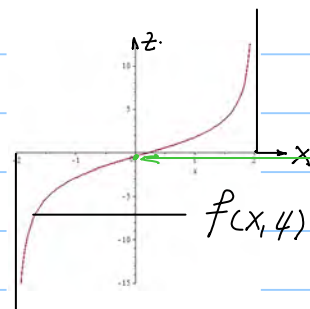


$$f(0, 1) = -1$$

les mêmes points
du graphe

Coupe à $y=4$

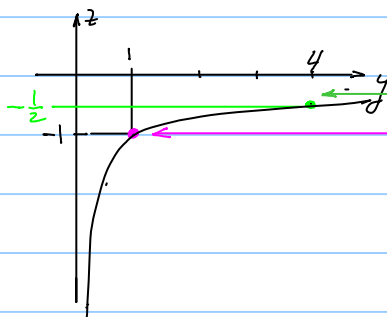
$$f(x, 4) = \frac{4x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad x^2 < 4$$



$$f(0, 4) = -\frac{1}{2}$$

Coupe à $x=0$

$$f(0, y) = \frac{-1}{\sqrt{y}}, \quad y > 0$$



4.3. Ensembles de niveau

Définition: soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}^n$, le domaine de définition de f , et soit $c \in \text{Im}(f)$. Alors l'ensemble

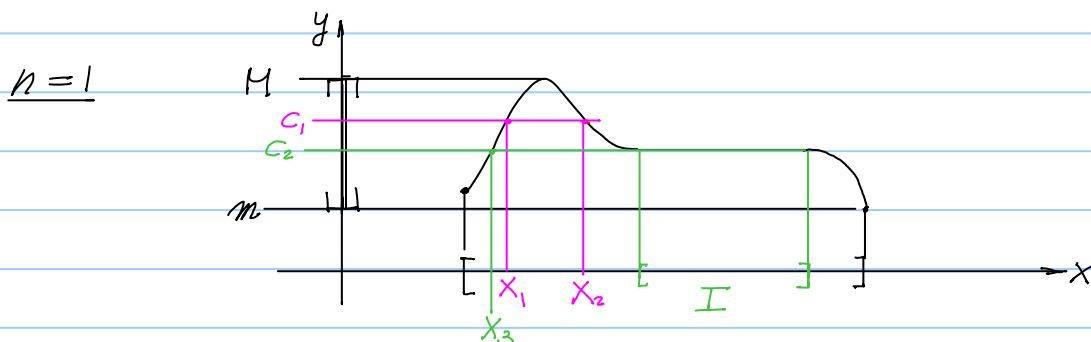
$$f^{-1}(c) := \{ \underline{x} \in D : f(\underline{x}) = c \} \quad c \in \mathbb{R}$$

est appelé l'ensemble (de niveau de f) de niveau c

Attention (abus de notation)

- ici $f^{-1}(c)$ est un sous-ensemble de D
- si f est une fonction bijective, $f^{-1}(c)$ est comme d'habitude l'unique élément $\underline{x} \in D$ tel que $f(\underline{x}) = f(f^{-1}(c)) = c$

Exemples



$$f^{-1}(c_1) = \{x_1, x_2\}$$

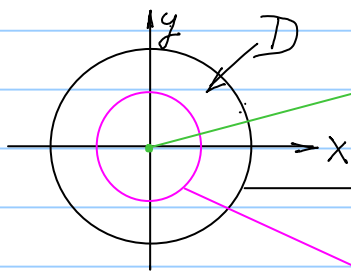
$$f^{-1}(c_2) = I \cup \{x_3\}$$

$n=2$: retour aux exemples 1-3 de la section 4.1

Exemple 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{Im}(f) = [0, 1]$$

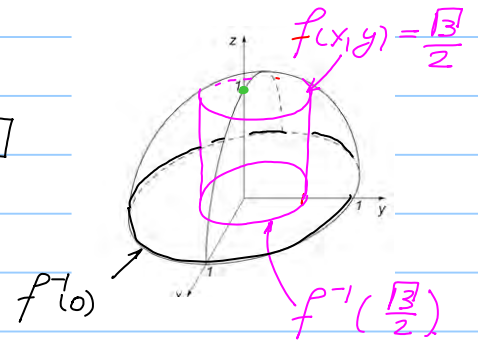


$$f^{-1}(1) = \{(0, 0)\}$$

$$f^{-1}(0) = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$



Exemple 2

$$D = \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ donnés}$$

i) $a = b = 0$, $\text{Im}(f) = \{c\}$

$$f^{-1}(c) = \mathbb{R}^2$$

ii) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \ni c^*$

$$f^{-1}(c^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = c^*\}$$

$$\Leftrightarrow ax + by + (c - c^*) = 0$$

ce sont des droites dans le plan (x, y) .

4.4. Limites et continuité (d'une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

Exemple 1: (opérations algébriques)

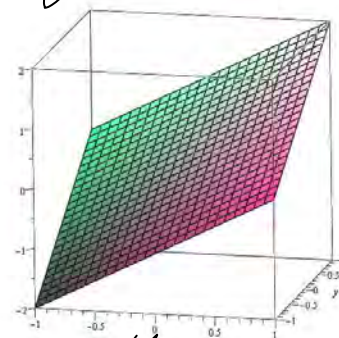
i) soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$

f est continue en chaque point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)} f(x, y) = f(x^*, y^*)$$

$$\parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$x + y \qquad \qquad x^* + y^*$$



moodle002.

Démonstration

avec les suites: soit (x_n, y_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$, et $(x_n, y_n) \neq (x^*, y^*)$. Alors

$$|(x_n + y_n) - (x^* + y^*)| = |(x_n - x^*) + (y_n - y^*)|$$

$$\leq \underbrace{|x_n - x^*| + |y_n - y^*|}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{par la proposition 2.6.}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

avec $\varepsilon - \delta$: on a

$$\|f(x, y) - f(x^*, y^*)\|_2 = |(x + y) - (x^* + y^*)|$$

$$\leq |x - x^*| + |y - y^*| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_2$$

donc, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ ($\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon$, par exemple) tel que

$$\left((x, y) \in \mathbb{D} = \mathbb{R}^2, \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\| \leq \delta \right) \Rightarrow (\|f(x, y) - f(x^*, y^*)\| \leq \varepsilon)$$

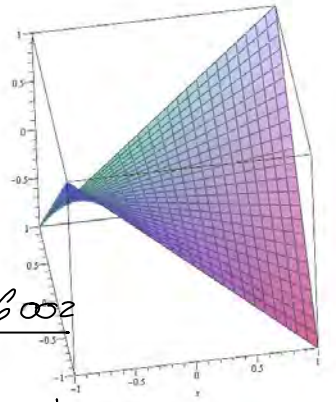
ii) soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x \cdot y$

f est continue en chaque point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)} f(x, y) = f(x^*, y^*)$$

$$\parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$x \cdot y \qquad \qquad x^* \cdot y^*$$



Démonstration:

mood6002

$$|x \cdot y - x^* \cdot y^*| = |(x - x^*)y + x^*(y - y^*)|$$

$$\leq |x - x^*| \cdot |y| + |x^*| |y - y^*| \quad (*)$$

Soit (x_n, y_n) une suite, $(x_n, y_n) \neq (x^*, y^*)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$

Il existe alors $C > 0$, tel que $\forall n, |y_n| \leq C$, car toute suite convergente est bornée. (voir série 4A)

En utilisant (*) on a donc

$$|x_n \cdot y_n - x^* \cdot y^*| \leq |x_n - x^*| \cdot C + |x^*| |y_n - y^*| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

par la proposition 2.6

Conséquence de i) et ii) et du fait que la fonction

$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Théorème Les fonctions polynôme de deux (ou plusieurs) variables, ainsi que les fonctions rationnelles de deux (ou plusieurs) variables sont toutes continues sur le domaine de définition de l'expression en question.

Exemple 2 (non existence d'une limite)

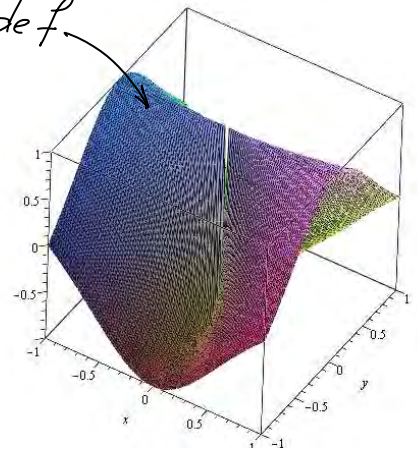
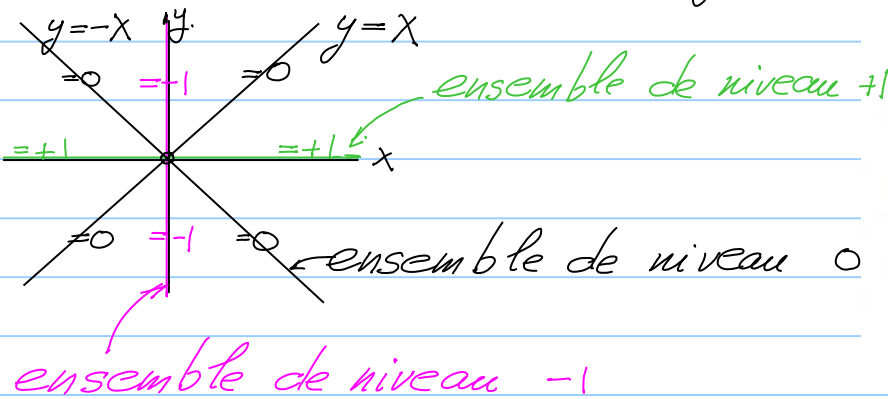
$$i) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \equiv \mathcal{D}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ?$$

f continue sur $\mathcal{D}$ (car f une fonction rationnelle)

Ensembles de niveau

graphe de f



la limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ n'existe pas, car pour

toute suite de la forme $(x_n, 0)$ telle que $x_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ on a

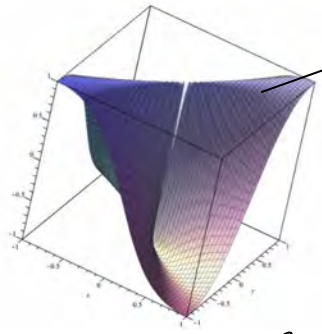
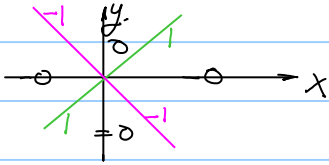
$$f(x_n, 0) = \frac{x_n^2 - 0^2}{x_n^2 + 0^2} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

par contre pour toute suite de la forme $(0, y_n)$ telle que $y_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ on a

$$f(0, y_n) = \frac{0^2 - y_n^2}{0^2 + y_n^2} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \neq 1.$$

$$ii) f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv \mathcal{D}$$

Ensembles de niveau



graphe de $f \equiv T(f)$
(voir aussi
Mapl002)

f continue sur $\mathcal{D}$ (car f une fonction rationnelle)

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas car

pour une suite de la forme (x_n, x_n) telle que $x_n \neq 0$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ on a

$$f(x_n, x_n) = \frac{2x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

par contre pour une suite de la forme $(x_n, -x_n)$
telle que $x_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ on a

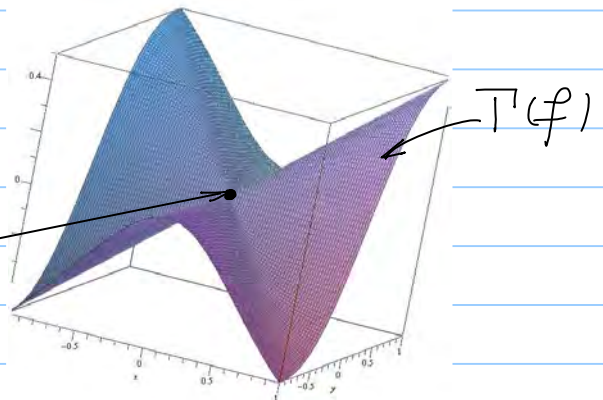
$$f(x_n, -x_n) = \frac{2x_n(-x_n)}{x_n^2 + (-x_n)^2} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \neq 1.$$

Exemple 3 (existence d'une limite)

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \mathcal{D}(f) \equiv \mathcal{D} = \mathbb{R}^2$$

f continue sur $\mathcal{D} \setminus \{(0,0)\}$, car
 f une fonction rationnelle.

Proposition: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$



Démonstration (deux techniques)

i) par une borne "adéquate"

$$\text{pour } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \quad |f(x,y)| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y|$$

$$\text{pour } x=0 \text{ et } y \neq 0 \quad f(x,y) = \frac{0^2 y}{0^2+y^2} = 0$$

$$\text{pour } x \neq 0, y=0 \quad f(x,y) = \frac{x^2 \cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$

En conclusion on a $|f(x,y)| \leq |y|$, $\forall (x,y) \in \mathbb{D} \setminus \{(0,0)\}$

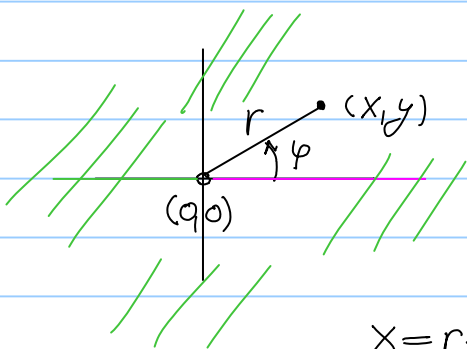
$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y) - 0| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)|$$

la valeur de
la limite.

$$\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$$

par la proposition 2.6.

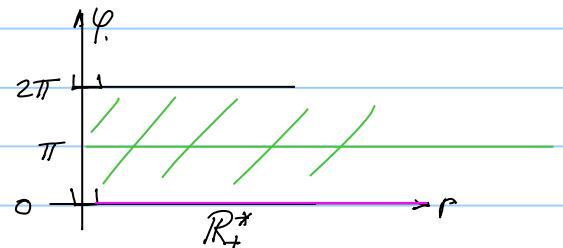
ii) par coordonnées polaires (par rapport à $(x^*, y^*) = (0,0)$)



$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

← bijective

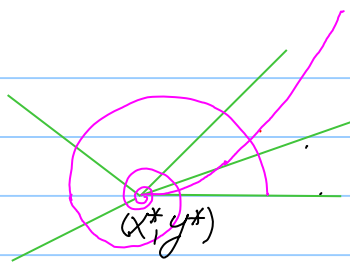


$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$$

$$\varphi = \begin{cases} 0, & y=0, x>0 \\ \pi + 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre exemple $(x^*, y^*) = (0,0)$. Pour toute suite (x_n, y_n) telle que $(x_n, y_n) \neq (x^*, y^*)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$ on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2} = 0$, mais φ_n peut varier d'une manière quelconque dans $[0, 2\pi[$.

Illustration:



Explication: différentes manières d'approcher (x^*, y^*) le long de droites ($\varphi_n = \text{const.}$ en coordonnées polaires), ou par d'autres manières ($\varphi_n = \text{quelconque}$ en coordonnées polaires).

Dans notre exemple, donnée une suite arbitraire telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, $r_n > 0$ (mais φ_n arbitraires !) on a.

$$|f(x_n, y_n)| = |f(r_n \cdot \cos(\varphi_n), r_n \cdot \sin(\varphi_n))|$$

dans notre exemple

$$\left| \frac{r_n^2 \cos(\varphi_n)^2 \cdot r_n \sin(\varphi_n)}{r_n^2} \right|$$

$$= |r_n \cdot \cos(\varphi_n)^2 \cdot \sin(\varphi_n)| \leq r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

celle borne est vraie pour toutes les suites φ_n

$\exists C, \forall \varphi$
($C=1$ ici)

Prolongement par continuité (voir Analyse I)

La fonction

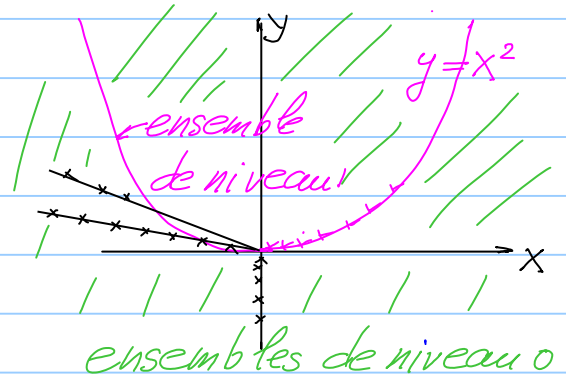
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4 (important ! il faut tester toutes les suites, c-à-d toutes les approches)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y = x^2 \\ 0 & \text{pour } y \neq x^2 \end{cases}$$



On a que $\forall \varphi \in [0, 2\pi[$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = 0 \quad (\text{donc toute approche avec } \varphi \text{ fixe})$$

mais la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas !, car

pour une suite de la forme (x_n, x_n^2) telle que $x_n \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, x_n^2) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0.$$

4.5. Dérivées partielles

4.5.1. Définitions

Remarque: les dérivées partielles d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dépendent du choix des coordonnées. Il est donc indispensable de préciser le choix des variables de la fonction.

Idee: la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est la dérivée par rapport à une des variables, les autres variables étant gardées constantes

Définition pour le cas $n=2$ (dérivées partielles en un point)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $(x_0, y_0) \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. La dérivée partielle de f en (x_0, y_0) par rapport à la variable x est le nombre

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

↑ limite dans $\mathbb{R}^*$

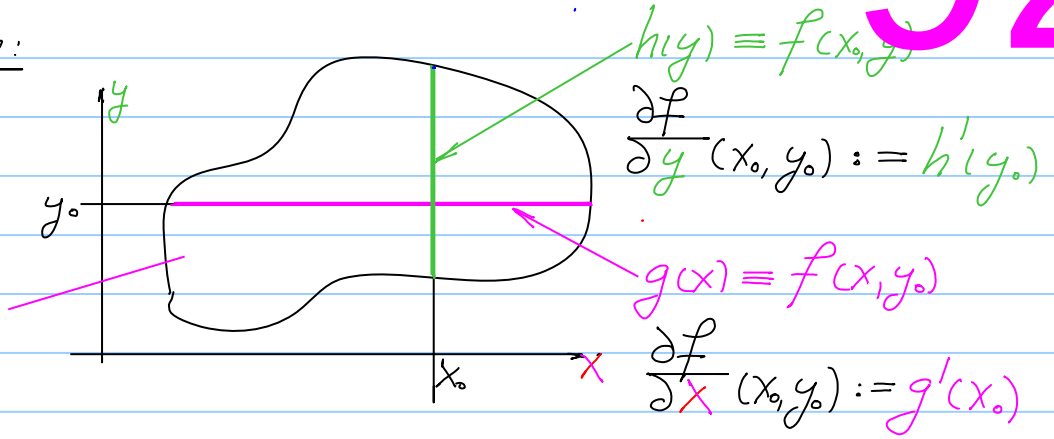
et la dérivée partielle de f en (x_0, y_0) par rapport à la variable y est le nombre

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

*) Voir aussi la Série 5A, Exercice 9

Explication:

le domaine
de f et le
choix des
coordonnées



$g(x) \equiv f(x, y_0)$ est définie sur la ligne _____

$h(y) \equiv f(x_0, y)$ est définie sur la ligne |

Voir le dessin 3d plus loin et les paragraphes
à suivre pour des interprétations de ces nombres

Notations équivalentes

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}, \quad \partial_x f(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

$$D_x f(x_0, y_0), \quad \partial_1 f(x_0, y_0), \quad D_1 f(x_0, y_0), \quad \cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} \text{ à éviter}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}, \quad \partial_y f(x_0, y_0), \quad f'_y(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0)$$

$$D_y f(x_0, y_0), \quad \partial_2 f(x_0, y_0), \quad D_2 f(x_0, y_0), \quad \cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} \text{ à éviter}$$

Définition: soit $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$,
 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est
 ouvert. La dérivée partielle de f en
 $\underline{x}_0 \in \mathcal{D}$ par rapport à la variable x_k
 est le nombre:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h \cdot e_k) - f(\underline{x}_0)}{h}, \quad k=1, \dots, n$$

où $e_k = (0, \dots, 0, \overset{\text{position } k}{1}, 0, \dots, 0)^T$ est le k -ème vecteur
 de base de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notations équivalentes

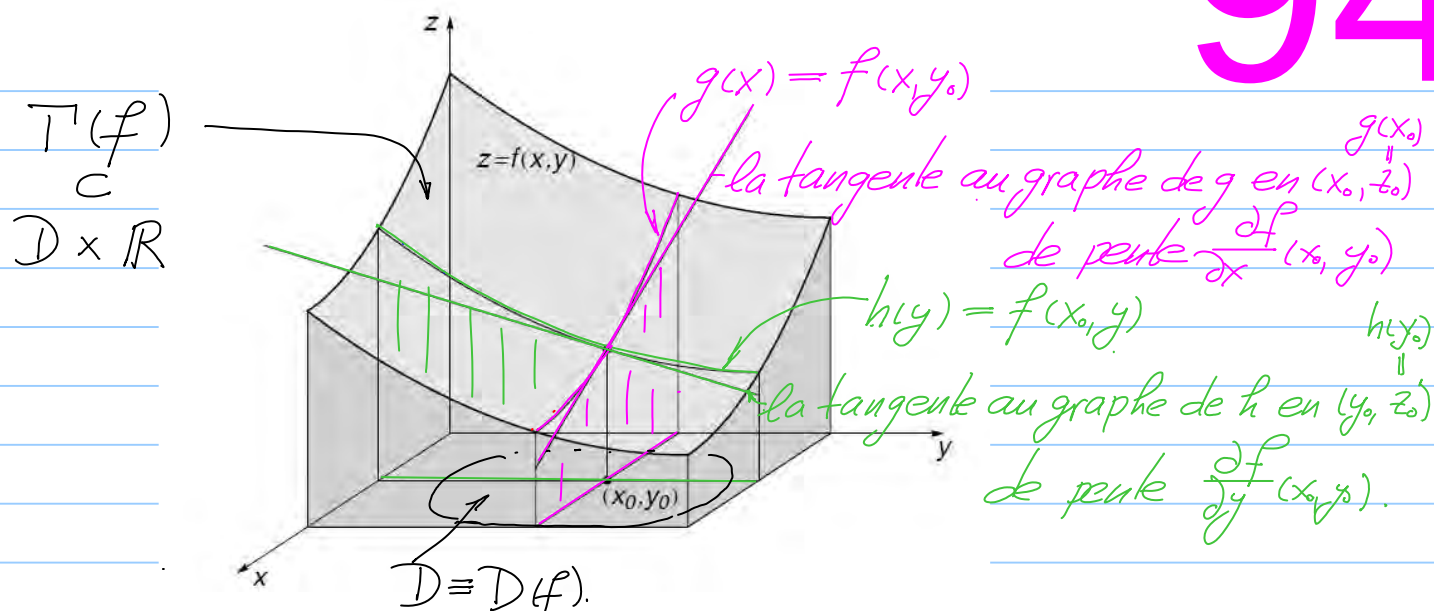
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}, \quad \partial_{x_k} f(\underline{x}_0), \quad f'_{x_k}(\underline{x}_0), \quad f_{x_k}(\underline{x}_0), \quad D_k f(\underline{x}_0),$$

$$\partial_k f(\underline{x}_0), \quad \cancel{\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_k}} \quad \text{à éviter.}$$

4.5.2. Interprétation géométrique (dessin pour $n=2$)

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente de la
 tangente au graphe de la fonction $g(x) = f(x, y_0)$
 en (x_0, z_0) , $z_0 = g(x_0) = f(x_0, y_0)$, et la dérivée

partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente
 au graphe de la fonction $h(y) = f(x_0, y)$ en (y_0, z_0) ,
 avec $z_0 = h(y_0) = f(x_0, y_0)$



4.5.3. Le gradient

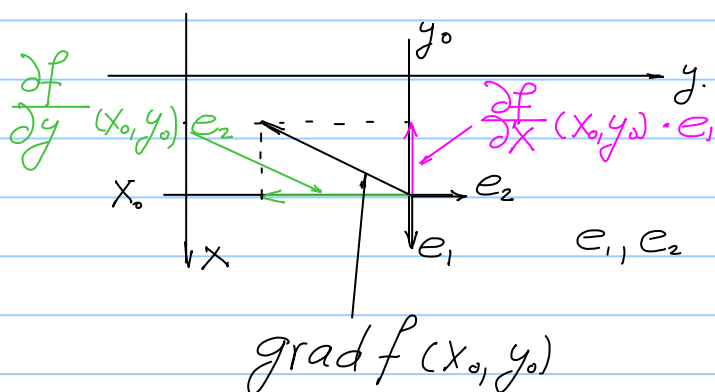
Définition: soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$,
 où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, et soit $x_0 \in D$
 Le vecteur.

$$\nabla f(x_0) \equiv \text{grad } f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)^T$$

$\nabla \equiv$ "Nabla" 

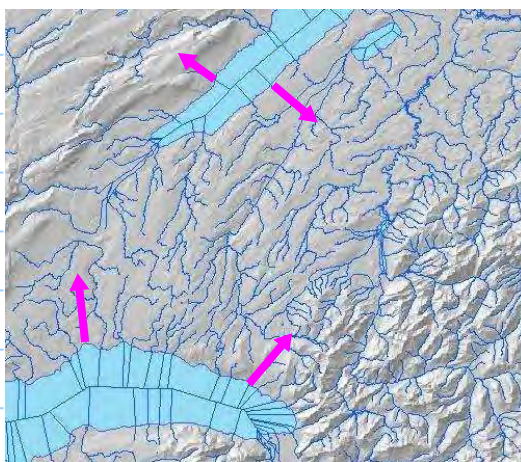
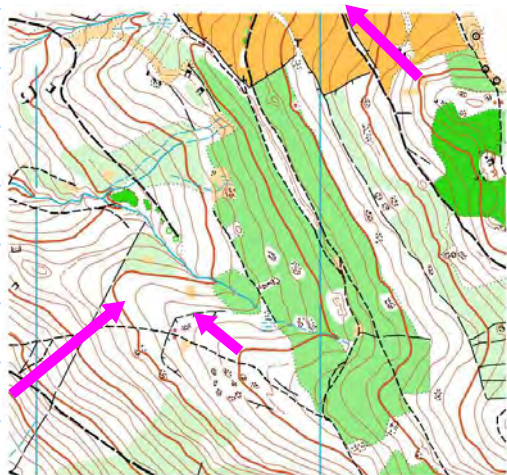
est appelé le gradient de f en x_0 .

Représentation graphique (dans l'exemple)



$e_1, e_2 =$ repère d'une copie locale de $\mathbb{R}^2$

Nous verrons que pour une fonction différentiable (voir plus loin pour la définition) le gradient indique, dans le domaine de définition de la fonction f , la direction de la pente la plus forte (positive). La norme du gradient est égale à cette pente.



4.5.4. Vecteurs tangents (cas $n=2$)

Si les fonctions $g(x) := f(x, y_0)$ et $h(y) := f(x_0, y)$ sont de classe C^1 , alors les fonctions

$$\alpha(x) := (x, y_0, g(x))^T \longleftrightarrow \text{graphe de } g \subset \mathbb{R}^3$$

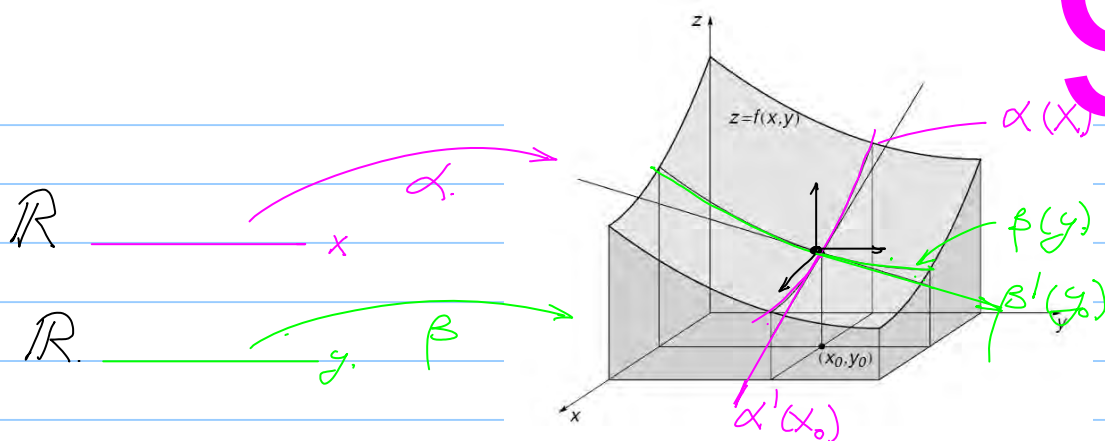
$$\beta(y) := (x_0, y, h(y))^T \longleftrightarrow \text{graphe de } h \subset \mathbb{R}^3$$

sont des paramétrisations de courbes de classe C^1 et on a

$$\alpha'(x_0) = (1, 0, g'(x_0))^T = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))^T$$

$$\beta'(y_0) = (0, 1, h'(y_0))^T = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))^T$$

Ces vecteurs vitesse sont des vecteurs dans une copie locale de $\mathbb{R}^3$ attachée en le point (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$.



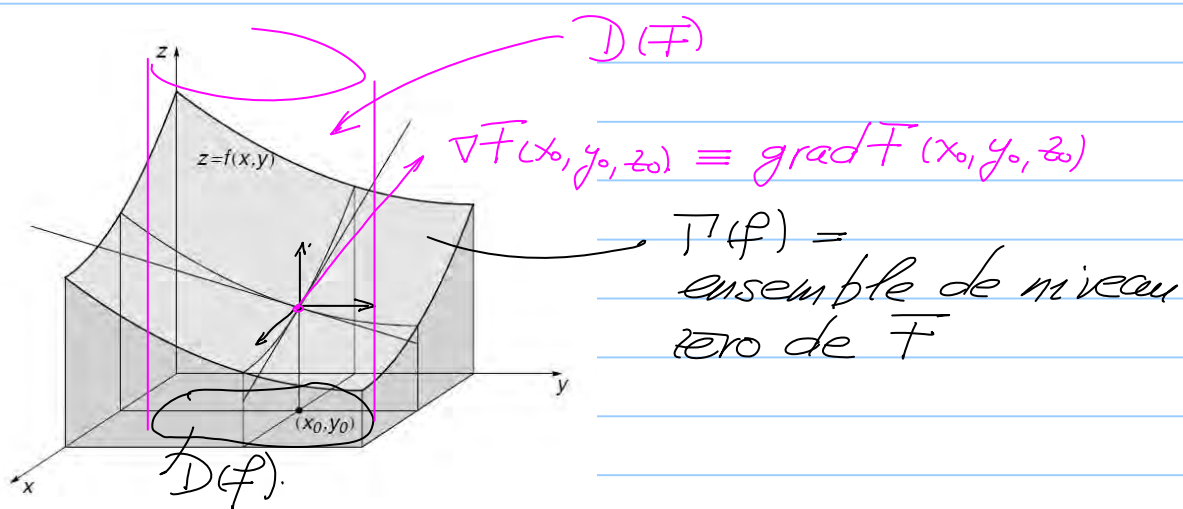
4.5.5. Gradient d'une fonction auxiliaire

Soit $F: D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{F}(x, y, z) = z - f(x, y).$$

Alors l'ensemble de niveau zéro de $\bar{F}$ est le graphe de f et on a en $(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=z_0}) \in \underline{D(\bar{F})}$

$$\text{grad } \bar{F}(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right)^T$$



A noter que $\nabla \bar{F}(x_0, y_0, z_0)$ est par définition un vecteur dans le même repère local de $\mathbb{R}^3$ attaché en (x_0, y_0, z_0) que les vecteurs $\alpha'(x_0)$ et $\beta'(y_0)$ du paragraphe précédent et qu'il est orthogonal à ces vecteurs

4.5.6. Les fonctions dérivées partielles

Définitions ($n=2$) soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent pour tout $(x_0, y_0) \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}: D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Notations équivalentes (exemples)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \partial_x f, \quad f'_x, \quad f_x, \quad \partial_1 f, \quad D_1 f, \quad D_x f, \dots$$

Définition (n général) soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$,
 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0), \quad i=1, \dots, n,$$

existent pour tout $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + h e_i) - f(\underline{x})}{h}$$

$$i=1, \dots, n.$$

Exemple: soit la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 - y^2$$

Alors on a (règles de calcul habituelles):

$$\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

On a donc par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -2$

Test de compréhension: soit f comme dans l'exemple. Alors on peut s'amuser à définir la fonction

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto g(x, y) := \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

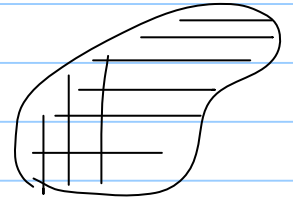
On trouve $g(x, y) = -2x$.

4.5.7. Deuxièmes dérivées partielles

Définition: soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}: D \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: D \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$



existent. Pour chacune de ces fonctions on peut alors étudier l'existence des dérivées partielles par rapport à x et y en $(x_0, y_0) \in D$ (calcul des limites). Si les nombres

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent pour tout $(x_0, y_0) \in D$ on peut définir les fonctions deuxièmes dérivées partielles, notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}: D \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

Remarque: souvent on écrit directement $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$

au lieu de $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ pour la valeur de la dérivée partielle de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x en (x_0, y_0) , etc.

Notations équivalentes (pour les fonctions deuxièmes dérivées partielles)

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}, \partial_x^2 f, f'_{xx}, f_{xx}, D_{xx}f, \text{ etc.}$$

Attention: l'interprétation de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ varie d'un auteur à l'autre. L'ordre des dérivées (pour nous d'abord par rapport à y puis par rapport à x) peut être échangé (voir par exemple dans Dz).

Heureusement: pour des fonctions de classe C^2 (à définir) on a que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. Voir la série 6A pour un contre-exemple !

4.5.8. Dérivées partielles du deuxième ordre (général)

Définition soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \quad , \quad j=1, \dots, n,$$

existent. Alors les fonctions des deuxièmes dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont définies en $\underline{x}_0 \in \mathbb{D}$ par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$$

$$:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0 + h \cdot \underline{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)}{h}$$

pour $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$.

Remarque: les deuxièmes dérivées partielles sont souvent arrangées dans un tableau (une matrice $n \times n$):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

qui est appelée la matrice hessienne de f en $\underline{x}_0$: $\text{Hess}(f)(\underline{x}_0)$.

Remarque: $\text{Hess}(f)(\underline{x}_0)$ peut être la transposée de cette matrice selon les auteurs.

Remarque: si f est suffisamment régulière (de classe C^2 , voir plus loin) on a

$$\text{Hess}(f)(\underline{x}_0) = \text{Hess}(f)(\underline{x}_0)^T$$

c.-à-d. la matrice est symétrique

4.5.9. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Par récurrence on peut définir des (fonctions) dérivées partielles de tout ordre.

Exemple: (ordre 3, une fonction de $n=2$ variables).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{h}\end{aligned}$$

Remarque: les fonctions rationnelles possèdent des dérivées partielles de tout ordre sur leur domaine de définition^{*}, et on a les règles de calcul habituelles pour les dérivées.

4.5.10. Exemples

^{*}) à l'exception éventuelle des points ajoutés par prolongement continu ($f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).

1) $f(x, y) = x^3 y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x y^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = 12xy$$

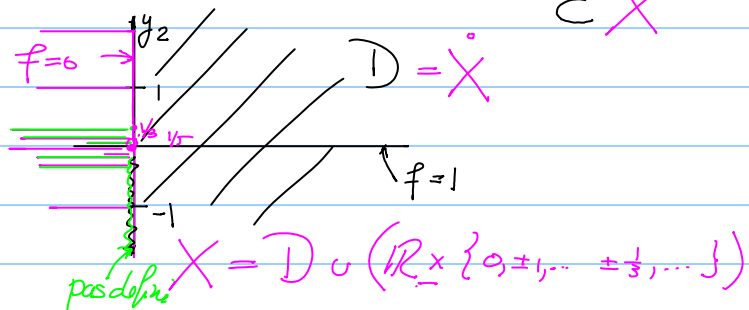
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = 12xy$$

2) $f(x, y) = x^y \stackrel{0^0 \equiv 1 \text{ (convention)}}{=} e^{y \cdot \ln(x)}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ouvert $\subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \cdot \ln(x)$$

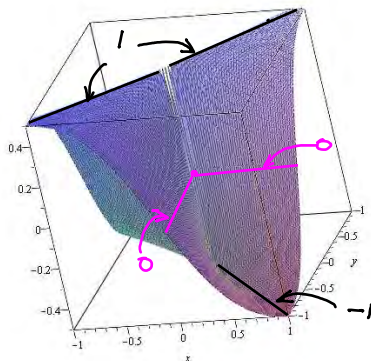


$$3) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f n'est pas continue en $(0,0)$!

car par exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0),$$



néanmoins les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur tout $\mathbb{R}^2$:

i) pour $(x,y) \neq (0,0)$ f est donnée par une fonction rationnelle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2x \cdot y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x \cdot y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

ii) pour $(x,y) = (0,0)$ il faut utiliser les définitions

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot 0 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$

Constat: les dérivées partielles peuvent donc exister même en un point où f n'est pas continue

4.6. Fonctions différentiables

4.6.1. Rappels ($n=1$, Analyse I)

Définition de la dérivabilité et de la différentiabilité pour une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, en $x_0 \in I$:

Dérivable:

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (*)$$

existence de la limite (*).

Differentiable:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a \cdot h + \varepsilon(x_0+h) \cdot |h| \quad (**)$$

existence d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$

Remarques:

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \text{différentiable} \Rightarrow \text{continue}$$

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(a + \varepsilon(x_0+h) \frac{|h|}{h} \right) = a$$

donc $(**) \Rightarrow (*)$ avec $f'(x_0) = a$.

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$$

4.6.2. Différentiabilité en un point

Définition Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{\Delta} = (x_1, \dots, x_n)^T$,
où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La fonction f
est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$ s'il existe
une matrice A ($1 \times n$ matrice) telle que

$$\left. \begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) &= f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \underline{h}}_{\in \mathbb{R}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) \|\underline{h}\| \end{aligned} \right\} (**)$$

avec $(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et }) \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0.$

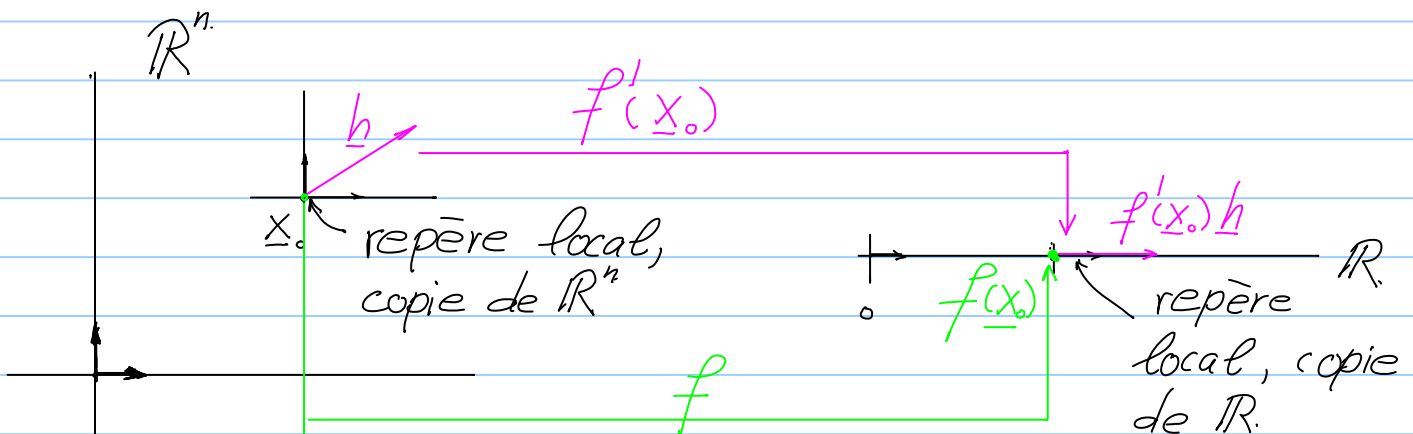
Remarque: on peut réécrire (**) d'une manière
équivalente comme:

$$\left. \begin{aligned} f(\underline{x}) &= f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + \varepsilon(\underline{x}) \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \end{aligned} \right\} (**)'_{ds}$$

avec $(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et }) \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \varepsilon(\underline{x}) = 0.$

Notation: on écrira $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pour l'ensemble
des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: dans ce cours on écrira $f'(\underline{x}_0)$ pour
l'application linéaire $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
qui correspond à la matrice A



Terminologie: l'application $f'(\underline{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est appelée la dérivée (totale) de f en $\underline{x}_0$.

Remarque: $(**) \iff$ existence d'une application linéaire $f'(\underline{x}_0)$ telle que

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)\underline{h}}{\|\underline{h}\|}}_{= \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})} = 0$$

Notations: $f'(\underline{x}_0)$, $df(\underline{x}_0)$, $L_{\underline{x}_0}$ pour la dérivée en $\underline{x}_0$.

Proposition 4.6 (différentiable $\Rightarrow$ continue et existence des dérivées partielles)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, f différentiable en $\underline{x}_0 \in D$. Alors

- i) f est continue en $\underline{x}_0$.
- ii) $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$ existent pour $j=1, \dots, n$.
- iii) $f'(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right)$

les mêmes nombres que pour le gradient, mais ceci n'est pas le gradient, mais une matrice $1 \times n$

Démonstration

i) $(**) \Rightarrow \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \dots = f(\underline{x}_0)$

ii) et iii) on choisit $\underline{h} = h \cdot \underline{e}_j$, $h \in \mathbb{R}$

$$(**) \Rightarrow f(\underline{x}_0 + h \cdot \underline{e}_j) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A(h \cdot \underline{e}_j)}_{h \cdot (A \underline{e}_j) \text{ par linéarité}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + h \underline{e}_j) |h|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x}_0 + h e_j) - f(\underline{x}_0)}{h}} &= A e_j + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + h e_j) \frac{|h|}{h}}_{=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \text{ par définition} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) &= A \cdot e_j = \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \text{position } j \\ = A_j \end{array} \end{aligned}$$

Nota bene: l'exemple du paragraphe 4.5.10 montre que l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$, $j = 1, \dots, n$.

ne suffit pas pour garantir la différentiabilité en un point $\underline{x}_0$. Dans l'exemple les dérivées partielles existent, mais f n'est même pas continue.

Théorème. Toutes les fonctions rationnelles sont différentiables en tout point de leur domaine de définition.*

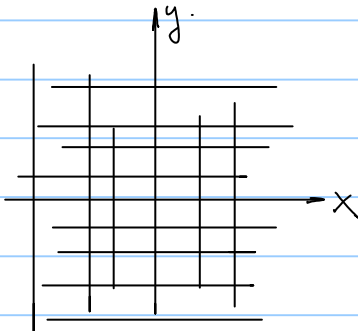
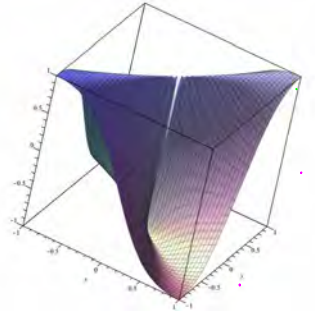
Démonstration voir le théorème 😊 plus loin

*) À l'exception éventuelle des points ajoutés par prolongement par continuité.

Rappels:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- f continue (en fait C^∞) sur $\equiv$ et $\parallel$
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$
- f n'est pas continue en $(0,0)$

Définition Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$ s'il existe une matrice A ($1 \times n$ $\parallel$) telle que

$$\left. \begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) &= f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \underline{h}}_{\in \mathbb{R}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) \|\underline{h}\| \end{aligned} \right\} (**)$$

avec $(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et }) \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0.$

$$\left. \begin{aligned} f(\underline{x}) &= f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + \varepsilon(\underline{x}) \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \end{aligned} \right\} (**)^{\text{bis}}$$

avec $(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et }) \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \varepsilon(\underline{x}) = 0.$

4.6.3. Méthodes A et B

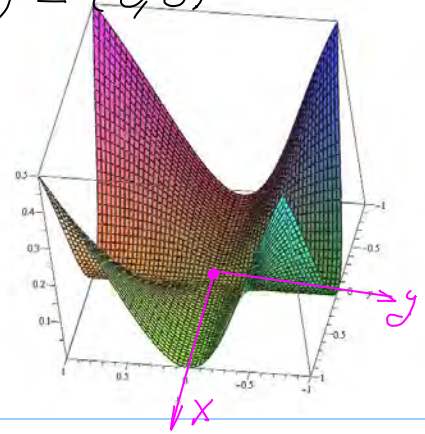
Comment contrôler la différentiabilité d'une fonction ?

A: méthode "directe" (utiliser la définition)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

f est différentiable car donnée par une fonction rationnelle



En $(x_0, y_0) = (0, 0)$

o) test facultatif: f est continue en $(0, 0)$ (c'est une condition nécessaire à la différentiabilité)
Pour $r > 0$ on a en coordonnées polaires

$$|f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) - f(0, 0)| \leq C r^2 \xrightarrow[r \rightarrow 0]{r > 0} 0 \quad (C=1 \text{ par exemple})$$

Attention! ∇ borne uniforme: $\exists C + \eta \forall \varphi \Rightarrow \forall \varphi \exists C + \eta$
= "non uniforme"

i) calculer les dérivées partielles en $(0, 0)$ (leur existence est une condition nécessaire à la différentiabilité; voir la proposition 4.6 ∇)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 h^2}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$

Donc, si f était différentiable en $(0,0)$ ou surant

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice } 1 \times 2)$$

$\nearrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad \nwarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

ii) par définition (utiliser $(xx)^{\text{bis}}$ et proposition 4.6)
si f est différentiable en $(0,0)$ on doit avoir

$$f(x,y) = f(0,0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y) \sqrt{x^2 + y^2} \quad (*)$$

et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$. De (*) on obtient, pour

$$(x,y) \neq (0,0), \quad \varepsilon(x,y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et en coordonnées polaires on trouve pour $r > 0$

$$|\varepsilon(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))| \leq r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{r > 0} 0.$$

i) + ii) montrent la différentiabilité de f en $(0,0)$
ainsi que $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice 1×2).

B. par la méthode indirecte suivante

(utiliser le théorème suivant)

Théorème 😊 : soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$,
 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.
 Si les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad j=1, \dots, n \quad \text{(existant sur } D)$$

existent, et sont toutes continues en $\underline{x}_0 \in D$, alors f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$.

Dans notre exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On a déjà montré que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

et on a en coordonnées polaires

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| \leq 4r \xrightarrow[r>0]{r \rightarrow 0} 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| \leq 4r \xrightarrow[r>0]{r \rightarrow 0} 0$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent donc sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues en $(0,0) \Rightarrow f$ différentiable en $(0,0)$ par 😊

Remarque: le théorème 😊 est un théorème "local".
 Soit $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset D$, alors on peut restreindre f à $B(x_0, \delta)$ et on a le théorème sur $B(x_0, \delta)$. Il suffit donc que les fonctions dérivées partielles existent sur $B(x_0, \delta)$ et soient continues en x_0 .

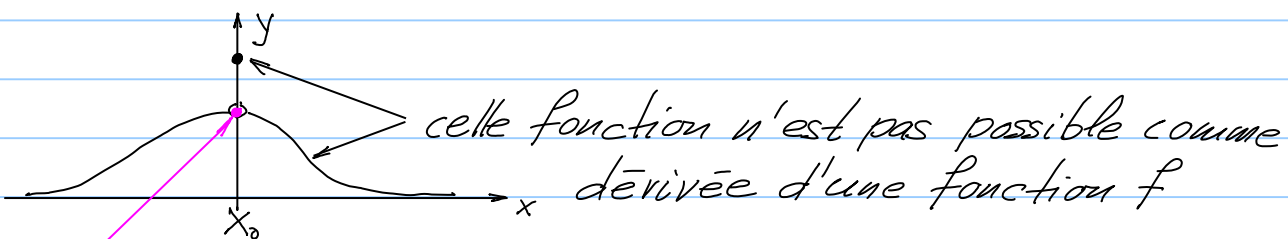
4.6.4. Démonstration du théorème 😊

Remarque: le théorème est sans aucun intérêt pour $n=1$. Ceci est dû au fait que pour simplifier la formulation les hypothèses sont choisies plus fortes que nécessaires.

INTERMEZZO

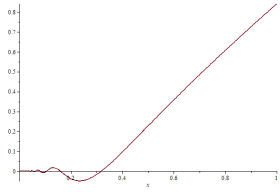
Théorème Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[\subset D \subset \mathbb{R}$, $a < b$, f continue sur $]a, b[$, dérivable sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$, et soit $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$ (A) alors

f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$ (B)

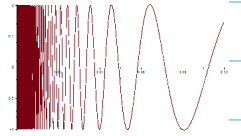


si c'est le graphe d'une fonction dérivée, la valeur en x_0 est là

Attention à la logique : dans l'exemple $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



f' n'admet pas de limite en $x_0 = 0$

Néanmoins f est dérivable en $x_0 = 0$. C'est un contre-exemple à la contra-posée de la réciprocque du théorème. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$
 faux. vrai. faux par le contre-exemple.

Démonstration (théorème des accroissements finis)

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0 + \theta h) = l$$

$\exists \theta = \theta(h) \in]0, 1[$ t.g.

INTERMEZZO

Démonstration du théorème (idée, une variable à la fois). Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ et $\underline{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$. Alors:

$$\begin{aligned} f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{=\underline{x}}) - f(\underbrace{x_{0,1}, \dots, x_{0,n}}_{=\underline{x}_0}) &= \\ &= f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \\ &+ f(x_1, x_2, x_{0,3}, \dots, x_{0,n}) - f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \\ &+ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n}) \end{aligned}$$

Diagram illustrating the path from $\underline{x}_0$ to $\underline{x}$ in the domain D by varying one coordinate at a time.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_{0,1} + \theta_1 (x_1 - x_{0,1}), x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) (x_1 - x_{0,1}) \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_1, x_{0,2} + \theta_2 (x_2 - x_{0,2}), \dots, x_{0,n}) (x_2 - x_{0,2}) \\
 &\vdots \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n} + \theta_n (x_n - x_{0,n})) (x_n - x_{0,n}).
 \end{aligned}$$

avec $\theta_i \in]0, 1[$, $i=1 \dots n$, données par le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle (voir Analyse I). Ainsi (on veut calculer $\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$ de la "méthode A") :

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) &= \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \text{ matrice } 1 \times n \\
 &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_{0,1} + \theta_1 (x_1 - x_{0,1}), x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \right] (x_1 - x_{0,1}) \quad [] \equiv \textcircled{1} \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n} + \theta_n (x_n - x_{0,n})) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \right] (x_n - x_{0,n}) \quad [] \equiv \textcircled{n}
 \end{aligned}$$

et donc, puisque $\frac{|x_i - x_{0,i}|}{\|x - x_0\|} \leq 1$, on obtient pour

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$$

que

$$0 \leq |\varepsilon(\underline{x})| \leq |\textcircled{1}| + \dots + |\textcircled{n}| \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} 0$$

par la continuité des fonctions dérivées partielles en $\underline{x}_0$ (hypothèse du théorème 😊)

b Bémol

(contraposée de la)

Attention 😞 : la réciproque du théorème 😊 est fausse ! Le fait qu'une ou plusieurs des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ne soient pas continues en un point $\underline{x}_0$ n'implique pas que la fonction n'est pas différentiable en $\underline{x}_0$.

(Contre-) exemple

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

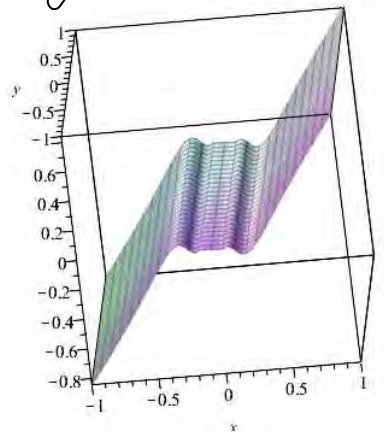
On montre que f est différentiable en $(0, 0)$ par la méthode A

$$i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$ii) \quad (**)^{bis} \quad f(x, y) = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



En coordonnées polaires on obtient

$$|\varepsilon(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))| \leq r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{r > 0} 0$$

On a donc démontré que f est différentiable en $(0,0)$

Par contre on obtient aucune information par le théorème 😊, car on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{pour } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{pour } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et, puisque la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ n'existe pas

la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas (pourquoi ?)

↑
[comparer avec Exercice 9.
de la série 5A]

Conclusion:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et le théorème 😊 ne s'applique pas. Ceci montre 😞 que la méthode directe montre que f est différentiable en $(0,0)$.

Théorème des accroissements finis

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $\Theta \in]0, 1[$ tel que.

$$f'(a + \Theta \cdot (b - a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(a + \Theta \cdot (b - a)) \cdot (b - a).$$

Attention: Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Alors.

$$(\overset{\circ}{\bar{X}}) \supset X$$

Exemple: $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\bar{X} = \mathbb{R}^n$, $(\overset{\circ}{\bar{X}}) = \mathbb{R}^n$.

Definition: Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction continue $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un prolongement (par continuité) de f si $\bar{f}|_X = f$.

Remarque: Un prolongement, s'il existe, est unique.

Remarque: Dans la suite, si un prolongement existe on va définir f sur $\bar{D} = (\overset{\circ}{\bar{D}})$.

4.6.5 La différentielle (= fonction dérivée)

Definition Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Si f est différentiable sur D , c.-à-d. si f est différentiable en tout point $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ \underline{x} &\longmapsto f'(\underline{x}) \end{aligned} \quad \text{(dérivée (totale) de } f \text{ en } \underline{x})$$

Cette fonction est appelée la différentielle de f .

Notations: f' , df , ... pour la différentielle.

4.7. Fonctions de classe C^k

Définition (n général) Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$,
 $x = (x_1, \dots, x_n)$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert.
 Alors

$$f \in C^1(D) : \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}, j=1, \dots, n$$

existent et sont continues sur D

$$f \in C^k(D) : \Leftrightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \quad \begin{array}{l} l_1 + \dots + l_n = k \\ l_i \in \{0, \dots, k\} \end{array}$$

↑
 ainsi que les permutations

existent et sont continues sur D .

Exemple: $n=2, k=3$
 $l_1=1, l_2=2$
 $f(x,y)$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}}_{\text{"permutations"}}$$

Théorème: soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$
 $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit f une fonction
 de classe C^k . Alors, les fonctions

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \quad \begin{array}{l} l_1 + \dots + l_n = k \\ l_i \in \{0, \dots, k\} \end{array}$$

sont égales aux fonctions "avec les ∂x_i permutes"

Exemples: si $f(x,y)$ est de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{pas de permutations}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{pas de permutations}$$

et si $f(x,y)$ est de classe $C^3(\mathbb{R}^2)$ on a en plus

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Ce théorème est une conséquence du théorème de Schwarz :

Théorème: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et supposons que pour $i \neq j$

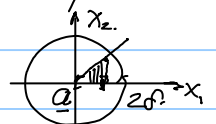
les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur D

et sont continues en $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a})$$

Démonstration

C'est un théorème local. On peut, pour $\delta > 0$ petit restreindre f à $B(\underline{a}, 2\delta) \subset D$.



Soit $\underline{n}=2$, $\underline{i}=1$, $\underline{j}=2$ et soit, pour $v \in [0, \delta]$ et $s \in [0, v]$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(s) := f(a_1 + v, a_2 + s) - f(a_1, a_2 + s), \\ h(s) := f(a_1 + s, a_2 + v) - f(a_1 + s, a_2). \end{array} \right\} \quad (*)$$

Remarque:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{g(v) - g(0)} = f(a_1 + v, a_2 + v) - f(a_1, a_2 + v) \\ \quad - f(a_1 + v, a_2) + f(a_1, a_2) = \underline{h(v) - h(0)} \end{array} \right\} \quad (**)$$

Pour $s \in]0, v[$ on a

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + v, a_2 + s) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + s), \\ h'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + s, a_2 + v) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + s, a_2), \end{array} \right\} \quad (***)$$

En utilisant le théorème des accroissements finis (pour la variable v) on obtient dans (***) qu'il existe $\theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} g'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 v, a_2 + s) v, \quad (1) \\ h'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + s, a_2 + \theta_2 v) v, \quad (2). \end{array} \right.$$

et de même qu'il existe $\theta_3, \theta_4 \in]0, 1[$ tels que

$$\textcircled{1} \quad \underline{g(v) - g(0)} = g'(\theta_3 v) v \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_3 v, a_2 + \theta_3 v) v^2$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{h(v) - h(0)} = h'(\theta_4 v) v \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_4 v, a_2 + \theta_4 v) v^2$$

et donc puisque par (**) $\underline{g(v) - g(0)} = \underline{h(v) - h(0)}$ que

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 v, a_2 + \theta_3 v) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_4 v, a_2 + \theta_2 v) \stackrel{\textcircled{2}}{=} \quad (*)$$

En utilisant la continuité des fonctions

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ en (a_1, a_2) on obtient, lorsque

ν tend vers zéro, que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} (a_1, a_2).$$

ceci termine la démonstration pour $n=2$. Si $n \geq 3$, $i < j$ on applique le même argument à la fonction $f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_i, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

La généralisation du théorème de Schwarz aux dérivées partielles d'ordre plus élevé s'obtient par récurrence.

4.8. Le plan tangent ($n=2$)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in D$ on a pour (x,y) proche de (x_0, y_0) :

$$\underbrace{f(x,y)}_{\equiv z} = f\left(x_0 + \underbrace{(x-x_0)}_{\equiv h}, y_0 + \underbrace{(y-y_0)}_{\equiv k}\right)$$

$$= f(x_0, y_0) + A\left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right) + \varepsilon(\underbrace{x_0+h}_{\equiv x}, \underbrace{y_0+k}_{\equiv y}) \underbrace{\left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\|}_{\equiv \sqrt{h^2+k^2}} = \dots$$

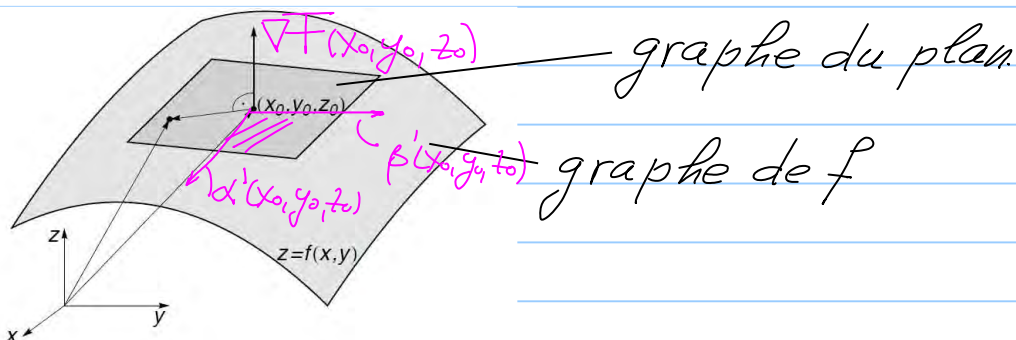
「 A est la matrice de l'application linéaire $f'(x_0, y_0)$ dans les coordonnées données

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

$$\dots = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\equiv c \equiv z_0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{\equiv a} h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\equiv b} k + \text{"petit"}$$

donc $\underbrace{z = c + a(x-x_0) + b(y-y_0)}_{\longleftrightarrow} + \text{"petit"}$

$$z = (c - ax_0 - by_0) + ax + by \quad (\text{l'équation d'un plan})$$

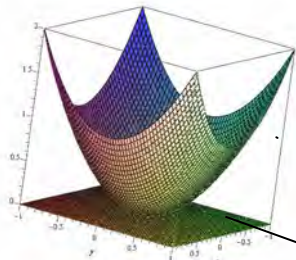


Ce plan est tangent au graphe de f en (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$

Conclusion: différentiable $\Leftrightarrow$ existence d'un plan tangent

Remarque: on a la même conclusion pour $n \geq 2$ avec le plan remplacé par un "hyper-plan" = graphe d'une fonction affine de n variables. Pour $n=1$ on obtient comme graphe une droite.

Exemples

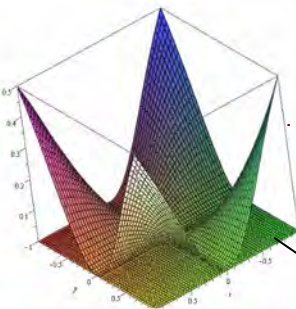


$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$f(x, y) = 0 + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \text{"petit"}$$

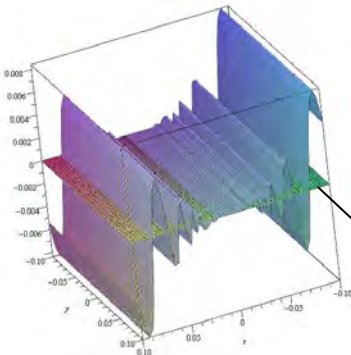
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

$$z = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

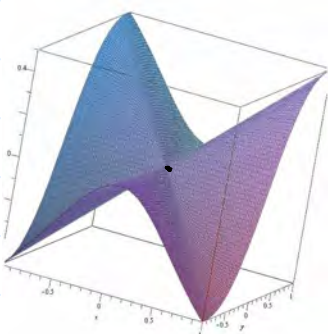
$$z = 0 \text{ en } (x_0, y_0) = (0, 0).$$



$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$z = 0 \text{ en } (x_0, y_0) = (0, y_0), y_0 \in \mathbb{R}.$$

Exemple d'une fonction continue mais pas différentiable



(Exemple 4, section 4.4)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

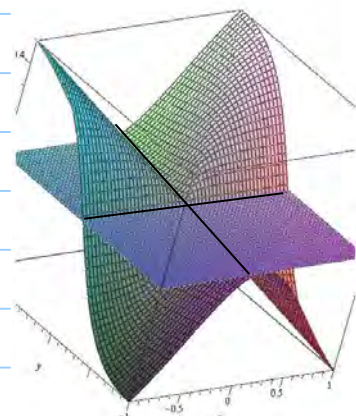
f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (voir la section 4.4)

f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Méthode A

$$i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$



$$ii) \text{ de } f(x,y) = 0 + (0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{on trouve } \varepsilon(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\text{mais } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x,x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

i) + ii) $z=0$ n'est pas un plan tangent car f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.9. Règles algébriques pour les dérivées des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Voir la série 7A

Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions différentiables (en un point ou sur D). Alors (en un point ou sur D):

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{à valeurs dans } \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)' = g \cdot f' + f \cdot g' \quad \text{à valeurs dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g} f' - \frac{f}{g^2} g'$$

5. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ($n \geq 1, m \geq 1$)

5.1. Définitions

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))^T$,
avec $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Remarque: il suit de la définition de la continuité et de la proposition 2.6 que f est continue (en un point ou sur D), si et seulement si les fonctions f_i , $i=1 \dots m$, sont toutes continues (en un point ou sur D)

Définition: (différentiable)

Une fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$, s'il existe une matrice A ,

$$A = {}_m \overbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix}}^n = (A_{ij}) \text{ matrice } m \times n$$

telle que

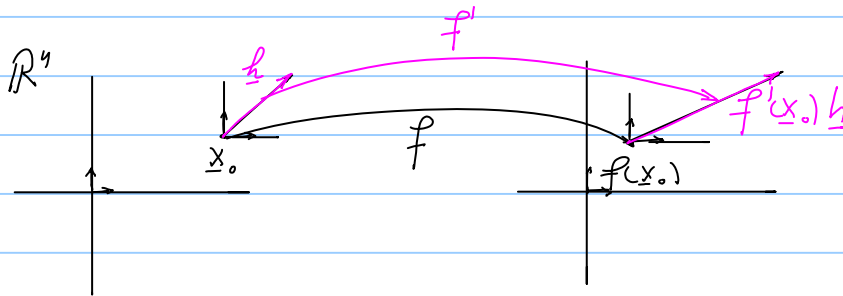
$$\left. \begin{aligned} f(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) &= f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \cdot \underline{h}}_{\in \mathbb{R}^m} + \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) \|\underline{h}\| \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{avec } \varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et } \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) = 0 \in \mathbb{R}^m \end{array} \quad (**)$$

Remarque $(**) \Rightarrow$ continuité de f en $\underline{x}_0$ et

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(\underline{x}_0 + h \cdot \underline{e}_j) - f_i(\underline{x}_0)}{h}$$

c.-à-d. existence de toutes les dérivées partielles

Notation: on écrira $f'(x_0)$ pour l'application linéaire qui correspond à la matrice A



Terminologie: si f est différentiable en tout point $x_0 \in D$, on peut définir la fonction

$$(df \equiv) \quad \begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned} \quad \left(\stackrel{!}{=} \mathbb{R}^{m \cdot n} \right)$$

↑ isomorphe

Cette fonction s'appelle la différentielle de f .

Terminologie: l'application linéaire $f'(x_0)$ est appelée la dérivée (totale) de f en x_0 ou encore (la valeur de) la différentielle de f en x_0 .

Remarque: $(**) \iff (\text{méthode A})$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|h\|} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \varepsilon(x_0 + h)}$

Attention: (terminologies, notations)

Souvent on trouve dans la littérature la notation

$J_f(x_0)$ (=matrice jacobienne de f en x_0)

au lieu de $f'(x_0)$ pour (la matrice de) la dérivée de f en x_0 . Nous utiliserons cette notation surtout pour le cas $n=m$ (changements de variables)

Remarque: en utilisant la définition (**) et la proposition 2.6 on voit que f est différentiable si et seulement si les fonctions $f_i, i=1 \dots m$ sont toutes différentiables.

Conséquence de cette remarque

Théorème 😊: si les fonctions $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i=1 \dots m, j=1 \dots n$, sont toutes continues en $x_0 \in D$, alors f est différentiable en $x_0 \in D$

b même Bémol 😞 la réciproque du théorème est fausse !

Définition: une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$,
 $x = (x_1, \dots, x_n) \in D, D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
 est de classe $C^k \equiv C^k(D) \equiv C^k(D, \mathbb{R}^m)$,
 si les fonctions $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}, i=1 \dots m$
 sont toutes de classe C^k

Remarque (voir algèbre linéaire)

$$(1) A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R} \ni a \quad A = (a) \longleftrightarrow a.$$

$$(2) A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^m \ni \underline{a} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\underline{a} = A(1)} \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

matrice

vecteur

$$(3) A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^n \ni \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(1)
 $\downarrow$
 $\underline{h}$

avec le produit scalaire canonique

$$\forall \underline{h}, A \cdot \underline{h} = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i h_i = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle$$

Conséquence : les anciennes et nouvelles définitions coïncident

$$n=m=1 : f'(x_0) = (a) \xleftrightarrow{(1)} f'(x_0) = a \quad (\text{Analyse I})$$

$$n=1, m>1 : f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_m(x_0) \end{pmatrix} \xleftrightarrow{(2)} f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_m(x_0) \end{pmatrix}$$

matrice $m \times 1$

le vecteur tangent défini en section 3

$$n>1, m=1 : f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \xleftrightarrow{(3)} \nabla f(x_0)$$

matrice $1 \times n$

le gradient en coordonnées cartésiennes

5.2. Dérivées des fonctions composées

5.2.1 Théorème (dérivation en chaîne)

Théorème: soit $D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l$
 $f = g \circ h$

Hypothèse: $D \equiv D(h) \xrightarrow{h} h(D) \subset D(g)$, c.-à-d.

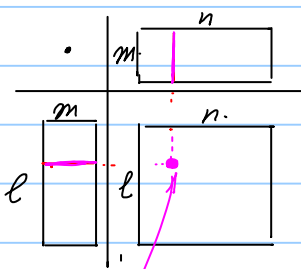
la composition $f = g \circ h$ est bien définie et $D(f) = D$

Supposons que h et g sont de classe C^1 et $x_0 \in D$

$h'(x_0)$ = une matrice $m \times n$ $\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$

$g'(h(x_0))$ = une matrice $l \times m$ $\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}$

Alors $f = g \circ h$ est de classe C^1 et on a.



$$\underbrace{f'(x_0)}_{l \times n} = \underbrace{g'(h(x_0))}_{l \times m} \underbrace{h'(x_0)}_{m \times n} \quad (*)$$

composition des applications linéaires
 = multiplication des matrices

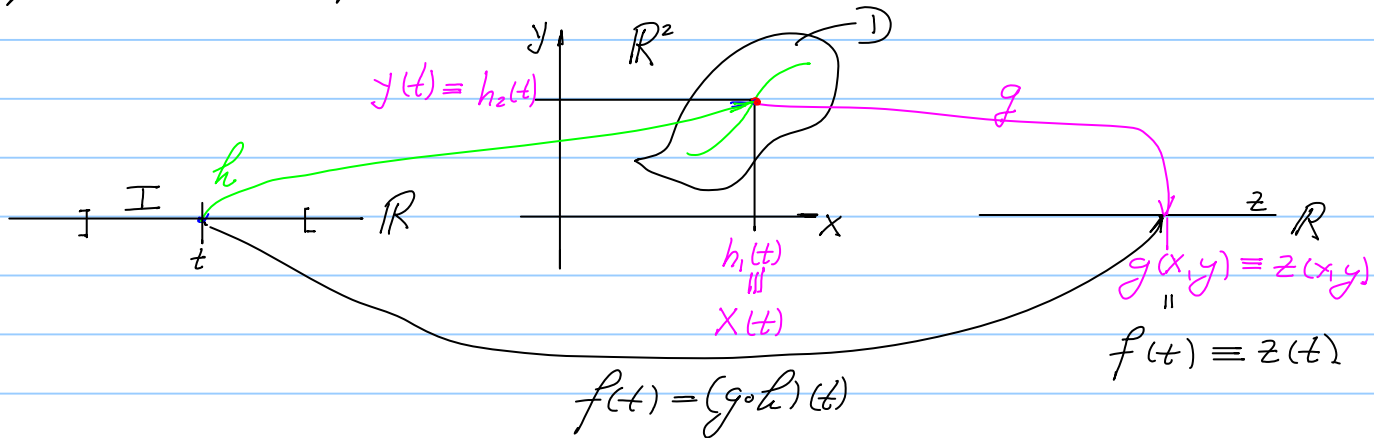
en termes

Démonstration voir Analyse I, 5.1.5, iv)

"mutatis mutandis"

5.2.2. Exemple $n=1, m=2, l=1$

Soit $g: D \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto g(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, et $h: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto h(t) = (h_1(t), h_2(t))^T$, $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, tel que $h(t) \in D$ pour tout $t \in I$.



On peut considérer la fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) \equiv (g \circ h)(t) := g(h(t))$$

Supposons que g et h sont de classe C^1 . Alors on a

$$f'(t) = (g' \circ h)(t) \cdot h'(t)$$

$$\square = \boxed{\square} \quad \boxed{\square}$$

$$f'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(h(t)) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(h(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix}$$

a priori on devrait écrire $\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t) \right)$ ou $\left(\frac{df}{dt}(t) \right)$
mais on utilise l'isomorphisme (notation Analyse I).

Si, par abus de notation, on écrit $h(t) \equiv \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
on obtient

$$f'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t)) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

et en effectuant la multiplication matricielle

$$f'(t) = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t)}_{\text{dérivée en chaîne par rapport à la première variable de } g} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}_{\text{dérivée en chaîne par rapport à la deuxième variable de } g}$$

dérivée en chaîne
par rapport à la
première variable
de g

dérivée en chaîne
par rapport à la
deuxième variable
de g .

Si on supprime les arguments de la notation
(= "notation courte") on obtient

$$f' = \frac{\partial g}{\partial x} x' + \frac{\partial g}{\partial y} y'$$

ou avec la notation "d" au lieu de "'"

$$df = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

┌ Finalement, avec l'identification $g(x, y) \equiv z(x, y)$
et $f(t) \equiv z(t)$, ceci donne

$$dz = \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{y_n} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_x dy$$

thermodynamique

5.2.3. Exemple $n=1, m=3, l=1$

Sous les mêmes hypothèses que pour 5.2.2 on a

$$g: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto g(x, y, z), \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$$

$$h: I \longrightarrow \mathcal{D}, t \longmapsto (h_1(t), h_2(t), h_3(t))^T \\ \equiv (x(t), y(t), z(t))^T$$

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto f(t) = (g \circ h)(t) = g(x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{et } f'(t) = g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$\square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \text{"trois termes"}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) x'(t) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) y'(t) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \end{aligned}$$

ou en notation courte :

$$df = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

5.2.4 Exemple $n=2, m=2, l=1$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad h \quad} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{R} \\ (u,v) & & (x,y) & & \\ & \searrow f=g \circ h & & & \end{array} \quad , g, h \text{ de classe } C^1$$

$$g(x,y), h(u,v) = \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

$$f(u,v) = (g \circ h)(u,v) = g(h(u,v))$$

$$f'(u,v) = (g' \circ h)(u,v) \cdot h'(u,v) \quad \text{dérivée en chaîne}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \end{array} \quad \left| \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \right| = h'(u,v)$$

$$g'(h(u,v)) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \right| = g'(h(u,v)) \cdot h'(u,v)$$

et en notation courte on a pour $f' = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \right)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned} \right\} (*)$$

INTERMEZZO

Test de non-compréhension

Si on avait l'idée de multiplier dans (*) la première ligne avec ∂u (ou la deuxième par ∂v) et si on simplifiait les ∂x et les ∂y , on obtiendrait

$$\partial f = \partial g + \partial g = 2\partial g \quad ??$$

Si un tel calcul vous semble à priori possible $\Rightarrow$ retour à la case de départ (définition des fonctions dérivées partielles !)

Notation complète (ce que (*) veut dire) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial x}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial u}(u, v) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial u}(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial x}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial v}(u, v) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

5.2.5. Exemples explicites

1) Soit $f(t) = \ln(t)^{\sin(t)}$, $t > 1$, $f'(t) = ?$

i) par calcul direct

$f'(t) = \dots$ voir la série 8A et analyse I

ii) $f(t) = (g \circ h)(t)$ avec

$$g(x, y) = x^y, x > 0, h(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t > 1.$$

$$g'(x, y) = (y x^{y-1} \quad x^y \cdot \ln(x))$$

$$h'(t) = \left(\frac{1}{t} \quad \cos(t) \right)^T$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (g' \circ h)(t) \cdot h'(t) \\ &= \left(\sin(t) \ln(t)^{\sin(t)-1}, \ln(t)^{\sin(t)} \cdot \ln(\ln(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \sin(t) \ln(t)^{\sin(t)-1} \cdot \frac{1}{t} + \ln(t)^{\sin(t)} \cdot \ln(\ln(t)) \cos(t) \end{aligned}$$

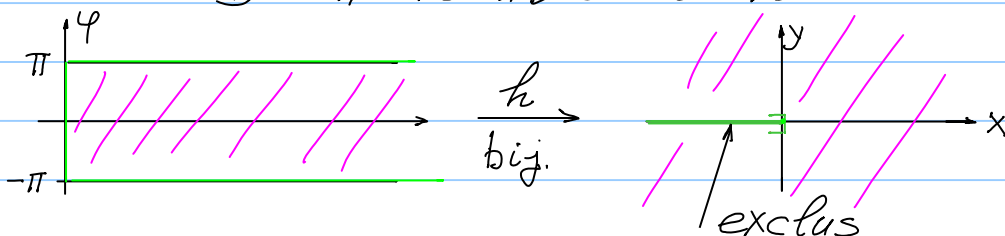
multiplication
des matrices

2) $g(x, y) = x^2 + y^2$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, le domaine est tout $\mathbb{R}^2$

$$h:]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0]$$

$=: \mathcal{D}$ un ensemble ouvert



$$\begin{aligned}
 x &= r \cdot \cos(\varphi) &= x(r, \varphi) &= h_1(r, \varphi) \\
 y &= r \cdot \sin(\varphi) \\
 \text{coordonnées polaires} &= y(r, \varphi) &= h_2(r, \varphi).
 \end{aligned}$$

Remarque: h est une fonction bijective. On a.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \equiv r(x, y)$$

$$\varphi = 2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \equiv \varphi(x, y)$$

Soit maintenant $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(r, \varphi) := (g \circ h)(r, \varphi) = g(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = r^2$$

$$\text{avec } h(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

i) calcul de f' en utilisant que $f(r, \varphi) = r^2$

$$f'(r, \varphi) = \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi)}_{\uparrow} \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi)}_{\uparrow} \right) = (2r \quad 0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{continues, donc} \\ f \text{ différentiable} \\ \text{par } \text{😊} \end{array} \right)$$

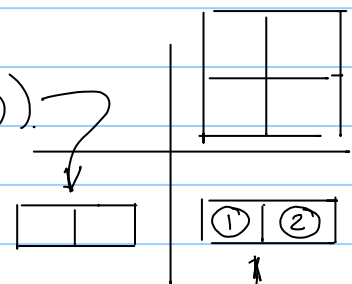
ii) calcul de f' par dérivée en chaîne

$$h'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \overset{\frac{\partial x}{\partial r}}{\cos(\varphi)} & \overset{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{-r \sin(\varphi)} \\ \overset{\frac{\partial y}{\partial r}}{\sin(\varphi)} & \overset{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{r \cos(\varphi)} \end{pmatrix}$$

$$g'(x, y) = (2x \quad 2y)$$

$$(g' \circ h)(r, \varphi) = (2 \cdot r \cdot \cos(\varphi) \quad 2 \cdot r \cdot \sin(\varphi))$$

$$f'(r, \varphi) = (g' \circ h)(r, \varphi) \cdot h'(r, \varphi) =$$



$$\textcircled{1}: \frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi) = 2 \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cos(\varphi) + 2 \cdot r \cdot \sin(\varphi) \sin(\varphi) = 2r$$

$$\textcircled{2}: \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi) = 2 \cdot r \cdot \cos(\varphi) (-r \cdot \sin(\varphi)) + 2 \cdot r \cdot \sin(\varphi) r \cdot \cos(\varphi) = 0$$

iii) même chose en notation courte

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= 2x \cdot \cos(\varphi) + 2y \cdot \sin(\varphi) \left| \begin{array}{l} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{array} \right. \xleftarrow{\text{"évalué en"}} = 2r.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

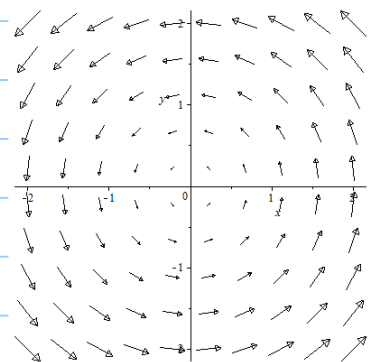
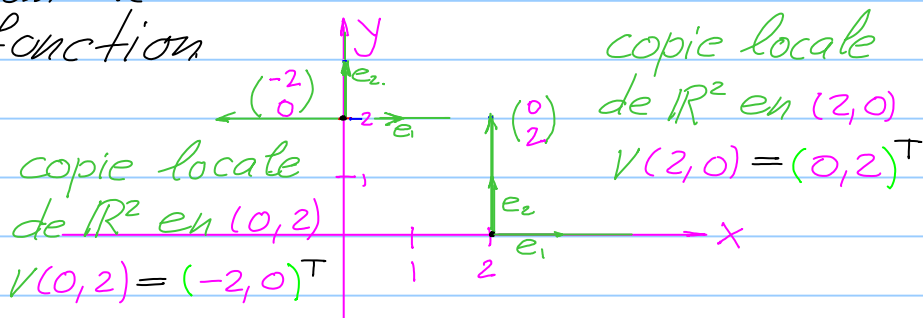
$$= 2x \cdot (-r \sin(\varphi)) + 2y \cdot r \cdot \cos(\varphi) \left| \begin{array}{l} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{array} \right. = 0$$

5.3. Fonctions différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ($m=n$)

5.3.1. Représentation graphique (champ de vecteurs)

Exemple: $v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x,y) \longmapsto v(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

nom de la
fonction

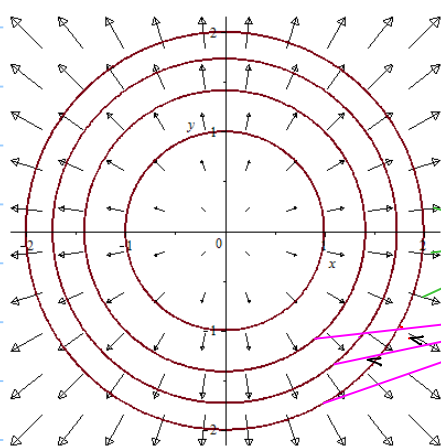


En chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ du domaine de définition de la fonction v on attache une copie de $\mathbb{R}^2$, et l'image $v(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est interprétée comme un vecteur dans ce référentiel.

Remarque: si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , alors $v = \nabla f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est représenté par un champ de vecteurs

Exemple: soit $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

alors $v(x,y) = (\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$



le champ de vecteur $v = \nabla f$
 lignes de niveau de f

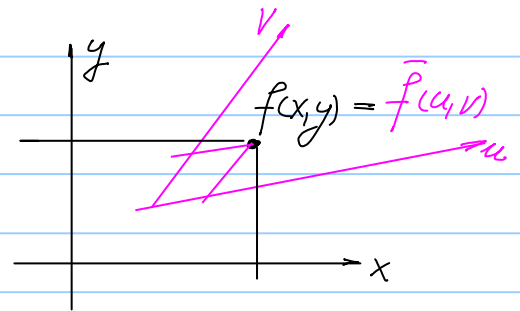
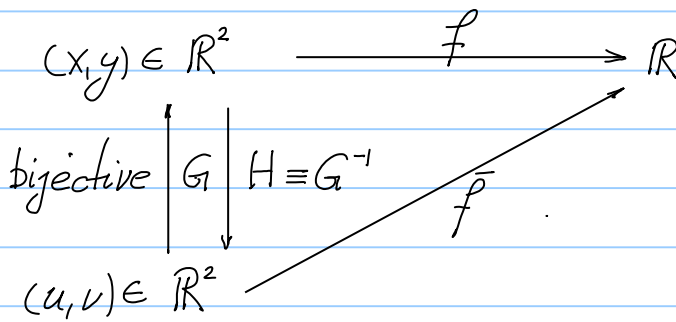
Ces deux informations sur f
sont étroitement liées.

(voir plus loin)

5.4 Changements de coordonnées (fonctions bijectives)

5.4.1 Définitions (pour $n=2$)

Définition soient les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec G une fonction bijective telles que $\bar{f}(u,v) = f(x,y)$ si $(x,y) = G(u,v)$. Alors G est appelé un changement de coordonnées et $H \equiv G^{-1}$ le changement de coordonnées inverse



Remarque: donné f et G une fonction bijective on peut définir $\bar{f}$ par $\bar{f}(u,v) = f(G(u,v))$. $\bar{f}$ exprime alors la fonction f dans les "nouvelles" coordonnées.

Réciproquement: $f(x,y) = \bar{f}(G^{-1}(x,y)) = \bar{f}(H(x,y))$

5.4.2. Fonctions continues

Théorème: soit $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $G: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue injective. Alors $\text{Im}(G) \equiv G(\tilde{D}) \equiv D$ est un ensemble ouvert et $H \equiv G^{-1}: D \rightarrow \tilde{D}$ est une fonction continue.

Démonstration: voir le cours de topologie générale; trop difficile pour ce cours. Pour $n=1$ voir l'intermezzo, semaine 4.

5.4.3. Fonctions de classe C^1

Dérivée de la fonction réciproque ($n=2$).

Soit $H = G^{-1}$

$$\text{Donc } (H \circ G)(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$(G \circ H)(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De (*) on trouve par dérivation en chaîne

$$(H' \circ G)(u, v) \cdot G'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou avec } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(u, v)$$

$$H'(x, y) \cdot G'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou avec la notation des matrices jacobienes:

$$J_H(x, y) \cdot J_G(u, v) = J_{\text{id}} \quad (*)$$

ou encore

↑
application identité

$$\begin{aligned} J_H(x, y) &= (J_G(u, v))^{-1} \\ &= (J_G \circ H(x, y))^{-1} \end{aligned}$$

Voir Analyse I, ceci généralise l'identité pour la dérivée d'une fonction réciproque d'une variable.

Remarque: $(*) \Rightarrow \det(J_H(x,y)) \cdot \det(J_{G(x,y)}) = 1$

$$\text{pour } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(u,v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = H(x,y)$$

Théorème: si $G: \tilde{D} \rightarrow D$, $\tilde{D}, D \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, est bijective avec G et $H = G^{-1}$ de classe C^1 , alors $\det(J_G) \neq 0$ en tout point de $\tilde{D}$.

Réciproquement, si G est de classe C^1 et si, pour un point $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$, $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$, il existe un voisinage $\tilde{U}$ de $\tilde{x}_0$ et un voisinage U de $x_0 = G(\tilde{x}_0)$, tels que $G: \tilde{U} \rightarrow U$ soit bijective, avec $H = G^{-1}$ de classe C^1 .

Remarque: $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = x^3$ ne satisfait pas les conditions du théorème sur $\tilde{D} = \mathbb{R}$

┌ Pour la démonstration voir le paragraphe 5.4.6 ─┐

5.4.4 Le laplacien d'une fonction

Définition (le Laplacien de f). Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe C^2 . Si (x, y) sont
des coordonnées cartésiennes, la fonction

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x, y) = \text{tr}(\text{Hess}(f))_{(x, y)}$$

la trace de la matrice

est appelée le laplacien de f , et l'application (linéaire)

$$\Delta: C^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$f \longmapsto g = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \text{tr}(\text{Hess}(f))$$

est appelée le laplacien

Notation: on écrit souvent $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, où $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sont interprétés comme les applications
linéaires de $C^2(\mathbb{R}^2)$ dans $C^0(\mathbb{R}^2)$ qui
associent à la fonction f respectivement
la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

5.4.5 Le laplacien en coordonnées polaires

Coordonnées polaires (voir 5.2.5. Ex. 2).

$$G:]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0]$$

$$(r, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ de classe C^2 , x, y des coordonnées cartésiennes. On a le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{G} & \bar{f} = f \circ G \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \bar{\Delta} \\ g = \Delta f & \xrightarrow{G} & \bar{g} = g \circ G = \bar{\Delta} \bar{f} \end{array}$$

Proposition (Laplacien en coordonnées polaires)

$$(\bar{\Delta} \bar{f})(r, \varphi) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}(r, \varphi)$$

c.-à-d. $\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (*)$

a) pour vérifier (*) il faut utiliser G

$$J_G(r, \varphi) \equiv G'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \overset{\frac{\partial x}{\partial r}}{\cos(\varphi)} & \overset{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{-r \cdot \sin(\varphi)} \\ \underset{\frac{\partial y}{\partial r}}{\sin(\varphi)} & \underset{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{r \cdot \cos(\varphi)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

De $\bar{f}(r, \varphi) = f(x, y) = f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$ on obtient

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos(\varphi)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin(\varphi)^2$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin(\varphi)) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \cos(\varphi))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (-r \sin(\varphi))^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (-r \sin(\varphi)) \cdot (r \cos(\varphi)) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (r \cos(\varphi))^2 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x} (-r \cos(\varphi)) + \frac{\partial f}{\partial y} (-r \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

et si on substitue dans l'expression donnée pour $\bar{\Delta}$ on obtient:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos(\varphi)^2}_{\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos(\varphi)^2}} + 2 \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos(\varphi) \sin(\varphi)} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin(\varphi)^2}_{\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin(\varphi)^2}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\varphi)} + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial f}{\partial y} \sin(\varphi)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin(\varphi)^2}_{\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin(\varphi)^2}} - 2 \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos(\varphi) \sin(\varphi)} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos(\varphi)^2}_{\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos(\varphi)^2}} \\ &\quad - \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\varphi)} - \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial f}{\partial y} \sin(\varphi)} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\bar{\Delta}$ est bien le laplacien en coordonnées polaires

b) pour trouver (*) il faut utiliser H

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_H(x, y) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \bigg|_{\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = H(x, y)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \cos(\varphi) & \frac{\partial r}{\partial y} \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r} \sin(\varphi) & \frac{1}{r} \cos(\varphi) \end{pmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = H(x, y)} \quad (2) \end{aligned}$$

$\frac{\partial r}{\partial x}$ $\frac{\partial r}{\partial y}$
 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

et on peut donc calculer $\bar{\Delta}$. On a

$$f(x, y) = \bar{f}(r, \varphi) = \bar{f}(H(x, y))$$

et on obtient avec (2):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \cos(\varphi) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{r} \sin(\varphi)\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} \cos(\varphi)^2 + 2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r \partial \varphi} \cos(\varphi) \left(-\frac{1}{r} \sin(\varphi)\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} \left(-\frac{1}{r} \sin(\varphi)\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \left(-\sin(\varphi) \left(-\frac{1}{r} \sin(\varphi)\right)\right) \\ &\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \left(\left(\frac{1}{r^2} \sin(\varphi)\right) \cos(\varphi) - \frac{1}{r} \cos(\varphi) \left(-\frac{1}{r} \sin(\varphi)\right)\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \sin(\varphi) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} \sin(\varphi)^2 + 2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r \partial \varphi} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \cos(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right) \\
&\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \left(\left(-\frac{1}{r^2} \cos(\varphi)\right) \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right) \right)
\end{aligned}$$

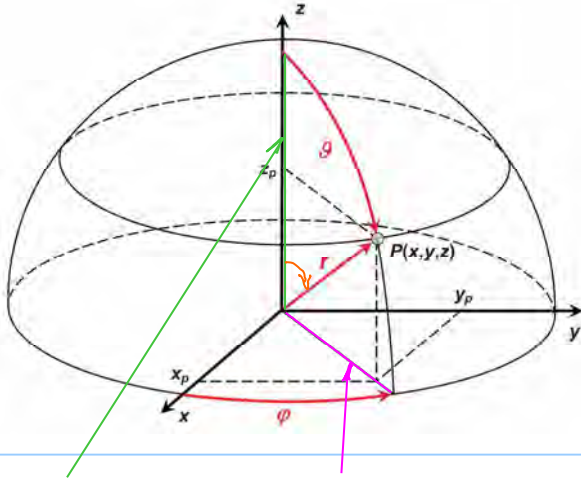
et donc

$$\begin{aligned}
\Delta f(x, y) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(x, y) \\
&= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) \\
&= \bar{\Delta} \bar{f}(r, \varphi)
\end{aligned}$$

$$\text{si } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(r, \varphi) \iff \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = H(x, y)$$

5.4.6 le laplacien en coordonnées sphériques (voir série 9A)

Definition des coordonnées sphériques



$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cdot \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$r \cdot \cos(\vartheta)$$

$$r \cdot \sin(\vartheta)$$

r, ϑ, φ les coordonnées sphériques

$$G : [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ surjective}$$

$$\underbrace{[0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[}_{=: \tilde{D}, \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$J_G(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J_G(r, \vartheta, \varphi) = \text{"développer la dernière ligne"}$$

$$= r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\vartheta)^2 \cdot r + \cos(\vartheta) r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)$$

$$= r^2 \cdot \sin(\vartheta)$$

apprendre par cœur

5.4.7. Démonstration du théorème de l'inversion locale

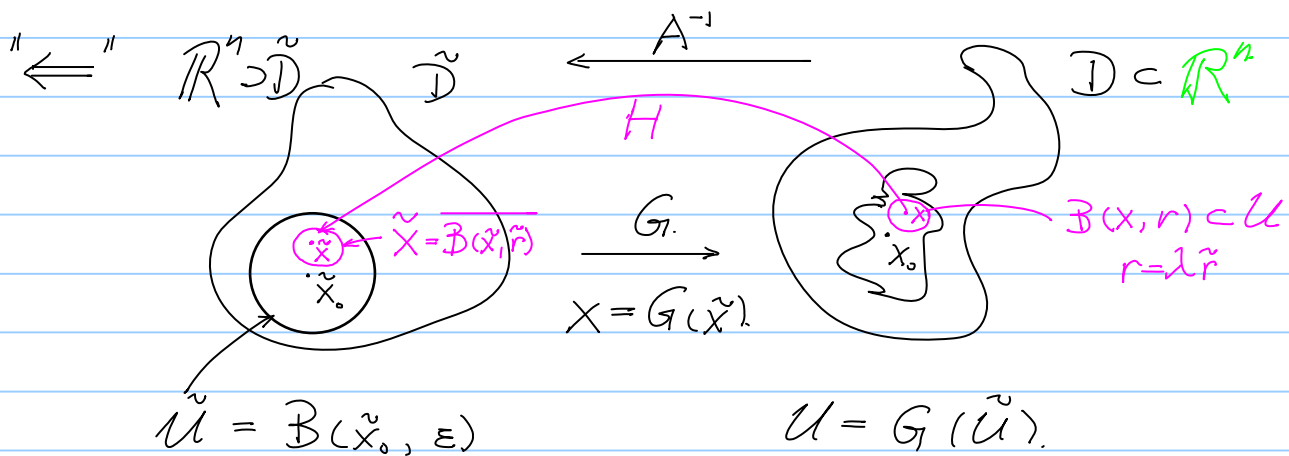
Théorème: Si $G: \tilde{D} \rightarrow D$, $\tilde{D}, D \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, est bijective avec G et $H = G^{-1}$ de classe C^1 , alors $\det(J_G) \neq 0$ en tout point de $\tilde{D}$. $C^1(\tilde{D}, \mathbb{R}^n)$

Réciproquement, si G est de classe C^1 et si, pour un point $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$, $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$, il existe un voisinage $\tilde{U}$ de $\tilde{x}_0$ et un voisinage U de $x_0 = G(\tilde{x}_0)$, tels que $G: \tilde{U} \rightarrow U$ soit bijective, avec $H = G^{-1}$ de classe C^1 .

" $\Rightarrow$ " en tout $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$ on a, pour $x_0 = G(\tilde{x}_0)$,

$$J_G(\tilde{x}_0) \cdot J_H(x_0) = J_{\text{id}}.$$

$J_G(\tilde{x}_0)$ est donc inversible et $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$



i) G est injective sur $\tilde{U}$ ($H = G^{-1}$ existe)

ii) U est un ensemble ouvert

iii) $H = G^{-1}$ est différentiable

iv) J_H est continue

i) soit $A := J_G(\tilde{x}_0) = G'(\tilde{x}_0)$

donné $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $\varphi: \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} + A^{-1}(x - G(\tilde{x}))$$

alors $x = G(\tilde{x}) \iff \varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$

on a. $\varphi'(\tilde{x}) = 1 - A^{-1}G'(\tilde{x}) = A^{-1}(A - G'(\tilde{x}))$

on choisit ε tel que $\forall \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{B}(\tilde{x}_0, \varepsilon)$

$$\|\varphi'(\tilde{x})\| \leq \|A^{-1}\| \|A - G'(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

norme matricielle
(voir la série 8B)

G' est continue
donc $\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} G'(\tilde{x}) = A$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad (\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{\mathcal{U}})$$

$$\|\varphi(\tilde{x}_1) - \varphi(\tilde{x}_2)\| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|$$

théorème des
accroissements finis
et (*).

Donc si $\tilde{x}_1 = \varphi(\tilde{x}_1)$ et $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_2)$ alors $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$
pour le même $x \in \mathbb{R}^n$

ii). $\lambda := \frac{1}{2 \|A^{-1}\|}$. $x \in \mathcal{U}$, $\tilde{x} = H(x) \iff x = G(\tilde{x})$

on choisit $\tilde{r}$ t.q. $\overline{\mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{r})} = \tilde{X} \subset \tilde{\mathcal{U}}$

montrons que $\forall \xi \in \mathcal{B}(x, \lambda r)$. il existe.
 $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{\xi} = \varphi(\tilde{\xi})$ où

$$\varphi(\tilde{\xi}) := \tilde{\xi} + A^{-1}(\xi - G(\tilde{\xi}))$$

on a $\|\varphi(\tilde{x}) - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\tilde{x} - G(\tilde{x})\| = \frac{1}{2\lambda} \|\tilde{x} - G(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2\lambda} \lambda \tilde{r} = \frac{1}{2} \tilde{r}$, ainsi

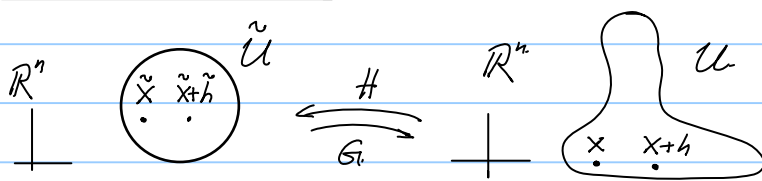
le centre de la boule $\tilde{x}$ ne bouge pas trop

que $\forall \tilde{\xi} \in \tilde{X}$, $\|\varphi(\tilde{\xi}) - \tilde{x}\| \leq \|\varphi(\tilde{x}) - \tilde{x}\| + \|\varphi(\tilde{\xi}) - \varphi(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2} \tilde{r} + \frac{1}{2} \tilde{r} = \tilde{r}$ (on reste dans la boule $\tilde{X}$)

Donc $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ une contraction et il existe donc $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$ t.q. $\tilde{\xi} = G(\tilde{\xi})$.

Donc $B(x, \lambda \tilde{r}) \subset U$ (donc U ouvert)

iii) Méthode A



$x \in \mathbb{R}^n$
 $x = G(\tilde{x})$
 $x+h = G(\tilde{x}+\tilde{h})$

$$\textcircled{1} \cdot \varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} + A^{-1}(x - G(\tilde{x}))$$

$$\textcircled{2} \cdot \varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) = \tilde{x}+\tilde{h} + A^{-1}(x - G(\tilde{x}+\tilde{h}))$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})\| = \|\tilde{h} - A^{-1}h\| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{h}\|$$

$$\|\tilde{h}\| \leq \|A^{-1}\| \|h\|$$

$$\Rightarrow \|\tilde{h}\| \leq 2 \|A^{-1}\| \|h\| = \frac{1}{\lambda} \|h\| \quad (**)$$

$$\text{Soit } T = (G'(\tilde{x}))^{-1} = (G'(H(x)))^{-1}$$

$$H(x+h) - H(x) - Th = \tilde{h} - Th =$$

existe par (*)
voir série 9A

$$= -T(G(\tilde{x}+\tilde{h}) - G(\tilde{x}) - G'(\tilde{x})\tilde{h}) \quad \text{et donc}$$

$$\frac{\|H(x+h) - H(x) - Th\|}{\|h\|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \frac{\|G(\tilde{x}+\tilde{h}) - G(\tilde{x}) - G'(\tilde{x})\tilde{h}\|}{\|\tilde{h}\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

car $\tilde{h} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ par (**), et G est différentiable.

$\Rightarrow$ iV)
continue si H
continue ce qui
sera le cas avec
 H différentiable.

5.5. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre

(Application de la dérivée en chaîne)

Proposition: Soit

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

$$\begin{aligned} a, b &\in C^1(\mathbb{R}) \\ f &\in C^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Alors

$$\left. \begin{aligned} F'(t) &= f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t) \\ &+ \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Remarque: dans le cas particulier où $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, $b(t) \equiv b \in \mathbb{R}$ sont des fonctions constantes on obtient de (**):

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad (*)$$

↑ "dérivée sous l'intégrale"

Idee de la démonstration de (*) (voir série 9B)

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x, t+h) dx - \int_a^b f(x, t) dx \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x, t+h) - f(x, t)) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx. \end{aligned}$$

$$\frac{?}{\int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

oui pour $a, b \in \mathbb{R}$ ($a, b \neq \pm\infty$) et pour $\frac{\partial f}{\partial t}$ une fonction continue, car dans ce cas on a $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) - \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \right| < \varepsilon$$

pour tout t donné et h suffisamment petit avec h indépendant de $x \in [a, b]$.

Démonstration de (**)

$$\begin{aligned} \text{On pose } g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(a, b, t) &= \int_a^b f(x, t) dx \\ &= - \int_b^a f(x, t) dx \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial b}(a, b, t) &= f(b, t) & \text{Analyse I !, théorème fon-} \\ \frac{\partial g}{\partial a}(a, b, t) &= -f(a, t) & \text{amental du calcul intégral.} \\ & & \text{idem} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(a, b, t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad \text{par (*)}$$

et donc, puisque $F(t) = g(\underbrace{a(t), b(t), t}_{h(t)}) = g \circ h(t)$
on obtient:

$$h(t) \equiv (a(t), b(t), t)^T$$

$$F'(t) = g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial a}(a(t), b(t), t) & \frac{\partial g}{\partial b}(a(t), b(t), t) & \frac{\partial g}{\partial t}(a(t), b(t), t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

= "formule du théorème"

Généralisation aux intégrales généralisées

Proposition: soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, I un intervalle ouvert, $f \in C'([a, \infty[\times I)$

$$\overline{F}(t) = \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \quad \text{et} \quad \int_b^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

uniformement convergents. Alors, $\overline{F} \in C'(I)$
et

$$\overline{F}'(t) = \int_b^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Remarque: uniformement convergent veut dire, que
 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B_0 \geq b$, tel que $\forall B \geq B_0$,
 $\forall t \in I$:

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x, t) dx \right| \leq \varepsilon$$

« On découpe l'intégrale $\int_b^{+\infty} = \int_b^B + \int_B^{+\infty}$ et applique le théorème précédent sur $[b, B]$. Sur $[B, +\infty[$ les intégrales sont petites par hypothèse »

Exemples

$$1) \overline{F}(t) = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\sin(t \cdot x)}{x}}_{= f(x, t)} dx, \quad \overline{F}'\left(\frac{1}{4}\right) = ?$$

$= f(x, t)$ de classe $C'(\mathbb{R}^2)$, à vérifier !
(avec $f(0, t) = t$)

$$\begin{aligned} \overline{F}'(t) &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(tx) \cdot x}{x} dx = \left[\frac{1}{t} \sin(tx) \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{t} \sin(\pi \cdot t) \end{aligned}$$

$$\overline{F}'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2) \quad F(t) = \int_0^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x} dx, \quad F'(\frac{1}{4}) = ?$$

$$F'(t) = \frac{1}{t^2} \sin(t \cdot t^2) \cdot (2t) + \left[\frac{1}{t} \sin(tx) \right]_{x=0}^{x=t^2}$$

$$= \frac{2}{t} \sin(t^3) + \frac{1}{t} \sin(t^3) = \frac{3}{t} \sin(t^3)$$

$$F'(\frac{1}{4}) = 12 \cdot \sin(\frac{1}{64})$$

$$3) \quad F:]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} dx \quad \leftarrow f(x,t) \text{ du théorème.}$$

$$\left[:= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-tx} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_{x=0}^{x=R} = \right.$$

$$\left. \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} e^{-tR} \right) = \frac{1}{t} \text{ (voir Analyse I)} \right]$$

$\forall t \in]1, \infty[, x \in [0, \infty[, 0 \leq e^{-tx} \leq e^{-x}$,
et donc, $\forall \varepsilon > 0$

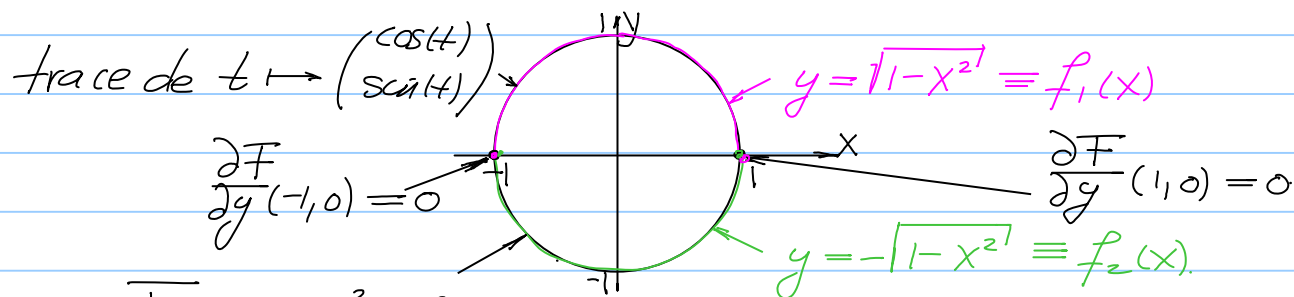
$$\left| \int_B^\infty e^{-tx} dx \right| \leq \int_B^\infty e^{-x} dx = e^{-B} \leq \varepsilon$$

si $B \geq B_0 = \max\{0, -\ln(\varepsilon)\}$, et similaire
pour $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = e^{-tx} (-x)$. Les deux intégrales
sont donc uniformément convergentes et on obtient:

$$F'(t) = \int_0^\infty e^{-tx} (-x) dx \quad \left[= \dots = -\frac{1}{t^2} \right]$$

6. Théorème des fonctions implicites

6.1. Introduction, théorèmes, exemples



cercle : ligne de niveau 0 de $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

- union des graphes de $f_1, f_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

- trace de $g: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto g(t) = (\cos(t), \sin(t))$

f_1 et f_2 sont continues sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $] -1, 1[$.

Question: comment définir f_1 et f_2 si on ne peut pas isoler y dans l'équation $F(x, y) = 0$?

Théorème des fonctions implicites: soit $D \subset \mathbb{R}^2$, ouvert, et $F: D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F(x, y)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

pour un $(x_0, y_0) \in D$. Alors l'équation $F(x, y) = 0$ définit localement (c.-à-d. pour x proche de x_0) une fonction $f(x)$ de classe C^1 telle que

$$f(x_0) = y_0, \quad F(x, f(x)) = 0$$

De plus

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad (*)$$

┌ Démonstration de (*) :

On a que $F(x, f(x)) = 0$ pour x proche de x_0 ,
et donc $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f'(x) = 0$ ┘

De (*) on trouve en particulier pour $x = x_0$
en utilisant que $f(x_0) = y_0$

$$f'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \quad (**)$$

Remarque: (**) explique aussi la condition

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

┌ Démonstration du théorème: voir la démonstration
du théorème général
plus loin. ┘

Dérivées d'ordre supérieur

De (*) on trouve, pour F de classe C^2 :

$$f''(x) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) \cdot f'(x) \right)$$

" $f'(x)$ par (*).

et donc en particulier

$$f''(x_0) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot f'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot f'(x_0)^2}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

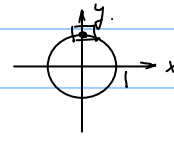
avec $f'(x_0)$ donné par (**). On peut donc calculer $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ (et puis, pour F de classe C^R , récursivement $f^{(e)}(x_0)$, $e=3, \dots, R$, et donc le développement limité de f en x_0), sans avoir besoin d'une expression explicite pour f .

Remarque: si $f'(x_0) = 0$ ($\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ par (**)) on a simplement

$$f''(x_0) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \quad (***)$$

Exemples

$$1) \quad F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$



soit $(x_0, y_0) = (0, 1)$ (à titre d'exemple)

$$\text{on a } F(0, 1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2y \Big|_{(0, 1)} = 2 \neq 0$$

par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que

$$1 = y_0 = f(x_0) = f(0) \quad \text{et} \quad F(x, f(x)) = 0,$$

au moins pour $|x - x_0| = |x|$ suffisamment petit. En fait $f(x) = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pour $|x| < 1$. De plus on a par (**)

$$f'(0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = - \frac{2x}{2y} \Big|_{(0, 1)} = - \frac{2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = 0$$

et donc, par (***)

$$f''(0) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = - \frac{2}{2y} \Big|_{(0, 1)} = -1$$

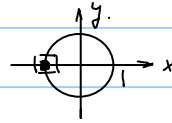
A comparer avec le calcul direct: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}, \quad f''(0) = -1$$

$$2) \quad F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$



soit $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ (à titre d'exemple)

$$\text{on a } F(-1, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, 0) = 2y|_{(-1, 0)} = 0$$

On ne peut donc pas appliquer le théorème. Par contre

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 0) = 2x|_{(-1, 0)} = -2 \neq 0, \quad \text{et par le théorème}$$

des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que $-1 = x_0 = f(y) = f(0)$ et $F(f(y), y) = 0$ au moins pour $|y - y_0| = |y|$ suffisamment petit. En fait $f(y) = -\sqrt{1-y^2}$ pour $|y| < 1$.

$$3) \quad F(x, y) = x^3 + xy + y^3 - 3 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2$$

$$(x_0, y_0) = (1, 1) \quad (\text{à titre d'exemple})$$

$$\text{on a } F(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = (x + 3y^2)|_{(1, 1)} = 4 \neq 0.$$

et il existe donc une fonction f telle que $f(1) = 1$ et $F(x, f(x)) = 0$ au moins pour x proche de $x_0 = 1$. De plus

$$f'(x) = -\frac{3x^2 + f(x)}{x + 3f(x)^2}$$

$$\text{et en particulier } f'(1) = -\frac{3+1}{1+3 \cdot 1^2} = -1,$$

et puis

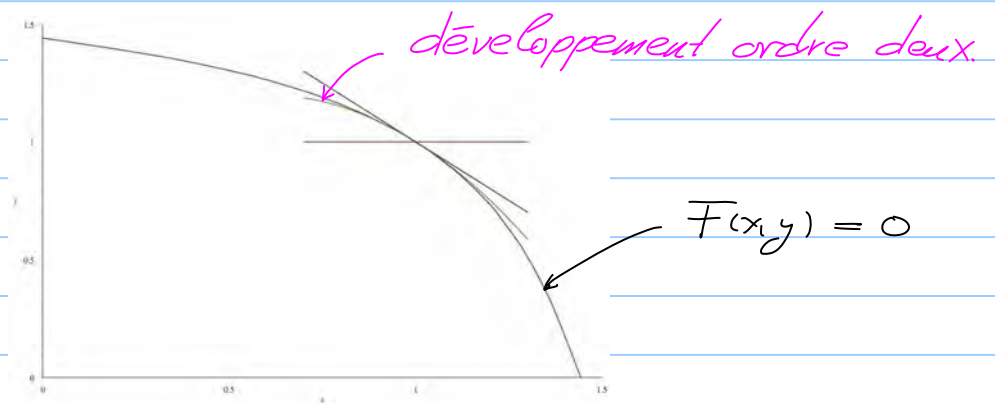
$$f''(x) = - \frac{6x + 2 \cdot f'(x) + 6f(x)f'(x)}{x + 3f(x)^2}$$

et donc

$$f''(1) = - \frac{6 + 2(-1) + 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2}{4} = - \frac{5}{2}$$

et on a donc le développement limité d'ordre deux

$$f(x) = 1 - (x-1) - \frac{5}{4} (x-1)^2 + \dots$$



Théorème (version $\mathbb{R}^3$) Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, $F: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$, une
 fonction de classe C^1 telle que

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

pour un $(x_0, y_0, z_0) \in D$. L'équation $F(x, y, z) = 0$
 définit alors localement une fonction de
 classe C^1 , telle que

$$z_0 = f(x_0, y_0) \text{ et } F(x, y, f(x, y)) = 0$$

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad (**)$$

Explication de (*) et (**):

De $F(x, y, f(x, y)) = 0$ on trouve par dérivation
 en chaîne par rapport à x :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

$\Rightarrow (*)$ en isolant $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Par dérivation en
 chaîne par rapport à y on trouve:

$$0 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

$\Rightarrow (**) \text{ en isolant } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Remarque: comme déjà pour $n=2$, chacune des variables peut jouer le rôle de la variable dépendante, et souvent on identifie le nom de la fonction définie implicitement avec le nom de la variable (notation courte). Ainsi on a, si $\overline{F}(x_0, y_0, z_0) = 0$, dans des voisinages adéquats:

$$\overline{F}(x, y, z(x, y)) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$$\overline{F}(x, y(x, z), z) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

$$\overline{F}(x(y, z), y, z) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

et pour chaque cas on obtient pour $(x_1), (x_2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial \overline{F}}{\partial y}}{\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \overline{F}}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}}{\frac{\partial \overline{F}}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial \overline{F}}{\partial y}}{\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}}{\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}}$$

d'où (règle du triple produit):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1.$$

(): notation historique utilisée en thermodynamique.

6.2. Equation du plan tangent, bis (voir aussi 4.5.2 et 4.6)

6.2.1. Représentation de "surfaces"

($n=3$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geq 2$)

Soit $F(x, y, z)$ de classe C^1 dans $D \subset \mathbb{R}^3$, D ouvert telle que

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

pour un $(x_0, y_0, z_0) \in D$ (c.-à-d. les conditions du théorème des fonctions implicites sont satisfaites). Il existe alors une fonction $f(x, y)$ de classe C^1 définie dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) telle que $f(x_0, y_0) = z_0$ et telle que

$$F(x, y, z) = 0 \text{ ssi } z = f(x, y)$$

L'ensemble de niveau zéro de la fonction F qui contient le point (x_0, y_0, z_0) est donc proche de (x_0, y_0, z_0) une surface, et cette surface est le graphe d'une fonction f . On a donc deux manières équivalentes de représenter une surface proche du point (x_0, y_0, z_0) (appartenant à cette surface) :

i) par $F(x, y, z) = 0$, si $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

ii) par le graphe $z = f(x, y)$, si $f(x_0, y_0) = z_0$

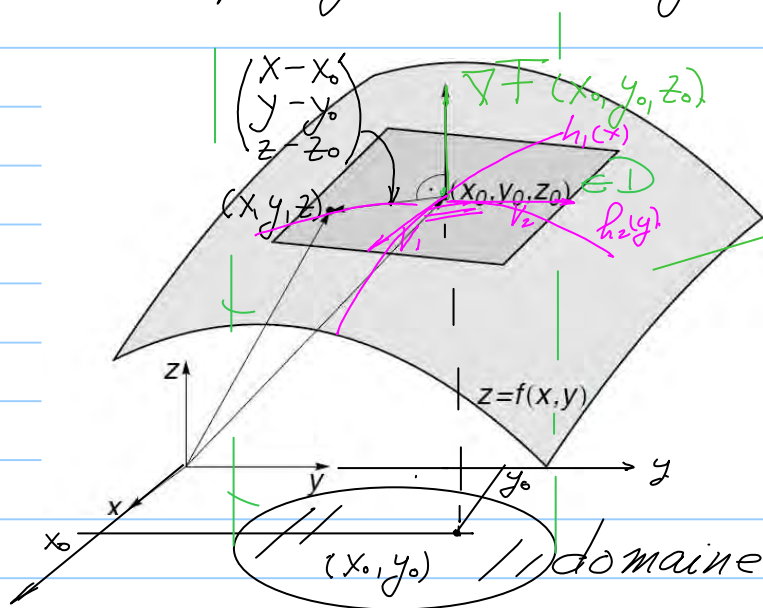
car i) $\Rightarrow$ ii) par le théorème des fonctions implicites

ii) $\Rightarrow$ i) car donné $f(x, y)$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ on peut choisir $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

6.2.2. L'équation du plan tangent, version implicite

Donné $f(x, y)$ avec $f(x_0, y_0) = z_0$, le plan tangent est donné par l'équation (voir 4.5.2 et 4.8) :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). (*)$$



$D \subset \mathbb{R}^3$ le domaine de F :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 & \text{ici } D(f) \times \mathbb{R} \\ F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))^T \\ V_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))^T \end{cases}$$

voir 4.5.2, ces deux vecteurs engendrent le plan tangent

$$\begin{aligned} V_1 &= h_1'(x_0) \quad \text{ou } h_1(x) = (x, y_0, f(x, y_0))^T \\ V_2 &= h_2'(y_0) \quad \text{ou } h_2(y) = (x_0, y, f(x_0, y))^T \end{aligned}$$

$$(*) \Leftrightarrow 1 \cdot (z - z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \underbrace{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right)^T}_{\parallel \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}, \underbrace{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}}_{\parallel \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} \right\rangle = 0$$

produit scalaire

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{en multipliant avec } \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \right)$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

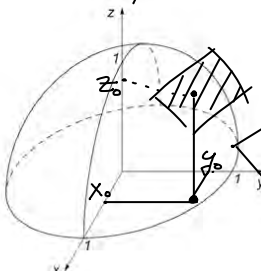
$$\stackrel{\text{III}}{\left(\nabla F \right)(x_0, y_0, z_0)}$$

A noter que $\left\langle \left(\nabla F \right)(x_0, y_0, z_0), \nu_1 \right\rangle = 0$

$$\left\langle \left(\nabla F \right)(x_0, y_0, z_0), \nu_2 \right\rangle = 0$$

Conclusion: $(\nabla F)(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au plan tangent au graphe de f (= surface de niveau de F de niveau zéro) en (x_0, y_0, z_0)

Exemple: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$



$F(x, y, z) = 0$ surface de la sphère de rayon 1.

$$\Leftrightarrow$$

$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ "hémisphère nord"

Soit (x_0, y_0) tel que $x_0^2 + y_0^2 < 1$ et $z_0 = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$

On a $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0$

L'équation du plan tangent à la surface de niveau zéro de F en (x_0, y_0, z_0) est:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad (*)$$

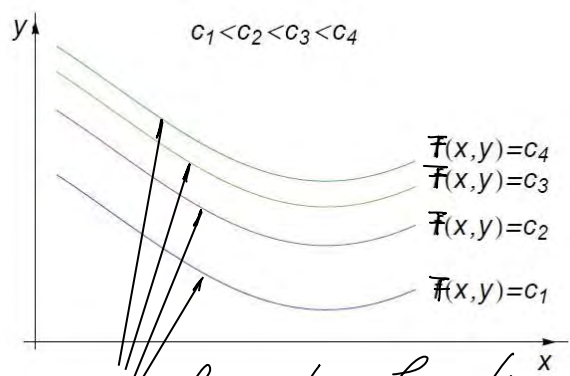
et ce plan est aussi le plan tangent au graphe de la fonction $f(x, y)$ en $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$. A noter que $(*)$ est bien défini même si $z_0 = 0$. Dans ce cas on obtient l'équation d'un plan qui est vertical.

6.3. "Lignes" de niveau

($n=2$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geq 2$).

Soit $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

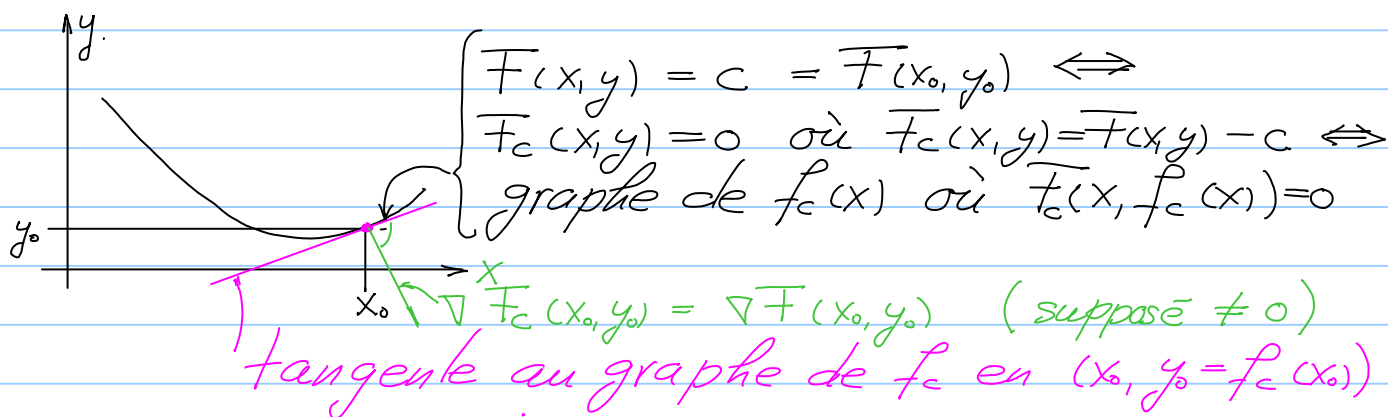
$c_1 < c_2 < c_3 < c_4$



$$\begin{aligned} F(x,y)=c_4 &\Leftrightarrow \bar{F}_4(x,y)=0 \quad \text{où } \bar{F}_4(x,y)=F(x,y)-c_4 \\ &\vdots \\ F(x,y)=c_1 &\Leftrightarrow \bar{F}_1(x,y)=0 \quad \text{où } \bar{F}_1(x,y)=F(x,y)-c_1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ graphes de fonctions f_i telles que $\bar{F}_i(x, f_i(x))=0$

On a donc le schéma suivant:



Equation de la tangente en (x_0, y_0) :

$$y = y_0 + \underbrace{f'_c(x_0)}_{\parallel} (x - x_0) \quad (*)$$

$$-\frac{\frac{\partial \bar{F}_c}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \bar{F}_c}{\partial y}(x_0, y_0)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

car $\bar{F}_c(x,y) = F(x,y) - c$

ou, en écriture implicite (en supposant $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$):

$$\Leftrightarrow (y - y_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} (x - x_0) = 0$$

et en multipliant avec $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$$\left\langle (\nabla F)(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow (*).$$

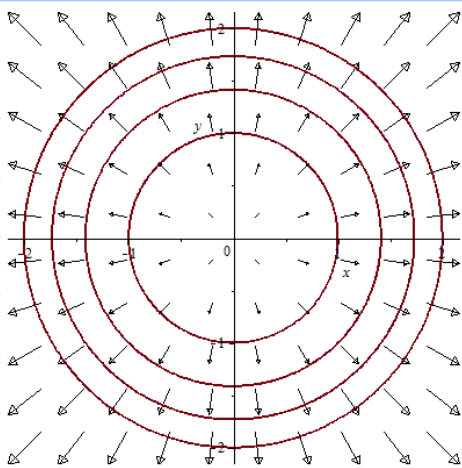
Conclusion: $(\nabla F)(x_0, y_0)$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau de F passant par le point (x_0, y_0) , c.-à-d. la ligne de niveau de F de niveau $c = F(x_0, y_0)$

Remarque: si $(\nabla F)(x_0, y_0) \neq 0$ alors ou bien

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{et on peut}$$

appliquer le théorème des fonctions implicites

Exemple:



$$F(x, y) = x^2 + y^2.$$

pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
on a.

$$\nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est un vecteur orthogonal à la tangente au cercle donné par $F(x, y) = c = F(x_0, y_0)$.

6.4 Théorème (des fonctions implicites)

Soient des ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ et $F: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ $(x, y) \mapsto F(x, y)$ une fonction de classe C^1 . Supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in U \times V$ tel que

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0.$$

Notation: $\forall x \in U, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) := \overline{F}'_2(y)$, où $\overline{F}_2: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ $y \mapsto \overline{F}(x, y)$

Alors :

i) il existe des voisinages $\tilde{U} \subset U$ de x_0 et $\tilde{V} \subset V$ de y_0 et une fonction $f: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tel que

$$\forall x, y \in \tilde{U} \times \tilde{V} \quad (F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x))$$

ii) la fonction f est de classe C^1 et on a

$$f'(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \quad (**)$$

$$\begin{matrix} F'(x, y) \sim \begin{matrix} n+m \\ \begin{matrix} n & m \end{matrix} \end{matrix} \\ \overline{F}'_1 = \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} = \overline{F}'_2 \end{matrix}$$

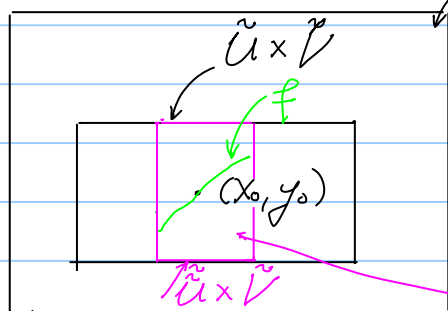
$$\forall y \in V, \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) := \overline{F}'_1(x), \text{ où } \overline{F}_1: U \rightarrow \mathbb{R}^m \quad x \mapsto \overline{F}(x, y)$$

$$f' \sim \begin{matrix} m & n \\ \begin{matrix} m & n \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} f: \tilde{U} &\rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m, \quad \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \\ f': \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Démonstration

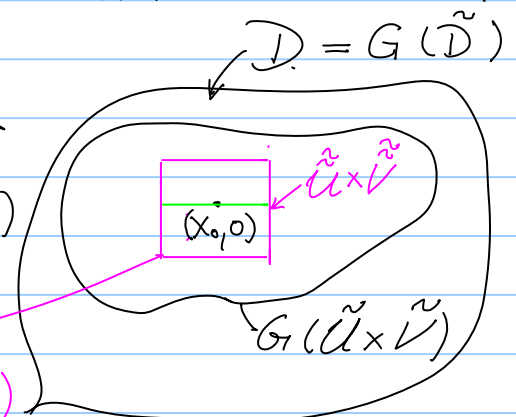
$U \times V \cong \tilde{D}$ du théorème d'inversion



$$\begin{aligned} G &= (Id, \overline{F}) \\ (x, y) &\mapsto (x, \overline{F}(x, y)) \end{aligned}$$

$$H = (Id, \phi)$$

$$(x, y) \mapsto (x, \phi(x, y))$$



On définit la fonction

$$G: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \longmapsto (x, F(x, y))$$

et applique le théorème de l'inversion locale.
La fonction G est de classe C^1 et

$$G'(x_0, y_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{array} \right)$$

avec $\det(G'(x_0, y_0)) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$, et

on suppose que $\tilde{U} \times \tilde{V}$ soit tel que $G|_{\tilde{U} \times \tilde{V}}$ soit injective
(sinon réduire la taille des ouverts). On a

$$G(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0, y_0)) = (x_0, 0)$$

et il existe donc une fonction réciproque $H = G^{-1}$
définie dans un voisinage $\tilde{U} \times \tilde{V}$ de $(x_0, 0)$ telle que

$$\forall (x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V} \quad (G \circ H)(x, y) = (x, y) \quad (*)$$

et H est de classe C^1 . H doit être de la
forme (identité sur les x) $H(x, y) = (x, \phi(x, y))$ pour
une certaine fonction $\phi: \tilde{U} \times \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ avec
 $\phi(x_0, 0) = y_0$ et $(*)$ devient

$$\forall (x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V} \quad (x, F(x, \phi(x, y))) = (x, y).$$

Soit $f: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, $f(x) = \phi(x, 0)$. Alors $f(x_0) = y_0$ et
 $\forall x \in \tilde{U} \quad F(x, f(x)) = 0$ ($\Rightarrow (**)$ en dérivant), et donné $x \in \tilde{U}$
 $y = f(x)$ est l'unique $y \in \tilde{V}$ tel que $F(x, y) = 0$

7. La dérivée directionnelle

7.1. Définitions

Définition Soit $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$
 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. Soit
 $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$ et $\underline{x}_0 \in \mathcal{D}$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle unilatérale (ou dérivée directionnelle au sens de Dini) de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$, et le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

Remarque: soit $\underline{e} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \underline{v}$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(\underline{x}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$$

Démonstration:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (t > 0)}} \frac{f(\underline{x}_0 + t \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \|\underline{v}\| \cdot \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ (s > 0)}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{e} s) - f(\underline{x}_0)}{s}$$

$t = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot s$

Remarque: pour $n=1$ la dérivée directionnelle unilatérale pour $\underline{e}=(1)$ est égale à la dérivée à droite et pour $\underline{e}=(-1)$ à moins la dérivée à gauche (vérifier !)

Remarque: pour $\underline{v} = \underline{e} = (0, \dots, 0, \underset{\text{position } i}{1}, 0, \dots, 0)^T$ on a.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$$

Remarque: si $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$ existe, alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$

Proposition: soit $g(t) := f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$. Alors.

$$\left. \begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \\ g'(0+) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) \end{aligned} \right\} (*)$$

↑
dérivée à droite en $t=0$.

┌ Démonstration:

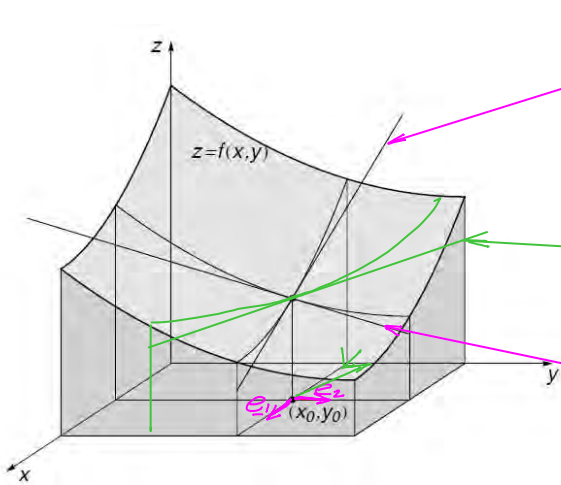
$$g'(0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

$$g'(0+) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

└

Remarque: (*) est une (bonne) manière de calculer la dérivée directionnelle (unilatérale)

Attention ! f n'est pas forcément différentiable en (x_0, y_0) (voir les exemples plus loin).



penne $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

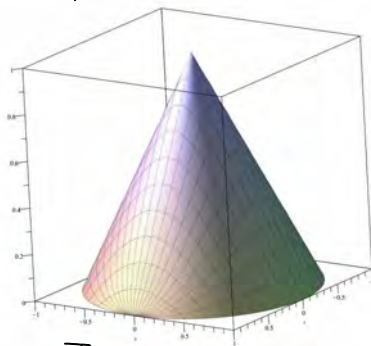
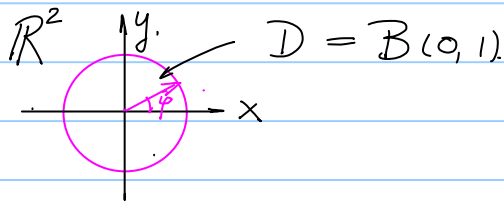
penne $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0, y_0)$, où $\underline{e} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \underline{v}$

penne $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Exemple 1

Soit $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

pour $(x, y) \in D = B(0, 1)$



disque ouvert de rayon 1 centré en 0 (voir 2.3)

Soit $(x_0, y_0) = (0, 0)$, et

$\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ (φ arbitraire mais fixe)

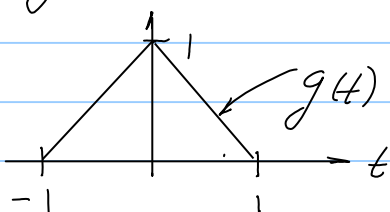
i) en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cos(\varphi), 0 + t \sin(\varphi)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - |t| - 1}{t} \text{ n'existe pas.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(0, 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(0 + t \cos(\varphi), 0 + t \sin(\varphi)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1 - t - 1}{t} = -1.$$

ii) avec la fonction $g(t)$

$$g(t) = f(0 + t \cdot \cos(\varphi), 0 + t \cdot \sin(\varphi)) = 1 - |t|$$

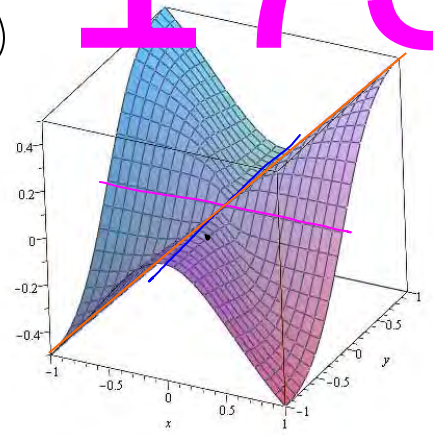


$g'(0+) = -1$
 $g'(0)$ n'existe pas

Exemple 2 (voir aussi 4.4 et 4.8)

Soit

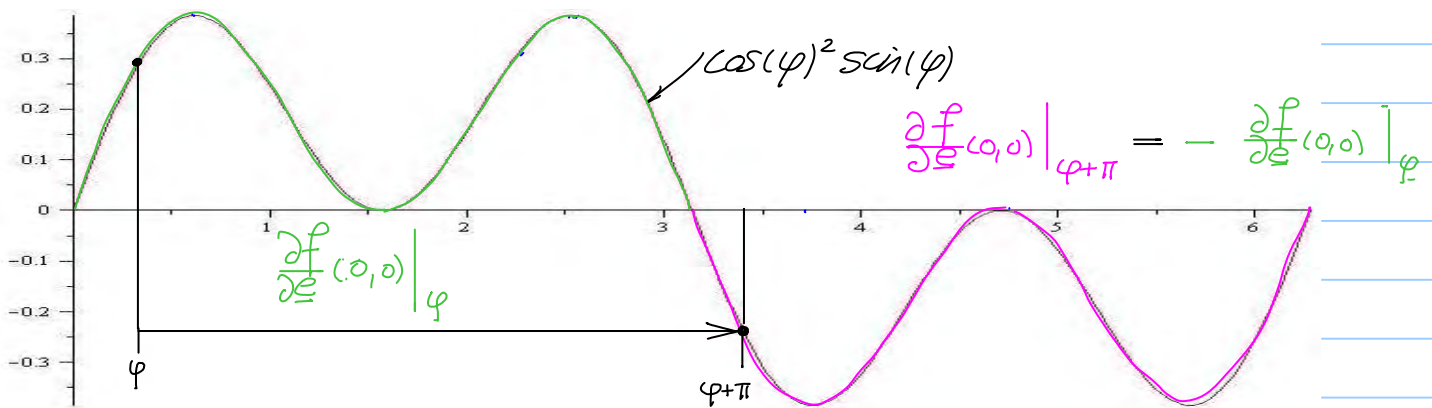
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Soit $(x_0, y_0) = (0,0)$ et $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 \cos(\varphi)^2 t \sin(\varphi)}{t^2} - 0}{t} = \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)$$



Remarque: si la dérivée directionnelle existe pour tout vecteur $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ on a nécessairement

$$\forall \varphi \in [0, \pi[\quad \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0, y_0) \Big|_{\varphi+\pi} = - \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0, y_0) \Big|_{\varphi}$$

Pour résumer l'exemple (voir aussi 4.4 et 4.6)

La fonction de l'exemple 2 est continue en $(0,0)$ et les dérivées partielles en $(0,0)$ existent. En fait la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur $v \neq 0$, mais la fonction f n'est quand-même pas différentiable en $(0,0)$, elle n'admet pas de plan tangent en $(0,0)$.

7.2. Le cas d'une fonction différentiable

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, f différentiable en $(x_0, y_0) \in D$ et soit $\underline{v} = (v_1, v_2)^T$, $\underline{v} \neq 0$. Soit

$$g(t) = f(\underbrace{x_0 + t \cdot v_1, y_0 + t \cdot v_2}_{h(t)}) = (f \circ h)(t)$$

Puisque f est différentiable en (x_0, y_0) on a (dérivée en chaîne)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = g'(0) = \underbrace{f'(\underbrace{h(0)}_{=(x_0, y_0)})}_{\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{matrix}} \cdot \underbrace{h'(0)}_{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}}$$

multiplication ces matrices

$$\underline{\underline{=}} \langle \nabla f(x_0, y_0), \underline{v} \rangle$$

voir § 5.1
isomorphisme des
espaces vectoriels

Définition bis (cas où f est différentiable)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D ouvert, f différentiable en $\underline{x}_0 \in D$, et soit $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$. Le nombre

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) &:= \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) v_i \end{aligned}$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

Remarque: cette définition est équivalente à la définition avec la limite sous l'hypothèse que f soit différentiable.

Remarque: si f est différentiable on obtient aucune nouvelle information sur f

Remarque: (cas f différentiable)

Soit $\underline{e}$ un vecteur unité et supposons que $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$

Alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$ est maximal si $\underline{e}$ et $\nabla f(\underline{x}_0)$ sont colinéaires c'est-à-dire pour

$$\underline{e} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

car dans ce cas on a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0) = \left\langle \nabla f(\underline{x}_0), \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} = \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

donc maximal pour des vecteurs colinéaires! ∇

$\leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{e}\|$
Cauchy-Schwarz $\underline{e} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$

Exemples (fonctions de classe C^1)

$$1) f(x, y) = e^{x \cdot y}, \quad (x_0, y_0) = (1, 0), \quad \underline{v} = (1, 1)^T$$

$$i) \left. \begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (e^{x \cdot y} \cdot y, e^{x \cdot y} \cdot x)^T \\ \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1, 0) &= \left\langle (0, 1)^T, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \end{aligned} \right\} \text{Définition bis}$$

$$ii) g(t) = f(1+t, 0+t)$$

$$= e^{(1+t) \cdot t} = e^{t+t^2}$$

$$g'(0) = e^{t+t^2} (1+2t) \Big|_{t=0} = 1 \quad \left. \vphantom{g'(0)} \right\} \text{Définition originale calculée avec } g.$$

$$2) f(x, y, z) = e^{x \cdot y \cdot z}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$$

$$\underline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T$$

$$i) \nabla f(x, y, z) = (e^{xyz} \cdot y \cdot z, e^{xyz} \cdot x \cdot z, e^{xyz} \cdot x \cdot y)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(1, 1, 0) = \left\langle (0, 0, 1)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$ii) g(t) = e^{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}t) \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}t) \cdot (0 + \frac{1}{\sqrt{3}}t)} = \dots =$$

le mieux est d'utiliser les développements limite

$$e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t + t \cdot \varepsilon(t)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}t + t \cdot \varepsilon(t)$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$
 "composition des développements limite."
 $e^x = 1 + x + \underbrace{x \cdot \varepsilon(x)}_{\equiv \theta(x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

$$= g(0) + \boxed{g'(0)} \cdot t + \underbrace{t \cdot \varepsilon(t)}_{\equiv \theta(t)}$$

Donc $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(1, 1, 0).$

8. Approximation de Taylor, développements limités

8.1. Développements limités d'ordre un et deux ($n=2$)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, f de classe $C^1(D)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$. Alors f possède un développement limité d'ordre un dans un voisinage de (x_0, y_0) :

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}_{p_1(x,y)} + d \cdot \varepsilon(x,y)$$

$$\text{où } d = \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\text{et } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x,y) = 0.$$

Le polynôme $p_1(x,y)$ est appelé le polynôme de Taylor d'ordre un de f en (x_0, y_0) . Ce polynôme approxime f linéairement dans un voisinage de (x_0, y_0) .

Si f est de classe $C^2(D)$, alors f possède un développement limité d'ordre deux dans un voisinage de (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) (x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) (y - y_0)^2 \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) (x - x_0) (y - y_0)}_{p_2(x,y)} + d^2 \varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

$$= f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \text{Hess}(f)(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$= p_2(x, y)$

où (rappel, voir la section 4.5.4)

$$\text{Hess}(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

est la matrice hessienne de f en (x_0, y_0) . Ici, la matrice hessienne est symétrique, car on a supposé f de classe C^2 (voir la remarque de la section 4.5.4). Le polynôme $p_2(x, y)$ est le polynôme de Taylor d'ordre deux de f en (x_0, y_0) . Il approxime f d'une manière quadratique dans un voisinage de (x_0, y_0) .

Exemple: $f(x, y) = \sin(2x+y) + 3 \cdot \cos(x+y)$

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ (à titre d'exemple)

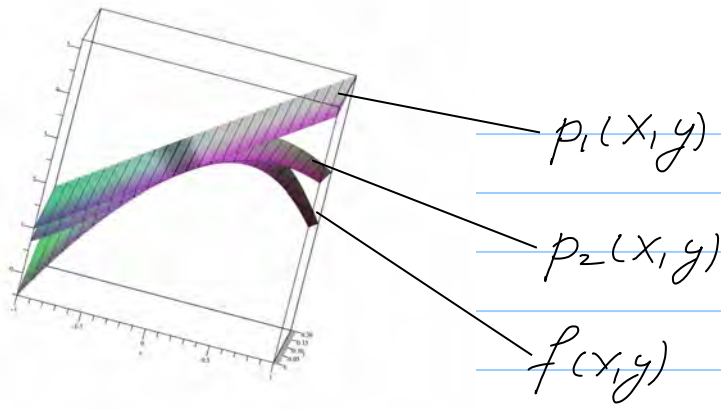
$$f(0, 0) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -3$$

$$p_2(x, y) = 3 + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -3x-3y \\ -3x-3y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 3 + 2x + y - \frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{3}{2}y^2$$



Deuxième méthode de calcul (composition des développements limités)

Puisque $2x+y|_{(0,0)} = 0 =: z_1$ et

$$x+y|_{(0,0)} = 0 =: z_2$$

on peut calculer $p_2(x, y)$ par la composition des développements limités de $\sin(z)$ en $z=z_1=0$ et de $\cos(z)$ en $z=z_2=0$ avec (les développements limités de) $2x+y$ et $x+y$ (voir Analyse I pour cette technique). On a:

$$\sin(z) = z + z^2 \varepsilon(z) \quad \text{avec} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varepsilon(z) = 0$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{1}{2} z^2 + z^2 \varepsilon(z) \quad \text{avec} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varepsilon(z) = 0$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (2x+y) + \boxed{(2x+y)^2 \varepsilon(2x+y)}^{(1)} \\ &\quad + 3 \left(1 - \frac{1}{2} (x+y)^2 + \boxed{(x+y)^2 \varepsilon(x+y)}^{(2)} \right) \\ &= 3 + 2x + y - \frac{3}{2} x^2 - 3xy - \frac{3}{2} y^2 + \underbrace{d^2 \varepsilon(x, y)}_{(1)+(2) \text{ voir la remarque}} \end{aligned}$$

Remarque concernant les restes
(voir la proposition 2.6)

$$(|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|x||y| \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2|x||y| \leq x^2 + y^2 = d^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ceci implique que $(x+y)^2 \in (x+y) = d^2 \in (x, y)$ et que $(2x+y) \in (2x+y) = d^2 \in (x, y)$ car on a

$$\begin{aligned} & (x+y)^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq 2 \cdot d^2 \\ \text{et} \quad & (2x+y)^2 \leq 4x^2 + y^2 + 4|x||y| \leq 4(x^2 + y^2) + 4|x||y| \leq 6d^2 \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x+y) = 0 \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(2x+y) = 0.$$

8.2. Développements limités d'ordre N

Rappel: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert, f N fois dérivable sur I , $x_0 \in I$. Alors.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_0)(x-x_0)^N + \\ &\quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad + (x-x_0)^N \varepsilon(x) \end{aligned} \right\} (*)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k}{(x-x_0)^N} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(x_0) - f^{(N)}(x_0)(x-x_0)}{N! (x-x_0)} \stackrel{=0}{=} 0 \\ &\quad \text{B.H.} \quad \text{car } f^{(N-1)} \text{ dérivable} \end{aligned}$$

Avec $h = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + h$ on obtient pour (1)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_0) h^N + |h|^N \varepsilon(x_0 + h)$$

ou encore avec l'application linéaire

$$\frac{d}{dx} : C^k(I) \longrightarrow C^{k-1}(I) \quad \begin{array}{ccc} \textcircled{f} & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & \textcircled{f'} \\ C^k(I) & & C^{k-1}(I) \end{array}$$

$$f \longmapsto \frac{d}{dx} f = f'$$

$$f(x_0 + h) = \sum_{l=0}^N \frac{1}{l!} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx} \right)^l f \right) (x_0) + |h|^N \varepsilon(x_0 + h)$$

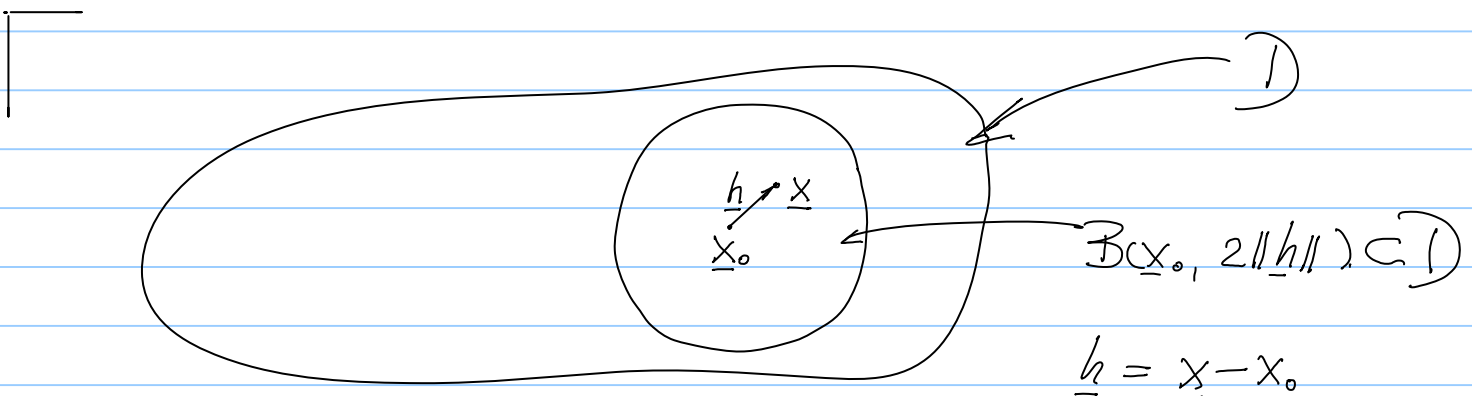
terme $l=0$: $\frac{1}{0!} \left(\underbrace{\left(h \cdot \frac{d}{dx} \right)^0}_{\substack{\text{zéro} \\ \text{application identité par convention}}} f \right) (x_0) = f(x_0)$

terme $l=1$: $\frac{1}{1!} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx} \right) f \right) (x_0) = h \cdot f'(x_0)$

terme $l=2$: $\frac{1}{2!} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx} \right)^2 f \right) (x_0) = \frac{1}{2} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx} \right) \left(h \cdot \frac{d}{dx} f \right) \right) (x_0)$
 $= \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{d}{dx} f' \right) (x_0) = h^2 f''(x_0)$

etc.

Généralisation à $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^N(D)$



On définit la fonction $g \in C^N([0, 2\pi], \mathbb{R})$ par.

$$g(t) = f(\underline{x}_0 + t \underline{h}) \quad (f: D \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(\underline{x}_0 + t \underline{h}) \cdot \underline{h} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0 + t \underline{h}) h_j \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

$$g''(t) = \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)'(\underline{x}_0 + t \underline{h}) \cdot \underline{h} \right) h_j$$

$$\vdots = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0 + t \underline{h}) h_i h_j$$

$\Rightarrow$

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = g(1) = \sum_{\ell=0}^N \frac{1}{\ell!} g^{(\ell)}(0) + \|\underline{h}\|^N \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}). \quad \square$$

Théorème soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
 f de classe $C^N(D)$, $\underline{x}_0 \in D$. Alors f
 possède un développement limité d'ordre N
 dans un voisinage de $\underline{x}_0$:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \sum_{\ell=0}^N \frac{1}{\ell!} (\langle \underline{h}, \nabla \rangle^\ell f)(\underline{x}_0) + d^N \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})$$

$$\text{où } d = \|\underline{h}\| \text{ et } \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0$$

Exemple: ($n=2$, coordonnées cartésiennes, développement
 limité de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) , $\underline{h} = (h, k)^T$ et
 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T$).

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{\ell=0}^N \frac{1}{\ell!} \left(\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^\ell f \right)(x_0, y_0) +$$

$$\text{où } d = \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$+ d^N \varepsilon(x_0 + h, y_0 + k)$$

┌ Rappel: formule du binôme (voir Annexe I)

$$(a+b)^{\ell} = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^{\ell-m} b^m \quad (\text{on suppose que } a \cdot b = b \cdot a)$$

$$\binom{\ell}{m} = \frac{\ell!}{m!(\ell-m)!} = \frac{\ell(\ell-1)\dots(\ell-m+1)}{m!}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \dots$$

Pour $N=3$ on obtient donc (car $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$):

$$f(\underbrace{x_0+h}_{=x}, \underbrace{y_0+k}_{=y}) = f(x_0, y_0) + \left((h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}) f \right) (x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left((h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y})^2 f \right) (x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{3!} \left((h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y})^3 f \right) (x_0, y_0)$$

$$+ d^3 \varepsilon(x_0+h, y_0+k)$$

$$= f(x_0, y_0) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right)$$

$$+ \frac{1}{6} \left(h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) + 3h^2k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) \right.$$

$$\left. + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) \right)$$

$$=: p_3(x, y).$$

$$+ d^3 \varepsilon(\underbrace{x_0+h}_{=x}, \underbrace{y_0+k}_{=y})$$

etc.

9. Extremums locaux et absolus d'une fonction de n variables

9.1. Définitions

Définition soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\underline{x}_0 \in D$. On dit que f admet en $\underline{x}_0$:

- 1) un maximum local (ou relatif) si $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x}$ dans un voisinage de $\underline{x}_0$.
un minimum local (ou relatif) si $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x}$ dans un voisinage de $\underline{x}_0$.
- 2) un maximum (global ou absolu) si $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x} \in D$
un minimum (global ou absolu) si $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x} \in D$
- 3) un point stationnaire (ou point critique) si f est différentiable en $\underline{x}_0$ et $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$
- 4) un point-selle, si $\underline{x}_0$ est un point stationnaire et si dans tout voisinage de $\underline{x}_0$ il existe des points $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ tels que $f(\underline{x}_1) < f(\underline{x}_0) < f(\underline{x}_2)$

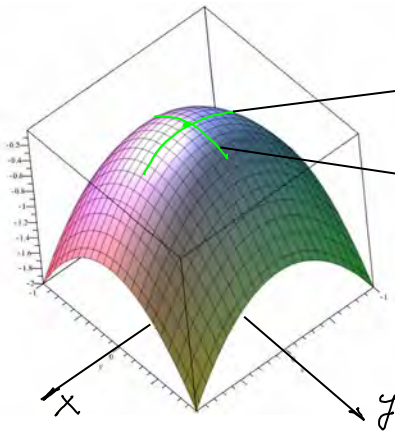
Terminologie: extremum $\Leftrightarrow$ maximum ou minimum

Remarque: la définition de point-selle dépend de l'auteur

9.2. f de classe $C^1(D)$; condition nécessaire pour un extremum

Théorème soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert $f \in C^1(D)$. Si f admet un extremum local en $x_0 \in D$, alors x_0 est un point stationnaire de f , c.-à-d. $\nabla f(x_0) = 0$

Démonstration ($n=2$) $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $x_0 = (x_0, y_0)$:



$$f(x, y_0) = f_1(x)$$

$$f(x_0, y) = f_2(y)$$

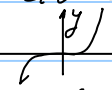
Soit $f_1(x) := f(x, y_0)$. Alors:

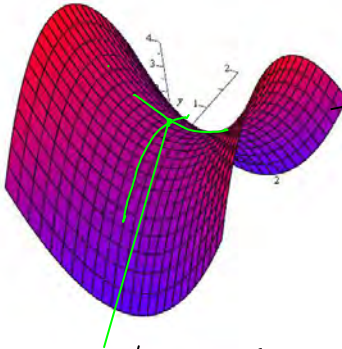
$$f_1(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = f_1(x_0) \quad (\text{cas d'un maximum})$$

$$f_1(x) = f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0) = f_1(x_0) \quad (\text{cas d'un minimum})$$

pour x dans un voisinage de x_0 . La fonction f_1 admet donc un maximum ou un minimum local en x_0 et f_1 est de classe C^1 , car $f_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$. Donc $f_1'(x_0) = 0$ (voir Analyse I). Donc on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Le même argument pour $f_2(y) = f(x_0, y)$ montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ceci montre que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^T = 0$$

Attention! un point stationnaire n'est pas forcément un extremum (ce n'était déjà pas le cas pour $n=1$; $f(x) = x^3$,  admet en $x=0$ un point stationnaire qui n'est ni un maximum ni un minimum), car on a aussi les points-selle



point-selle

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } (0, 0) \text{ est un point stationnaire car } f \text{ est de classe } C^1!$$

$$f_1(x) := f(x, 0) = x^2 \text{ admet un minimum en } x = 0.$$

$$f_2(y) := f(0, y) = -y^2 \text{ admet un maximum en } y = 0.$$

9.3. Fonctions de classe C^2 : conditions suffisantes pour un extremum ($n=2$)

Théorème (classification des points stationnaires, $n=2$)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $f \in C^2(D)$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ un point stationnaire de f (donc $\nabla f(x_0, y_0) = 0$) et posons:

$$\Lambda_1 \equiv \Lambda_1(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\Lambda_2 \equiv \Lambda_2(x_0, y_0) = \det(H_f(x_0, y_0)) = \det \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}^{(2)}$$

où

$$H_f(x_0, y_0) \equiv \text{Hess}(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}^{(1)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}^{(2)} \\ \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)} \end{pmatrix}$$

$H_f(x_0, y_0)$ symétrique car $f \in C^2(D)$.

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le schéma suivant:

Λ_2	Λ_1	nature du point
> 0	> 0	minimum local
> 0	< 0	maximum local
< 0		point selle
$= 0$		?

Terminologie: $\det(H_f(x_0, y_0))$ est appelé le hessien de la fonction f en (x_0, y_0)

Démonstration

Pour simplifier la notation on va supposer que $(x_0, y_0) = (0, 0)$. On a alors :

$$f(x, y) = f(0, 0) + \underset{\text{termes linéaires car } \nabla f(0, 0) = 0}{0} + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + o^2(x, y)$$

Notation: $H_f(0, 0) \equiv H_f \equiv \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ — notation simplifiée

Avec cette notation: $\Lambda_1 = r$, $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2$

Voir algèbre linéaire

- H_f étant symétrique ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\det(H_f) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ ($= r \cdot t - s^2 = \Lambda_2$)
- $\text{tr}(H_f) = \lambda_1 + \lambda_2$ ($= r + t$)

- on peut diagonaliser H avec une matrice orthogonale U , et

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

pour un certain $\alpha \in [0, 2\pi[$.

e_1', e_2' , les vecteurs propres de H_f normalisés

- $U^T = U^{-1}$ (matrice orthogonale, $\det U = 1$)

- on a $U^T H_f U = U^{-1} H_f U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \equiv \text{Diag} \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow H_f = U \text{Diag} U^{-1} = U \text{Diag} U^T$$

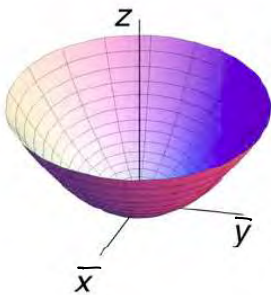
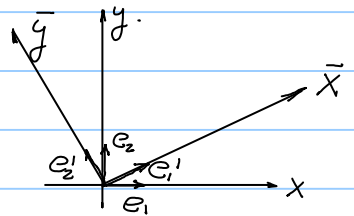
U définit un changement de coordonnées linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

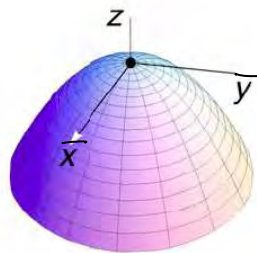
$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, H_f U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, U^T H_f U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

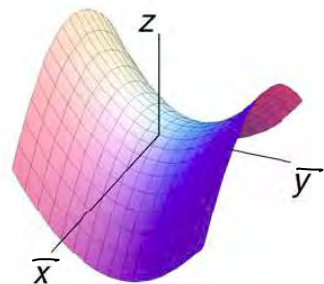
$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 \leftarrow \begin{cases} \text{utiliser} \\ \text{les} \\ \text{définitions} \end{cases}$$



$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$

(ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$)

$$\Rightarrow \Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

$$\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

$$\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$$

Discussion des conditions du théorème

- $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r > 0 \Rightarrow t > 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
 $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0 \Rightarrow \lambda_1$ ou λ_2 est positive.
 Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont positives
- $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r < 0 \Rightarrow t < 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
 $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = r + t < 0 \Rightarrow \lambda_1$ ou λ_2 est négative
 Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont négatives
- $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
- si $\Lambda_2 = 0$, la nature du point stationnaire dépend des termes d'ordre supérieur du développement limité.

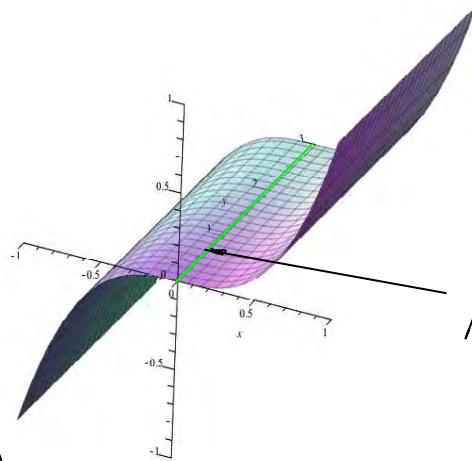
Exemple 1

$$f(x, y) = x^3$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{x=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



points stationnaires

Tous les points de la forme $(0, y)$ sont des points stationnaires et des points-selles selon notre définition, mais le théorème ne s'applique pas.

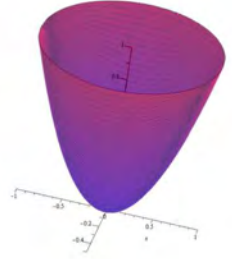
Exemple 2

$$a) f(x,y) = x^2 + 4y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2), \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \xrightarrow{x=y=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ est un point stationnaire.

$$\text{on a } H_f \equiv \text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = 2 > 0, \quad \Lambda_2 = 2 \cdot 8 = 16 > 0 \\ \Rightarrow \text{un minimum local}$$



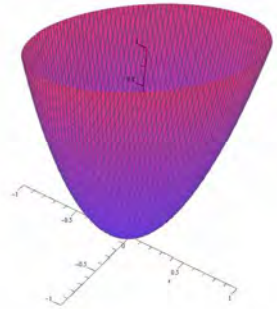
$$b) f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ -3x + 5y \end{pmatrix} \xrightarrow{x=y=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ est un point stationnaire

$$H_f \equiv \text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = 5, \quad \Lambda_2 = 5 \cdot 5 - (-3)(-3) = 16 > 0 \\ \Rightarrow \text{un minimum local}$$



$$\begin{aligned} \text{En fait: } f(x,y) &= \frac{1}{2}((x+y)^2 + 4(x-y)^2) = \left(\underbrace{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\bar{x}} + 4 \underbrace{\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\bar{y}} \right) \\ &= \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 \end{aligned}$$

même fonction que sous a) en d'autres coordonnées

$$\text{On a } \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{=U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Changement de variables:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

↑
vecteurs propres normalisés de H_f

9.4. Fonctions de classe C^2 , conditions suffisantes pour un extremum ($n=3$)

Théorème Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ de classe $C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert. Soit $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ un point stationnaire de f ($\nabla f(p_0) = 0$) et posons:

$$H \equiv \text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)}^{(1)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)}^{(2)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0)}^{(3)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \det(\boxed{\phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)}}^{(1)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)$$

$$\Lambda_2 = \det(\boxed{\phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)}}^{(2)}) = \dots$$

$$\Lambda_3 = \det(\boxed{\phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)}}^{(3)}) = \det(H)$$

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le tableau suivant:

(*) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ λ_1 $\leftarrow$ pour H diagonal

Λ_3	Λ_2	Λ_1	nature du point
> 0	> 0	> 0	minimum local
< 0	> 0	< 0	maximum local
$\neq 0$	tous les autres cas (6 cas)		point-selle

Remarque: utiliser (*) (le tableau est aussi valable si H_f est diagonal) pour reconstruire le tableau

「Démonstration: comme pour $n=2$. Diagonaliser H_f avec une matrice orthogonale et discuter les signes des valeurs propres en termes de $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$.」

Remarque: on a le théorème analogue pour $n > 3$.

9.5. Extremums absolus

Revoir le chapitre 2.3 pour la définition des ensembles ouverts et fermés et les définitions du bord et de l'intérieur d'un ensemble

9.5.1. Définitions, théorèmes

Définition: un ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ est appelé borné s'il existe $0 < r < \infty$ tel que $B \subset B(0, r)$

Définition un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ qui est borné et fermé est appelé compact

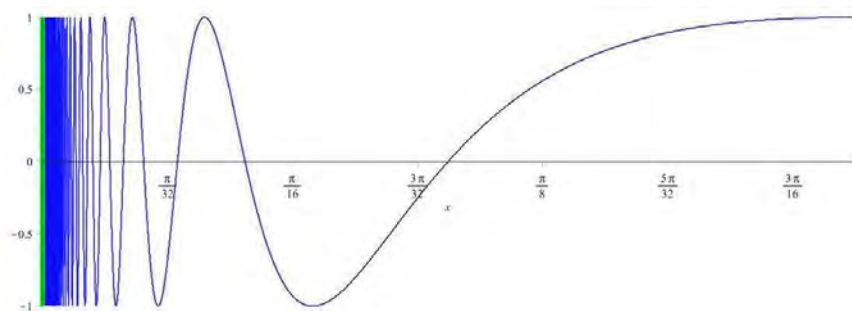
Définition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \emptyset$, est connexe s'ils n'existent pas deux sous ensembles ouverts $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ tels que:

$$X \cap Y = \emptyset, X \cap D \neq \emptyset, Y \cap D \neq \emptyset, D \subset X \cup Y$$

Exemple . $D = D_1 \cup D_2$, où.

$$D_1 = \left\{ (x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{2}{\pi} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \right\}.$$



$$\left. \begin{aligned} D_1 \cap D_2 &= \emptyset \\ D_1 \cap D &= D_1 \neq \emptyset \\ D_2 \cap D &= D_2 \neq \emptyset \\ D &= D_1 \cup D_2 \subset D \\ \text{mais } D &\text{ est connexe !} \end{aligned} \right\} (*)$$

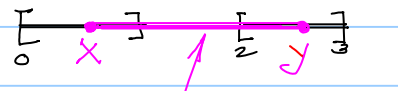
Definition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \emptyset$, est connexe par arcs si deux points x, y quelconques de D peuvent être joints dans D par un chemin.

une fonction continue de $[0,1] \rightarrow D$ (voir la section 3.0).

Remarque: connexe par arc implique connexe, mais pas vice-versa.
 D de l'exemple (*) n'est pas connexe par arc.

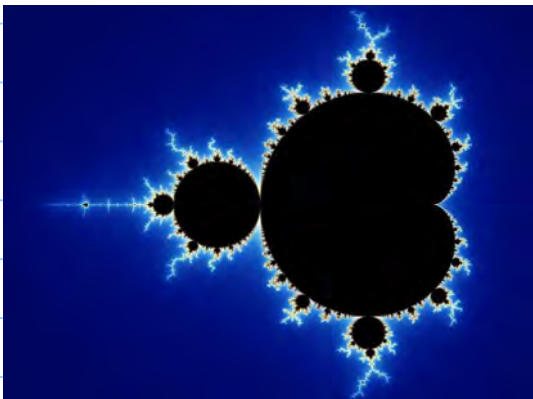
Exemples: $C = [0,1]$ ($\subset B(0,2) =]-2,2[$, donc borné)
 compact, connexe par arc.

$C = [0,1] \cup [2,3]$ ($\subset B(0,4) =]-4,4[$, donc borné)
 compact, mais ni connexe par arcs, ni connexe.


 un chemin qui relie x et y . (mais pas dans C)

prendre $X =]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
 $Y =]\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[$ par exemple.

Ensemble de Mandelbrot



- ensemble compact ✓
- ensemble connexe ✓
- connexe par arc ?

https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot

<https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE&feature=youtu.be>

Comment vérifier la continuité d'une fonction sur un ensemble compact ?

Critère: Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $C \subset D$ un ensemble compact. Alors la restriction d'une fonction continue $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ à C est une fonction continue sur C .

Définition: une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est appelée bornée (ou bornée sur D) si l'image de f est un ensemble borné, c.-à-d. s'il existe une constante $r > 0$ telle que $\text{Im}(f) \subset \overline{B(0, r)}$, ou encore, si pour tout $x \in D$, $-r \leq f(x) \leq r$.

On a les résultats suivants qui sont analogues aux résultats pour les fonctions d'une variable. Voir Analyse I pour les démonstrations et utiliser le critère de la série 7B, Ex. 3. (*)

Théorème: toute fonction continue sur un ensemble compact est bornée et admet un minimum et un maximum absolu.

┌ Voir démonstration ① en bas ┘

Théorème toute fonction continue $f: C \rightarrow \mathbb{R}$, où $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact, est uniformément continue sur C .

┌ Voir démonstration ② en bas ┘

Théorème (de la valeur intermédiaire): toute fonction continue sur un ensemble compact, connexe par arc admet toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$, où m est le minimum et M le maximum de la fonction.

Démonstration ①

i) f bornée : sinon, $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n \in C$ t.q.
 $|f(x_n)| \geq n$. B.W. $\exists \tilde{x}_k = x_{n_k}$ qui
 converge, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = x \in C$ par (*)

$$\Rightarrow \underline{+\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(\tilde{x}_k)|$$

$$\stackrel{\text{continuité}}{=} |f(\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k)| = |f(x)| \leq \underline{\infty} \quad *$$

ii) $M := \sup \{ f(x) : x \in C \}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in C$ t.q. $f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$.
 (propriété du sup). B.W. $\exists \tilde{x}_k = x_{n_k}$ qui converge
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = x \in C$ par (*). $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_k) = f(x) = M$.
 par la continuité de f .

$m := \inf \{ f(x) : x \in C \}$ (même démonstration)

Démonstration ②

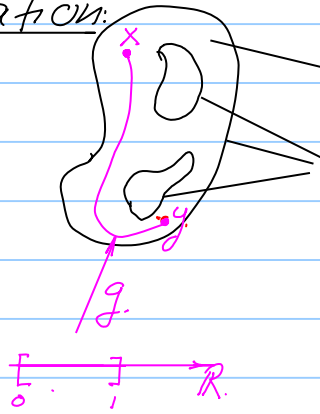
(démonstration par l'absurde)

Si f n'est pas uniformément continue sur C , $\exists \varepsilon > 0$,
 $\forall \delta > 0$, $\exists x, y \in C$, $\|x - y\| \leq \delta$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$. On
 peut donc trouver deux suites $(x_k)_{k \geq 0}$ et $(y_k)_{k \geq 0}$
 telles que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{k}$ et
 $|f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$. De $(x_k)_{k \geq 0}$ on peut extraire ^{par (A)}
 une sous-suite $(x_{k(p)})_{p \geq 0}$ telle que $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{k(p)} = x \in C$
 et on a :

$$\|y_{k(p)} - x\| \leq \|y_{k(p)} - x_{k(p)}\| + \|x_{k(p)} - x\| \leq \frac{1}{k(p)} + \|x_{k(p)} - x\|$$

ce qui montre que $\lim_{p \rightarrow \infty} y_{k(p)} = x$. Par la continuité
 de la fonction f il existe p_0 tel que $\forall p \geq p_0$
 $|f(x_{k(p)}) - f(y_{k(p)})| \leq \varepsilon$ ~~$\times$~~

Démonstration:



$C \subset \mathbb{R}^n$ compact, connexe par arc

les bords sont inclus dans C

puisque C est connexe par arc il existe $g: [0, 1] \rightarrow C$, continue, telle que $g(0) = x$ et $g(1) = y$.

Soit $x, y \in C$ tels que $f(x) = m$ et $f(y) = M$ et soit $g: [0, 1] \rightarrow C$ un chemin qui relie x à y , c.-à-d. tel que $g(0) = x$ et $g(1) = y$. Puisque f et g sont continues, la fonction $h = f \circ g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $h(0) = m$, $h(1) = M$ et h prend donc toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$ (voir Analyse I).
Conséquence: f prend toutes les valeurs dans $[m, M]$ sur toute courbe dans C qui relie x à y .

Théorème Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint ses extremums

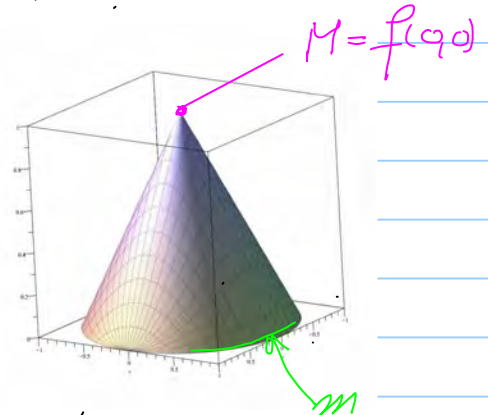
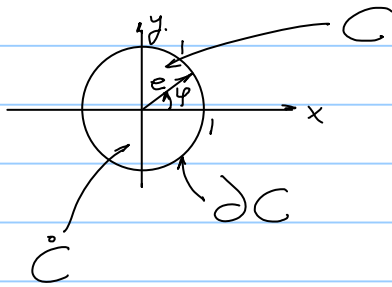
- i) dans $\underbrace{\text{l'intérieur de } C}_{\equiv \overset{\circ}{C}}$ en un point stationnaire
- ii) dans l'intérieur de C en un point où f n'est pas différentiable
- iii) sur le bord ($\equiv$ la frontière) de C ($\equiv \partial C$)

Attention! si $\nabla f(x_0) = 0$ pour x_0 un point dans l'intérieur de C , alors x_0 est de type i) ou ii), selon si f est différentiable en x_0 ou pas.

9.5.2. Exemples, $n=2$ (discussion de fonctions)

i) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

f est continue sur C , car f continue sur $\mathbb{R}^2$



ii) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^T$ existe sur $B(0,1) \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) \neq (0,0)^T$

$\Rightarrow$ pas de points stationnaires

iii) en $(0,0)$ la fonction n'est pas différentiable (sinon le gradient y serait bien défini).

$f(0,0) = 1$

iii) pour les points du bord on a $x^2 + y^2 = 1$ et $f(\text{point du bord}) = 0$. La fonction f admet donc le minimum en ces points

Conclusions de i) - iii)

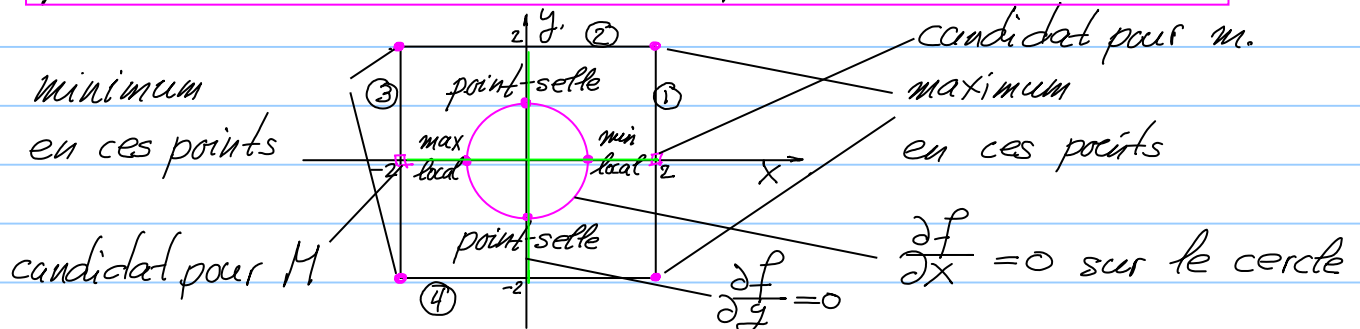
- le maximum de f est M
- le minimum de f est $m = 0$

• $f: C \xrightarrow{\text{surjective}} [0,1] = [m,M]$ car C est compact et convexe par arc, et f est continue sur C .

2) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$ sur

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$$

f continue sur C car f continue sur $\mathbb{R}^2$.



$$i) \nabla f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1, 2xy)^T \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

les points stationnaires sont :

$$\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

$$f(1,0) = -\frac{2}{3}, \quad f(0,\pm 1) = 0, \quad f(-1,0) = \frac{2}{3}.$$

ii) f est différentiable car un polynôme (pas de points dans cette liste).

iii) quatre parties:

$$\begin{aligned} x=2; -2 \leq y \leq 2: f(2,y) &= \frac{2}{3} + 2y^2 & \text{①} \\ y=2; -2 \leq x \leq 2: f(x,2) &= \frac{1}{3}x^3 + 3x & \text{②} \\ x=-2; -2 \leq y \leq 2: f(-2,y) &= -\frac{2}{3} - 2y^2 & \text{③} \\ y=-2; -2 \leq x \leq 2: f(x,-2) &= \frac{1}{3}x^3 + 3x & \text{④} \end{aligned}$$

① valeur minimale en $y=0$: $f(2,0) = \frac{2}{3}$

valeur maximale en $y=\pm 2$: $f(2,\pm 2) = \frac{26}{3}$

② $\frac{d}{dx}f(x,2) = x^2 + 3 > 0$, $f(x,2)$ est croissant.

valeur minimale en $x=-2$: $f(-2,2) = -\frac{26}{3}$

valeur maximale en $x=2$: $f(2,2) = \frac{26}{3}$

③ voir ①, valeur minimale en $y=\pm 2$: $f(-2,\pm 2) = -\frac{26}{3}$

valeur maximale en $y=0$: $f(-2,0) = -\frac{2}{3}$

④ identique à ②: $f(-2,-2) = -\frac{26}{3}$, $f(2,-2) = \frac{26}{3}$

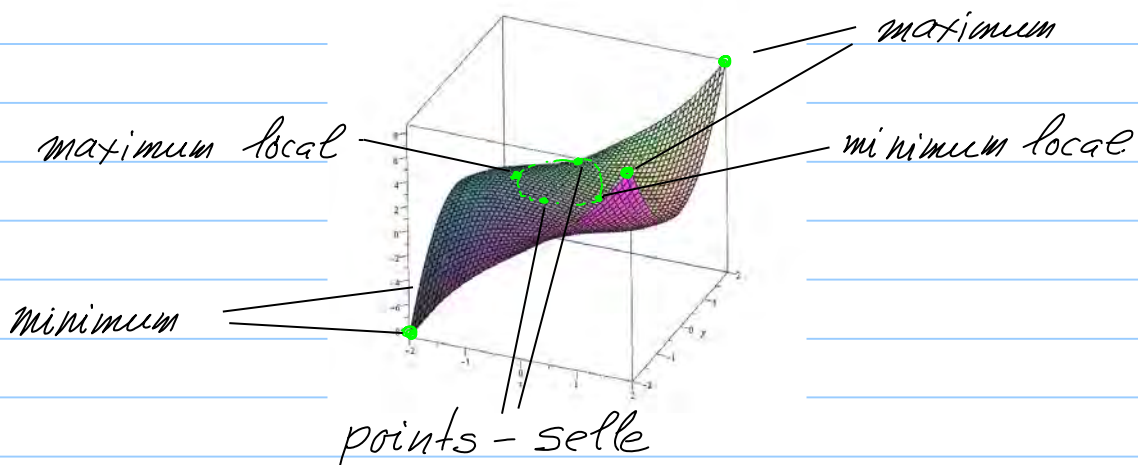
Discussion des points stationnaires (suite de i))

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = 2x, \quad \Lambda_2 = 4(x^2 - y^2)$$

$(1,0)$: $\Lambda_2 = 4 > 0$, $\Lambda_1 = 2 > 0 \Rightarrow$ minimum local.

$(-1,0)$: $\Lambda_2 = 4 > 0$, $\Lambda_1 = -2 < 0 \Rightarrow$ maximum local

$(0,\pm 1)$: $\Lambda_2 = -4 < 0 \Rightarrow$ points-selle



Conclusion: $m = -\frac{26}{3}$, $M = \frac{26}{3}$ (comparer les valeurs)

9.5.3. Remarques pour le cas $n > 2$

- même procédure que pour $n=2$
- sur le bord on aura typiquement des fonctions de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$
- procéder d'une manière récursive

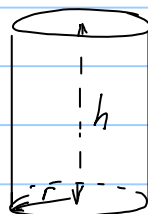
9.6. Extremums liés

La méthode (des multiplicateurs de Lagrange) permet de trouver des extremums d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (fonction objectif) sous contraintes (d'autres fonctions $g_1, \dots, g_m$, $1 \leq m \leq n-1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$).

9.6.1. Exemple

Trouver le cylindre de volume V donné et de surface minimale

$$\begin{aligned} V - \pi r^2 h &=: g(r, h) \stackrel{!}{=} 0 \\ S = 2\pi r^2 + 2\pi r h &=: f(r, h) \end{aligned}$$



Méthode 1: éliminer une des variables:

$$g(r, h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \quad (\text{contrainte})$$

$$\begin{aligned} S(r) &= f\left(r, \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \end{aligned}$$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow S = 3 \cdot (2\pi)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \quad (\text{et c'est bien un minimum car } S'' > 0)$$

Méthode 2: fonction de Lagrange. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned} F(r, h, \lambda) &:= f(r, h) - \lambda g(r, h) \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda (V - \pi r^2 h) \end{aligned}$$

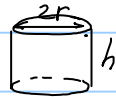
On cherche des points stationnaires de F ($\nabla F = 0$).

$$\nabla F(r, h, \lambda) = (\underbrace{4\pi r + 2\pi h + 2\pi r h}_{\textcircled{1}}, \underbrace{2\pi r + \lambda \pi r^2}_{\textcircled{2}}, \underbrace{-(V - \pi r^2 h)}_{\textcircled{3}})^T$$

$$= (0, 0, 0)^T$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{r} \xRightarrow{\textcircled{1}} 4\pi r + 2\pi h - \frac{2}{r} 2\pi r h = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi r - 2\pi h = 0 \Rightarrow h = 2r$$



$$\textcircled{3} \Rightarrow V = \pi r^2 (2r) \Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{on retrouve } (*))$$

9.6.2. Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Théorème (condition nécessaire pour un extremum lié)

Soient les fonctions $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, de classe C^1 et un point (x_0, y_0) tel que $g(x_0, y_0) = 0$ et $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ (*). Si f admet en (x_0, y_0) un extremum sous la contrainte g (c'est-à-dire on réduit l'étude de f aux points (x, y) tels que $g(x, y) = 0$), alors il existe un nombre $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction de Lagrange

$$F: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, \lambda) \mapsto f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$$

soit stationnaire en (x_0, y_0, λ_0) .

Remarque: $\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right)}_{\textcircled{1}}, \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right)}_{\textcircled{2}}, \underbrace{-g(x_0, y_0)}_{\textcircled{3}} \Big)^T = (0, 0, 0)^T$$

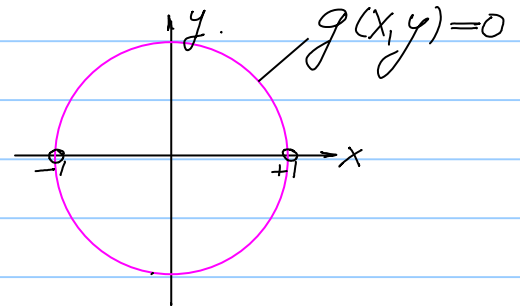
$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} = 0 \\ \textcircled{2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0) \text{ pour un } \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

$\textcircled{3} = 0$ la contrainte.

Contre-exemple (au theoreme sans $(*)$)

$$f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x, \quad g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$$



$g(x, y) = 0$ la contrainte
($\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$)

$f(1, 0) = 1$ (maximum sous contrainte)

$f(-1, 0) = -1$ (minimum sous contrainte)

$$\overline{F}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x - \lambda (x^2 + y^2 - 1)^2$$

$$\nabla \overline{F}(x, y, \lambda) = \left(\underbrace{1 - \lambda 4x(x^2 + y^2 - 1)}_{\textcircled{1}}, \underbrace{\lambda 4y(x^2 + y^2 - 1)}_{\textcircled{2}}, \underbrace{-(x^2 + y^2 - 1)^2}_{\textcircled{3}} \right)^T$$

$$\textcircled{3} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \textcircled{2} = 0 \\ \Rightarrow \textcircled{1} = 1 \neq 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \nabla \overline{F}(x, y, \lambda) = (1, 0, 0)^T \neq (0, 0, 0)^T$ pour tous les points (x, y) tels que $g(x, y) = 0$.

Notation: $\langle \underline{\lambda}, g(\underline{x}) \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\underline{x})$

Démonstration

On utilise le théorème des fonctions implicites pour exprimer m variables en termes des autres $n-m$ variables. Par exemple, soit

$$\underline{x} = (x, y) \in U \times V \subset \mathbb{D}$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n-m}), \quad y = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$$

$\frac{\partial g}{\partial x}$	$\frac{\partial g}{\partial y}$
$n-m$	m

 $\parallel$
 $(\nabla g_1, \dots, \nabla g_m)^T$

alors $g : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(x_0, y_0) = g(\underline{x}_0) = 0$

et si $\det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq 0$ on a

localement que $y = h(x)$ avec $y_0 = h(x_0)$
et la fonction

$$s(x) = f(x, h(x))$$

satisfait $s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h'(x_0)$

ce qui implique si $s'(x_0) = 0$ et en utilisant que

$$h'(x_0) = - \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

que.

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{1 \times (n-m)} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{1 \times m} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1}}_{m \times m} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right)}_{m \times (n-m)}$$

$1 \times (n-m)$

$1 \times m$

$m \times m$

$m \times (n-m)$

$=: \underline{\lambda}_0$

9.6.3. Maximum et minimum d'une fonction de classe C sur un domaine compact avec un bord de classe C'

(A comparer avec la méthode vu en section 9.5.2.)

Soit $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C' , $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, telle que l'ensemble.

$$C := \{ \underline{x} \in D : g(\underline{x}) \leq 0 \}$$

soit un ensemble compact. Alors, pour trouver le maximum et le minimum de f sur C :

- i) on localise les points stationnaires de f dans $\overset{\circ}{C}$.
- (ii) cette liste est vide, car f de classe C')
- iiia) on localise les points où $g(\underline{x}) = 0$ et $\nabla g(\underline{x}) = 0$
- iiib) on localise les points stationnaires de la fonction $F(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ dans $D \times \mathbb{R}$
- iv) on évalue f aux points trouvés sous i) - iii) et on compare les valeurs

Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$. Trouver les extremums de f sur la boule unité fermée.

$$C = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \leq 0 \}.$$

On a $D = \mathbb{R}^n$, f, g de classe C' sur D , C compact.

i) à l'intérieur de C

$$\begin{aligned}\nabla f(x_1, \dots, x_n) &= (x_2 x_3 \dots x_n, x_1 x_3 \dots x_n, \dots, x_1 \dots x_{n-1})^T \\ &= (0, \dots, 0)^T\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x_i = 0$ et $x_j = 0$ pour deux indices $i \neq j$.

Pour ces points $f(x) = 0$

Remarque: 0 n'est ni le maximum ni le minimum.

$$\text{car } f(\pm \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = \pm (\frac{1}{n})^n \neq 0$$

On va donc supposer que $\forall i, x_i \neq 0$. Pour ces points:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = f(x) \cdot (\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$$

$$\text{iiia) } \nabla g(x) = (2x_1, \dots, 2x_n) \neq (0, \dots, 0)^T$$

si $g(x) = 0$, c.-à-d. pour $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ (pas de points dans cette liste).

iiib) on pose $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ et on cherche des points stationnaires de F sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Mais

$$\nabla F(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \text{ et } g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \frac{1}{x_i} - \lambda \cdot 2x_i = 0 & i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2\lambda x_1^2 \quad \textcircled{1} \\ f(x) = 2\lambda x_2^2 \quad \textcircled{2} = \textcircled{1} \\ \vdots \\ f(x) = 2\lambda x_n^2 \quad \textcircled{n} = \textcircled{1} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2x_1^2} f(x) \quad (x \neq 0)$$

$$x_i^2 = x_1^2, i=2, \dots, n$$

$$(*)$$

Donc $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2 =: a > 0$ et avec $(*)$ on obtient que $n \cdot a = 1$ ou $a = \frac{1}{n} \Rightarrow x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}, i=1 \dots n$. (on a donc 2^n points intéressants).

iv) on peut choisir un nombre pair des $x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les autres $= \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = n^{-\frac{1}{2}n} \quad \text{points de maximums}$$

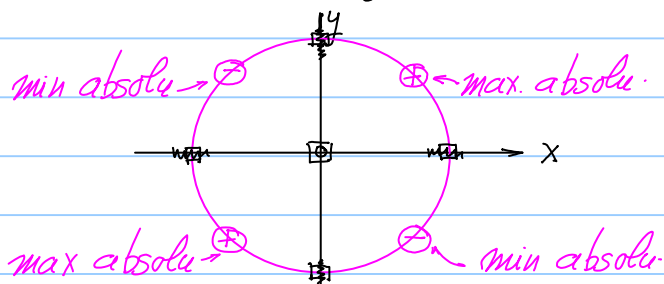
on peut choisir un nombre impair des $x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les autres $= \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$f(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = -n^{-\frac{1}{2}n} \quad \text{points de minimums.}$$

Le cas particulier $n=2$

$$f(x, y) = x \cdot y, \quad \nabla f(x, y) = (y, x)^T$$

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \}$$



$$\begin{aligned} \text{min } f(x, 0) = f(0, y) &= 0 \\ \circ \nabla f(0, 0) &= (0, 0)^T, f(0, 0) = 0 \\ \square f(\pm 1, 0) &= f(0, \pm 1) = 0 \\ \oplus f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \\ \ominus f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$m = -\frac{1}{2}, M = \frac{1}{2}$$

$f: C \longrightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est surjective (C connexe par arcs!)

9.6.5. Méthode directe ($n=2$) paramétrisation du bord

Dans l'exemple précédent ($n=2$) le bord est le cercle unité que l'on peut paramétriser par:

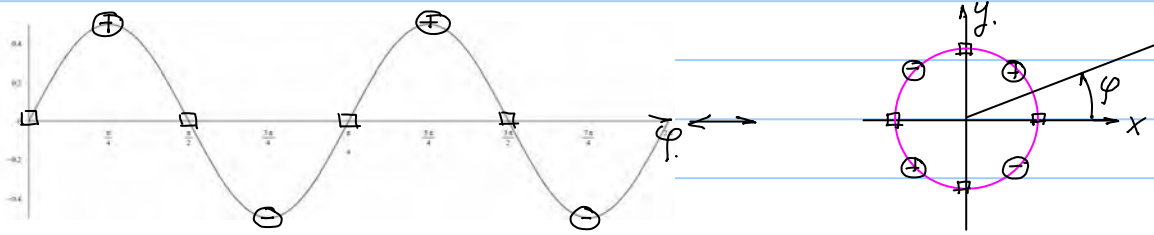
$$\begin{cases} x = \cos(\varphi) \\ y = \sin(\varphi) \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

↑
chemin: $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

En évaluant f le long de ce chemin on obtient

$$(f \circ h)(\varphi) = f(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \sin(2\varphi)$$



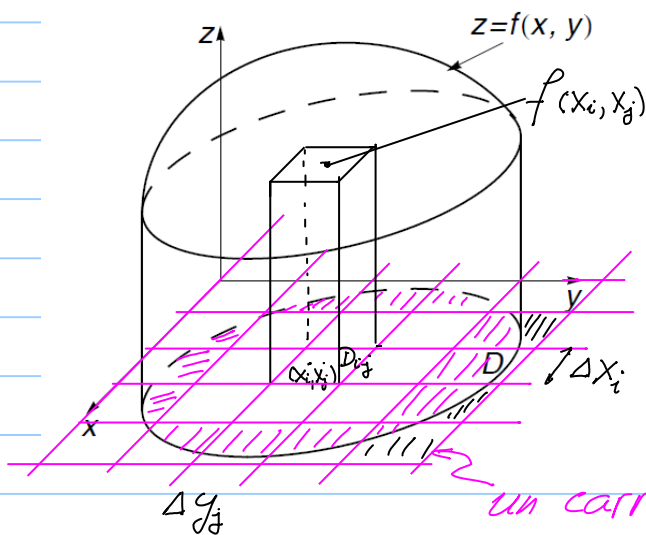
10. Intégrales multiples

10.1. Intégrales doubles ($n=2$)

10.1.1. Problématique

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée

$D \subset \mathbb{R}^2$ compact avec un bord "négligeable"



- découper en rectangles
- quoi faire avec /// , négliger ou compléter avec /// ? Ça revient au même, si le bord est Jordan-négligeable.
- aire de $D_{ij} \equiv |D_{ij}| \equiv \Delta\sigma_{ij} := \Delta x_i \Delta y_j$

10.1.2. Intégrale de Riemann sur un rectangle fermé

(voir Analyse I, chapitre 8.1.1.)

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $c < d$,

$D = [a, b] \times [c, d]$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée

Considérons, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ les subdivisions

$\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_p\}$ de $[a, b]$ et $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_q\}$ de $[c, d]$:
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_q = d$

Posons, pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$.

$$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Alors $|D_{ij}| := (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) =: \Delta x_i \cdot \Delta y_j$

$$|D| = (b-a) \cdot (d-c) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |D_{ij}|$$

et $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$. (Les D_{ij} sont aussi appelées une partition de D).

Les sommes de Darboux inférieures et supérieures de f relative à la paire de subdivisions (σ_1, σ_2) sont définies par:

$$\underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q m_{ij} |D_{ij}|$$

$$\bar{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q M_{ij} |D_{ij}|$$

où

$$m_{ij} = \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in D_{ij} \},$$

$$M_{ij} = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in D_{ij} \},$$

puis on définit:

$$\underline{S} \equiv \underline{S}(f) = \sup_{\sigma_1, \sigma_2} \underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2).$$

$$\bar{S} \equiv \bar{S}(f) = \inf_{\sigma_1, \sigma_2} \bar{S}(f, \sigma_1, \sigma_2).$$

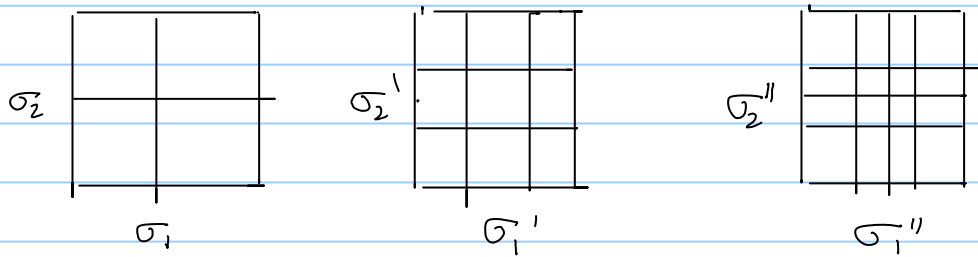
Définition: une fonction f est dite intégrable sur un rectangle fermé D (au sens de Riemann) si

$$\underline{S}(f) = \bar{S}(f).$$

Remarque 10.1.2: soient (σ_1, σ_2) et (σ_1', σ_2') deux subdivisions, alors:

$$\underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) \leq \bar{S}(f, \sigma_1', \sigma_2')$$

Démonstration: soit (σ_1'', σ_2'') le raffinement commun de (σ_1, σ_2) et (σ_1', σ_2') .



$$\text{alors } \underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) \leq \underline{S}(f, \sigma_1'', \sigma_2'')$$

$$\leq \bar{S}(f, \sigma_1'', \sigma_2'') \leq \bar{S}(f, \sigma_1', \sigma_2')$$

Conséquence: $-\infty < \underline{S} \leq \bar{S} < +\infty$

Remarque: d'une manière analogue on définit l'intégrale d'une fonction bornée définie sur un hyper-rectangle de $\mathbb{R}^n$ (produit cartésien de n intervalles fermés).

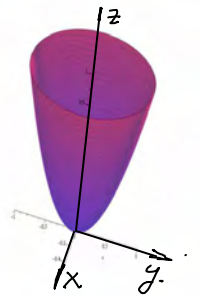
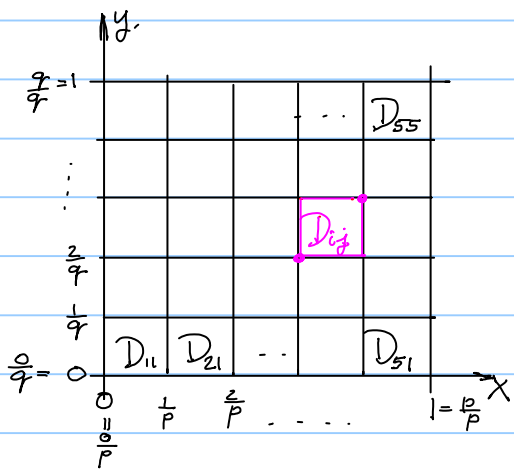
Notations: $\int_D f(x, y) d\sigma$, $\int_D f(x, y) dx \cdot dy$

$$\int_D f d\sigma, \int_D f, \int_D f(x) dx$$

$$\int_D f(x, y) dx dy, \int_D f d\sigma \text{ etc}$$

Remarque: $\int_D f(x,y) dx dy$ donne le volume du cylindre de base D délimité "en haut" (on suppose $f(x,y) \geq 0$ ici) par la surface $z = f(x,y)$.

Exemple: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D = [0,1] \times [0,1]$
 $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$.



$$p = q = n,$$

$$x_i^< = \frac{i-1}{p}, \quad x_i^> = \frac{i}{p}, \quad i=1, \dots, p$$

$$y_j^< = \frac{j-1}{q}, \quad y_j^> = \frac{j}{q}, \quad j=1, \dots, q$$

Pour tout $x, y \in D$, $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) &= (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 \\ &= \dots \geq x^2 + y^2 = f(x, y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{f(x_i^<, y_j^<)}_{m_{ij}} \leq f(x_i, y_j) \leq \underbrace{f(x_i^>, y_j^>)}_{M_{ij}}$$

et donc $\Delta x_i \Delta y_j = \frac{1}{pq}$

$$\underbrace{\frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(x_i^<, y_j^<)}_{= \underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2)} \leq$$

SR
↑

$$\frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(x_i, y_j)$$

(f continue).

$$\leq \underbrace{\frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(x_i^>, y_j^>)}_{= \overline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2)}$$

$$S^< \leq SR \leq S^>$$

$$S^< = \frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\left(\frac{i-1}{p} \right)^2 + \left(\frac{j-1}{q} \right)^2 \right) \quad \text{"théorème de Fubini"}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \left(\left(\frac{i-1}{p} \right)^2 + \left(\frac{j-1}{q} \right)^2 \right) \right)$$

$$p \rightarrow \infty \quad \int dx \quad q \rightarrow \infty \quad \int dy.$$

$$\stackrel{p=q=n}{=} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \stackrel{=}{=} \frac{2}{n^3} \frac{(n-1)n \cdot (2n-1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}.$$

Analyse I, par récurrence

$$S^> = \text{mêmes idées} = \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}.$$

Finalement, avec la remarque 10.1.2. on a

$$\frac{2}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} S^< \leq \underline{S} \leq \bar{S} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S^> = \frac{2}{3}$$

Conclusion: la fonction f est intégrable
sur D et $\int_D f \, d\sigma = \frac{2}{3}$.

10.1.3. Intégrale de Riemann sur un ensemble borné

Definition: soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $E \supset D$ un rectangle fermé. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur D si la fonction $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus D \end{cases}$$

est intégrable sur E et $\int_D f \, d\sigma := \int_E \tilde{f} \, d\sigma$.

Remarque la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix du rectangle E .

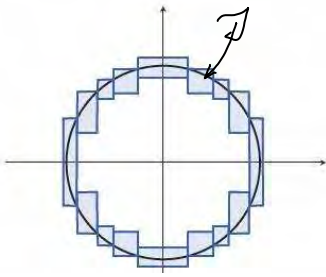
Definition: (Ensemble mesurable au sens de Jordan)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné. On dit que D est mesurable au sens de Jordan si la fonction constante égale à un sur D est intégrable au sens de Riemann sur D . Dans ce cas on pose

$$|D| := \int_D 1 \, d\sigma \quad (= \text{aire de } D)$$

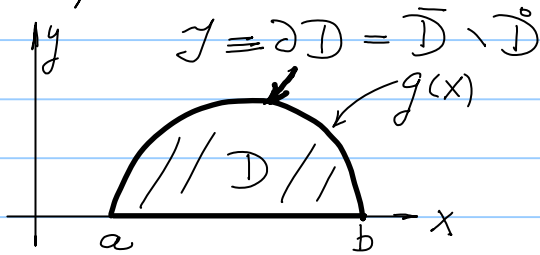
Définition un ensemble borné $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ qui est mesurable au sens de Jordan est appelé Jordan-négligeable si $|\gamma| = 0$

Remarque: un ensemble borné $J \subset \mathbb{R}^2$ est Jordan négligeable si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un nombre fini de rectangles $D_1, \dots, D_N$, tels que $J \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$ et $\sum_{i=1}^N |D_i| \leq \varepsilon$.



Théorème (sans démonstration) Un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^2$ est mesurable au sens de Jordan si et seulement si $\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$ est négligeable au sens de Jordan.

Conséquence:



$$\int_a^b g(x) dx = \int_D 1 \cdot d\sigma.$$

Théorème: soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^2$ qui est mesurable au sens de Jordan. Alors f est intégrable sur D au sens de Riemann.

Démonstration: c'est une conséquence de la continuité uniforme de f sur D . (voir Analyse I)

10.1.4. Propriétés des intégrales doubles

Proposition: soit $D \subset \mathbb{R}^2$ compact et mesurable au sens de Jordan, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors:

$$1) \int_D (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \int_D f d\sigma + \beta \int_D g d\sigma$$

c'est la linéarité de l'intégrale (= additive et homogène).

$$2) \int_D f d\sigma = \int_{\overline{D}_1} f d\sigma + \int_{\overline{D}_2} f d\sigma$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

" D_1, D_2 avec bords

Jordan-négligeables"

$\overline{D}_1$ = adhérence de D_1 ,

$\overline{D}_2$ = adhérence de D_2 ,

(voir le chapitre 2.3)

3) si $f \leq g$, c.-à-d. si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$ alors

$$\int_D f d\sigma \leq \int_D g d\sigma$$

et donc en particulier

$$-\int_D |f| d\sigma \leq \int_D f d\sigma \leq \int_D |f| d\sigma$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_D f d\sigma \right| \leq \int_D |f| d\sigma$$

Démonstration: ce sont des conséquences directes de la définition des intégrales doubles

10.1.5 Théorème de la valeur moyenne

Théorème Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $D \subset \mathbb{R}^2$ compact connexe par arcs et mesurable au sens de Jordan. Alors il existe $(x, y) \in D$ tel que

$$\int_D f \, d\sigma = f(x, y) |D| \quad (*)$$

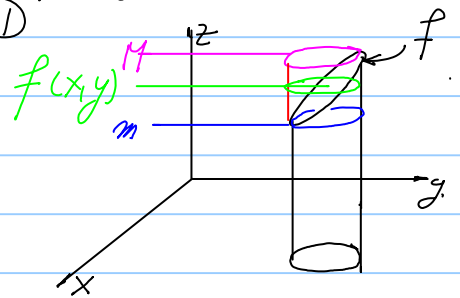
↖ aire de D

Démonstration: (voir Analyse I)

$$m = \min_{(x, y) \in D} f(x, y) \leq f(x, y) \leq \max_{(x, y) \in D} f(x, y) = M$$

$\xrightarrow[2)]{3)}$

$$|D| m \leq \underbrace{\int_D f \, d\sigma}_{|D| \cdot c \text{ avec } c \in [m, M]} \leq |D| M$$



$$\xrightarrow[\text{continue}]{\text{continuité}} \exists (x, y) \in D \text{ tel que } f(x, y) = c$$

&
connexe par arcs

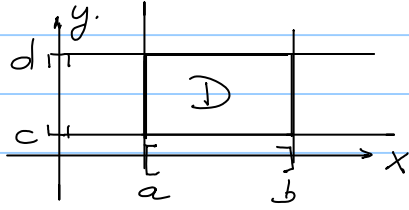
Remarque $(*) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in D$ tel que

$$|D| \neq 0 \quad f(x, y) = \frac{1}{|D|} \int_D f \, d\sigma$$

(= valeur moyenne de f sur D)

102. Techniques d'intégration pour les intégrales

Théorème (Fubini) Soit $D = [a, b] \times [c, d]$



et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

l'intégrale $V \equiv \int_D f \, d\sigma$ peut être calculée par intégrations successives :

$$V = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) \quad (**)$$

Explication: on intègre d'abord sur y de "c" à "d" en traitant x comme un paramètre. Le résultat de cette opération est une fonction de x que l'on intègre de "a" à "b".

Remarque: le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel les intégrales sont effectuées. V est donc aussi égal à

$$V = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

222

Exemple $D = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(on a déjà montré par découpage que $\int_D f d\sigma = \frac{2}{3}$)

$$\begin{aligned} \int_D f d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x^2 + y^2) = \\ &= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \int_D f d\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx (x^2 + y^2) \\ &= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) = \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

10.2.2. Remarques concernant la notation

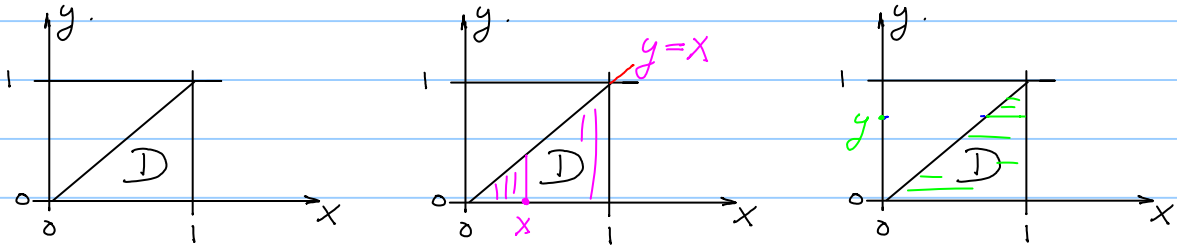
Souvent on trouve au lieu de $(**)$ la notation

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y)$$

et il faut savoir traduire d'une notation à l'autre ! Mais attention toujours écrire les parenthèses si on utilise la notation à gauche !

10.2.3. Intégration sur des domaines plus compliqués

Exemple 1: $f(x,y) = x^2 + y^2$.



$$I = \int_D f \, d\sigma = \frac{1}{3} \quad \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \text{ par symétrie} \right)$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy (x^2 + y^2) \equiv I_1$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\} \quad (*)$$

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 dx (x^2 + y^2) \equiv I_2$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

Mais attention !

Pour (*) on peut aussi écrire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\} \text{ mais}$$

$$I \neq \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y) \leftarrow \underline{\underline{\text{non sense !}}}$$

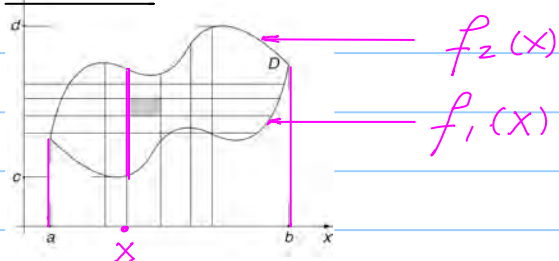
↑ résultat dépend de x

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 dx (x^3 + \frac{1}{3} x^3) \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{4}{3} \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=y}^{x=1} = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3} y^3 - y^3 \right) \\ &= \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{3} y^3 - \frac{4}{3} \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

10.2.4 Domaines délimités par des graphes

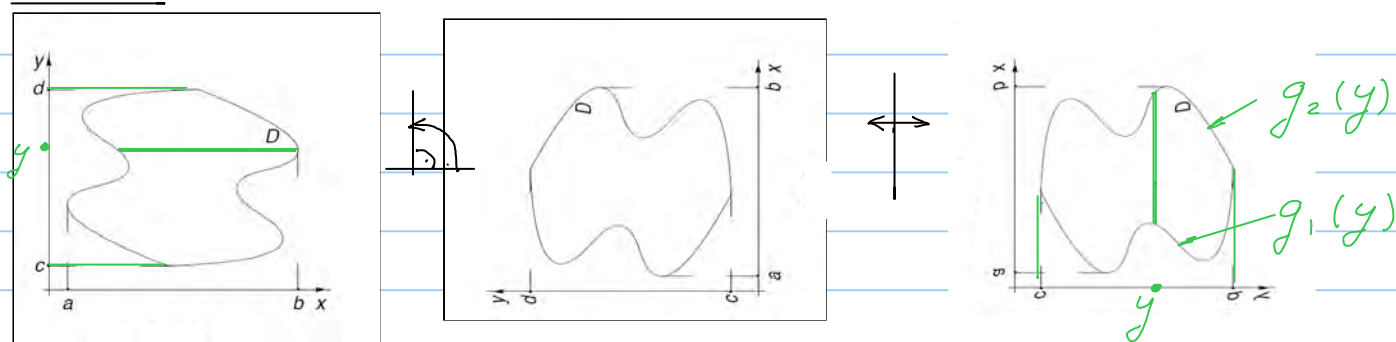
Cas 1



$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy f(x, y)$$

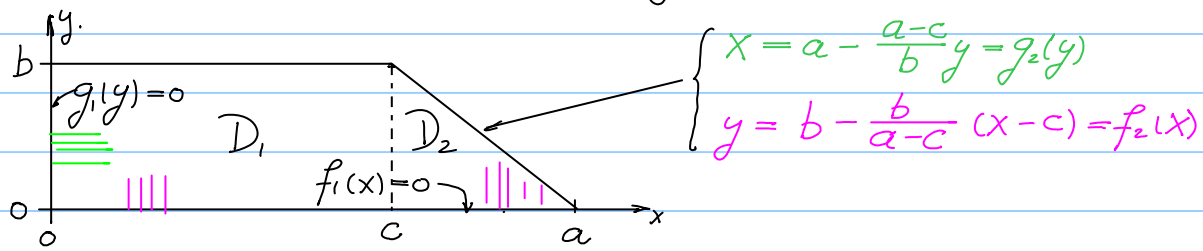
Cas 2



$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx f(x, y)$$

Exemple explicite: $f(x,y) = x \cdot y$.



$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$\equiv I = \int_D f \, d\sigma = \int_0^b dy \int_0^{a - \frac{a-c}{b}y} dx \, x \cdot y = \dots = (*)$$

ou, par décomposition du domaine:

$$\begin{aligned} \equiv I &= \int_{D_1} f \, d\sigma + \int_{D_2} f \, d\sigma = \left(\int_0^c dx \cdot x \right) \cdot \left(\int_0^b dy \cdot y \right) \\ &= \int_0^c dx \int_0^b dy \, x \cdot y + \int_c^a dx \int_0^{f_2(x)} dy \, x \cdot y \\ &= \dots = \text{le même résultat} \end{aligned}$$

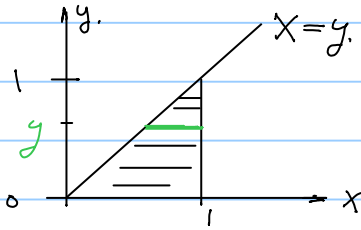
Pour (*) on trouve:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^b dy \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=a - \frac{a-c}{b}y} = \frac{1}{2} \int_0^b dy \left(a - \frac{a-c}{b}y \right)^2 y \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \left(a - \frac{a-c}{b}y \right)^2 \frac{1}{2} y^2 dy + \frac{1}{2} \left(\frac{a-c}{b} \right) \int_0^b \left(a - \frac{a-c}{b}y \right) y^2 dy \\ &\quad \text{intégration par parties (par exemple)} \\ &= \frac{1}{4} b^2 c^2 + \frac{1}{6} (a-c) a b^2 - \frac{1}{8} (a-c)^2 b^2 \\ &= \frac{1}{8} b^2 c^2 + \frac{1}{24} a^2 b^2 + \frac{1}{12} a b^2 c \end{aligned}$$

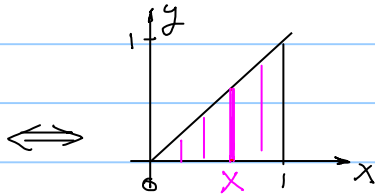
10.2.5 Application du théorème de Fubini

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \sin(x^2) dx \right) dy = \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^1 dx}_{= ①} \sin(x^2)$$

Pas de fonction élémentaire comme primitive de $\sin(x^2)$



$$① : \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$



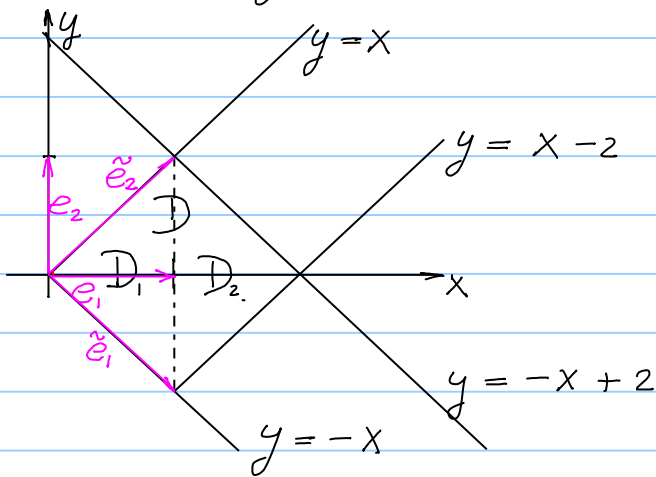
$$② : \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \sin(x^2) = \int_0^1 dx \left[\sin(x^2) \cdot y \right]_{y=0}^{y=x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \sin(x^2) \cdot (2x) = \left[\frac{1}{2} (-\cos(x^2)) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \cos(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos(1)) \end{aligned}$$

Transcription du domaine sans le dessin

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{matrix}$$

10.2.6. Changement de variables / coordonnées : un exemple



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$I = \int_D f \, d\sigma$$

$$I \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{décomposition} \\ \text{du domaine}}}{=} \int_{D_1} f \, d\sigma + \int_{D_2} f \, d\sigma$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^1 dx \int_{-x}^x dy (x^2 + y^2) + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy (x^2 + y^2)$$

$$= 15' \text{ plus tard} = \frac{8}{3}.$$

Plus élégant, changement de coordonnées

$(e_1, e_2) \longrightarrow (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ une application linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 2$$

$\tilde{e}_1 = e_1 + (-1) \cdot e_2$

pour les coordonnées (x, y) par rapport à e_1, e_2 et ξ, η par rapport à $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ on a.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = G(\xi, \eta) \leftarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{par exemple.} \end{cases}$$

Explicitement:

$$\begin{cases} x = \xi + \eta \\ y = -\xi + \eta \end{cases}$$

et on trouve pour l'intégrale:

$$I = \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) \underbrace{|\det A|}_{=2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi, \eta) &= f(x, y) \Big|_{(x, y) = G(\xi, \eta)} = (x^2 + y^2) \Big|_{(x, y) = G(\xi, \eta)} \\ &= (\xi + \eta)^2 + (\xi - \eta)^2 = 2(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 4 \cdot \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta (\xi^2 + \eta^2) = \frac{8}{3} \\ &= \underbrace{2}_{\text{pink}} \cdot \underbrace{2}_{\text{green}} = \frac{2}{3} \leftarrow \text{notre premier exemple} \right. \\ &\quad \left. \text{d'une intégrale double} \right. \end{aligned}$$

10.2.7. Changement de variables : le cas général

Théorème soit $G: \tilde{D} \longrightarrow D$
 $(\xi, \eta) \longmapsto (x, y) = G(\xi, \eta)$

bijective de classe C^1 (c.-à-d. G , ainsi que $H=G^{-1}$ les deux de classe C^1). Soit

$$\begin{aligned} (x, y)^T &= G(\xi, \eta) = (G_1(\xi, \eta), G_2(\xi, \eta))^T \\ \det(J_G(\xi, \eta)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial G_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_D f \, d\sigma = \int_{\tilde{D}} \tilde{f} \, |\det J_G| \, d\tilde{\sigma}, \quad \text{où } \tilde{f} = f \circ G,$$

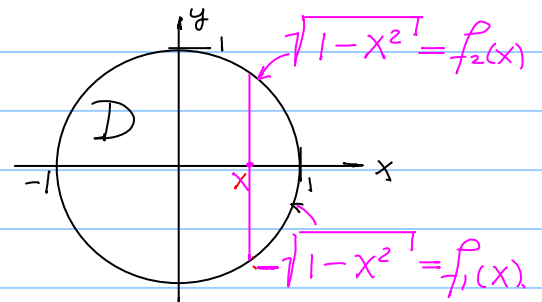
et en coordonnées (notation équivalente)

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\tilde{D}} \underbrace{\tilde{f}(\xi, \eta)}_{=f(G_1(\xi, \eta), G_2(\xi, \eta))} |\det J_G(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta \end{aligned}$$

Exemple 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{9999}$$

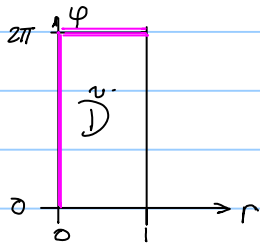


$$\begin{aligned} \int_D f \, d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \underbrace{(x^2 + y^2)^{9999}}_{\substack{\sum_{k=0}^{9999} \binom{9999}{k} (x^2)^k (y^2)^{9999-k}}} = \\ &= \text{quelques} \\ &\quad \text{semaines} \\ &\quad \text{plus tard} = \frac{\pi}{10'000} \end{aligned}$$

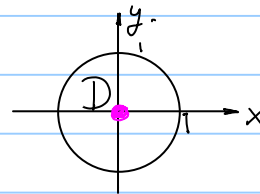
En coordonnées polaires (revoir les chapitres 5.2.5 et 5.3.2.2).

$$x = r \cdot \cos(\varphi) = G_1(r, \varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) = G_2(r, \varphi), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



bijective
 $r > 0$
 $\varphi \in [0, 2\pi[.$



On utilisera $\tilde{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ (problèmes au bord seront ignorés)

$$J_G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det(J_G(r, \varphi)) = r.$$

← apprendre par cœur,
 changement de
 coordonnées en coordonnées
 polaires

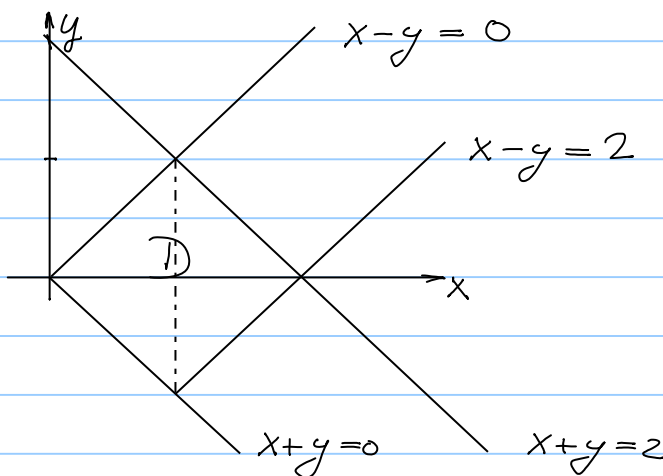
$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = (r^2)^{9999} = r^{19998}$$

Donc : $|\det(J_G(r, \varphi))| = \det J_G(r, \varphi)$.

$$I = \int_D \tilde{f}(r, \varphi) \cdot r \, dr d\varphi \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot r^{19998} \cdot r$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr r^{19999} = 2\pi \left. \frac{r^{20'000}}{20'000} \right|_0^1 = \frac{\pi}{10'000}.$$

De retour à 10.2.6



$$\begin{aligned} \xi &= x - y, & 0 \leq \xi \leq 2 \\ \eta &= x + y, & 0 \leq \eta \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = H(x, y), \quad \det J_H(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$I = \int_D f(x, y) \, d\sigma = \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\eta \left(f(x, y) \cdot \left| \frac{1}{\det J_H(x, y)} \right| \right) \cdot \underset{H^{-1}(\xi, \eta)}{G(\xi, \eta)}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 2f(x, y)$$

$$I = \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\eta \cdot \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 d\xi \left[\xi^2 \eta + \frac{1}{3} \eta^3 \right]_{\eta=0}^{\eta=2}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 d\xi \left(2\xi^2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{4} \left[2 \cdot \frac{\xi^3}{3} + \frac{8}{3} \xi \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(2 \cdot \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \cdot 2 \right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

10.3. Intégrales multiples

10.3.1. Définitions et propriétés

Les idées des chapitres précédents se généralisent sans problèmes à des intégrales sur des domaines dans $\mathbb{R}^n$.

Notations

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad , \quad \int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_{\mathcal{D}} f \, dV \quad , \quad \int_{\mathcal{D}} f$$

Remarques

- 1) Les intégrales (triples) satisfont les propriétés de la linéarité, décomposition du domaine et de monotonie (si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$ alors $\int_{\mathcal{D}} f \, dV \leq \int_{\mathcal{D}} g \, dV$). Voir le cas $n=2$.
- 2) L'intégrale (triple) $\int_{\mathcal{D}} 1 \, dV$ donne le volume de $\mathcal{D}$.

10.3.2. Techniques d'intégration

Comme pour $n=2$ on a le théorème de Fubini qui dit que les intégrales multiples peuvent être évaluées par des intégrales itérées.

Exemple: $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

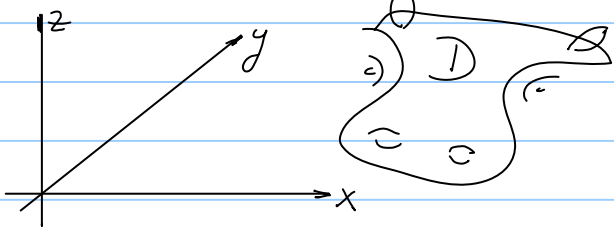
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_D f \, dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=1} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x^2 + y^2 + \frac{1}{3}) \\
&= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{3} y \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \int_0^1 dx (x^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x \right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Remarque: $I = \text{"regarder !"} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \int_0^1 x^2 dx = 1.$

Remarque: $0 \leq f(x, y, z) \leq 3 \Rightarrow 0 \leq I \leq 3.$

10.3.3. Centre de gravité (barycentre, centre de masse)



$D \subset \mathbb{R}^3$, compact
 $S(x, y, z)$ distribution de masse sur D
 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$, continue.

$$I = \int_D S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{masse totale}$$

$$I_1 = \int_D x \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

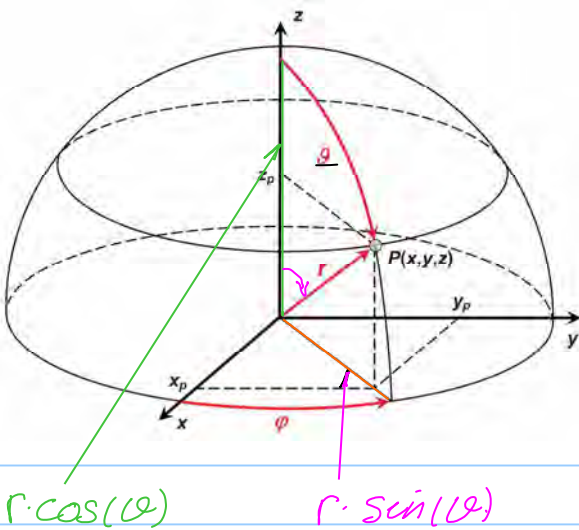
$$I_2 = \int_D y \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_3 = \int_D z \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Le centre de gravité se trouve au point $(\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I})$.

Remarque: si la distribution de masse est constante (S est une fonction constante) on peut calculer avec $S=1$

10.3.4. Coordonnées sphériques (voir 5.4.1. et série 9)



$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\theta)$$

r, θ, φ les coordonnées sphériques

$$G : [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ surjective}$$

$$\underbrace{[0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[}_{=: \tilde{D}, \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

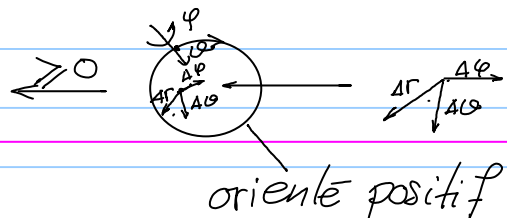
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$J_G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J_G(r, \theta, \varphi) = \text{"développer la dernière ligne"}$$

$$= r \cdot \sin(\theta) \sin(\theta)^2 \cdot r + \cos(\theta) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$= r^2 \cdot \sin(\theta) \geq 0$$



Exemple 1 (volume de la sphère unité)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y, z) = 1$$

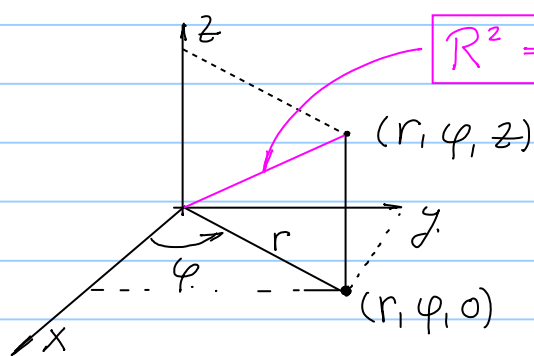
$$|D| = \int_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\tilde{D}} \overset{\tilde{f}(r, \vartheta, \varphi)}{1} \underbrace{r^2 \sin(\vartheta)}_{=\det J_G(r, \vartheta, \varphi)} \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \quad (*)$$

$$\tilde{D} = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

En termes d'intégrales itérées on obtient:

$$\begin{aligned} |D| &= \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin(\vartheta) \\ &= 2\pi \int_0^1 dr \, r^2 \underbrace{[-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}}_{=2} = 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

10.3.5. Coordonnées cylindriques



$$R^2 = r^2 + z^2$$

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

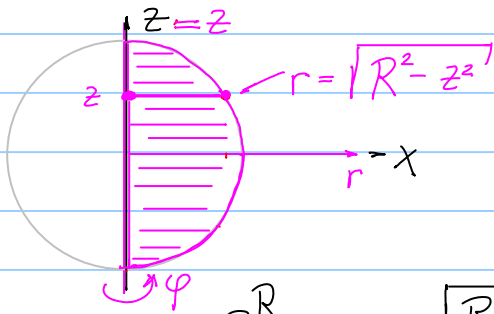
$$z \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \right\} =: G(r, \varphi, z)$$

$$J_G(r, \varphi, z) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\det J_G(r, \varphi, z) = r \geq 0 \quad \leftarrow (r, \varphi, z) \text{ orienté positif}$$

Exemple (volume de la sphère de rayon R)



$$V = \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \overset{\tilde{f}(r, \varphi, z)}{\underbrace{1 \cdot r}} \cdot \underbrace{|\det J_G(r, \varphi, z)|}$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-R}^R dz \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2 - z^2}}$$

$$= \pi \int_{-R}^R dz (R^2 - z^2) = 2\pi \int_0^R dz (R^2 - z^2)$$

$$= 2\pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=R}$$

fonction paire sur domaine symétrique.

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

10.3.6. Application du théorème de Fubini

Exemple

$$I = \underbrace{\int_0^1 dz}_{\text{pink}} \underbrace{\int_z^1 dy}_{\text{blue}} \underbrace{\int_y^1 dx}_{\text{green}} e^{x^3}$$

Identification du domaine

$$I = \int_{\mathcal{D}} e^{x^3} dx dy dz$$

$$\text{où } \mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq z \leq 1}_{\text{pink}}, \underbrace{z \leq y \leq 1}_{\text{blue}}, \underbrace{y \leq x \leq 1}_{\text{green}}\}. \quad \textcircled{1}$$

Transcription du domaine

①	②	③	④
$0 \leq z \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq 1$
$z \leq y \leq 1$	$0 \leq y \leq x$	$0 \leq z \leq x$	$y \leq x \leq 1$
$y \leq x \leq 1$	$0 \leq z \leq y$	$z \leq y \leq x$	$0 \leq z \leq y$
⑤	⑥		
$0 \leq y \leq 1$	$0 \leq z \leq 1$		
$0 \leq z \leq y$	$z \leq x \leq 1$		
$y \leq x \leq 1$	$z \leq y \leq x$		

$$\textcircled{2} : \mathcal{D} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}$$

$$\textcircled{3} : \mathcal{D} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x, z \leq y \leq x\}$$

Transcription de l'intégrale (cas ② et ③)

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz e^{x^3} \quad \textcircled{2}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x dy e^{x^3} \quad \textcircled{3}$$

Evaluation des intégrales

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^1 dx \int_0^x dy e^{x^3} \cdot y = \int_0^1 dx e^{x^3} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=x}$$

$$= \int_0^1 dx e^{x^3} \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x^3} (3x^2) dx = \frac{1}{6} (e - 1)$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^1 dx \int_0^x dz e^{x^3} (x - z)$$

$$= \int_0^1 dx e^{x^3} \left[xz - \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=x} = \int_0^1 dx e^{x^3} (x^2 - \frac{1}{2} x^2)$$

$$= \int_0^1 dx e^{x^3} \frac{1}{2} x^2 = \text{voir } \textcircled{2} = \frac{1}{6} (e - 1)$$

11. "Loose ends"



Prérequis pour lundi

Cours (théorie)

Section 1.5. (ED linéaires du deuxième ordre à coefficients constants)

Section 1.8. (ED linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur)

Section 1.9. (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)

Prérequis pour mardi

Cours (théorie)

Section 1.5. (ED linéaires du deuxième ordre à coefficients constants)

Section 1.8. (ED linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur)

Section 1.9. (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)

Théorème de l'inversion locale (démonstration, la fonction ϕ)

Théorème des fonctions implicites (Notations pour dF/dx et dF/dy)

Cours (exemples)

Section 1.2 (Exemple 2, $y' = y^2$)

Section 1.9 (Exemple, $y' = x^2 + y^2$) Exercices (comprendre les corrigés !)

Exercices (comprendre les corrigés !)

Série 7B, Exercice 4 (Espace des fonctions continues)

Série 8B, Exercice 2 (Normes sur applications linéaires)

Série 9A, Exercice 2 (Normes matricielles, inverse de $(1-X)$, et de $(A-B)$ avec A inversible)

Série 9A, Exercice 3 (Théorème du point fixe)

Série 9B, Echauffement (Dérivation sous l'intégrale)

Série 10B, Exercice 5 (Théorème des accroissements finis)

Série 11A, Exercice 8 (Dérivée et différentielle)

Série 11A, Exercice 9 (Norme d'une intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$)

11.1. Exponentielle d'une matrice $n \times n$

Définition: soit B une matrice $n \times n$. Alors.

$$e^B := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} B^k, \quad \text{où } B^0 = I \text{ (matrice identité)}$$

Remarque: on a donc la fonction $e: \underbrace{\mathbb{R}^{n \times n}}_{\equiv V} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^{n \times n}}_{\equiv V}$,
 $B \mapsto e^B$.

Remarque (voir la. série $\sum B^k$).

Soit $\| \cdot \|$ une norme pour $\mathbb{R}^n$ et.

$$\|B\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \quad \left(= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Bx\| \right)$$

la norme induite sur $\mathbb{R}^{n \times n}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| \leq \|B\| \|x\|, \quad \|B^2x\| \leq \|B(Bx)\| \leq \|B\| \|Bx\| \leq \|B\|^2 \|x\|$$

et donc $\|B^k x\| \leq \|B\|^k \|x\|$

$$\Rightarrow \|B^k\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|B^k x\|}{\|x\|} \leq \|B\|^k$$

Ceci implique que la suite $B_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} B^k$

est de Cauchy dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ et e^B est bien définie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0, \text{ t.q. } \forall N, M \geq N_0, M \leq N,$$

Analyse I

$$\|B_N - B_M\| = \left\| \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k!} B^k \right\| \leq \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k!} \|B\|^k \leq \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^k \leq \varepsilon$$

"fin" de la série numérique de $e^{\|B\|}$

Remarques: (B, B_1, B_2 des matrices $n \times n$).

1) La série e^B converge absolument (en norme)

$$2) e^{B_1} \cdot e^{B_2} = e^{B_1 + B_2} \iff B_1 B_2 = B_2 B_1$$

$$(B_1 + B_2)^2 = B_1^2 + B_1 B_2 + \underline{B_2 B_1} + B_2^2$$

$$3) (e^B)^{-1} = e^{-B} \quad \text{car } B(-B) = (-B) \cdot B$$

$$4) \det(e^B) = e^{\text{tr.}(B)} \quad \text{car voir 5)}$$

$$5) \text{ Si } B = S D S^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

(||||) les vecteurs propres de B

$$D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^B = S e^D S^{-1}$$

$$\text{avec } e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$$

car $B^2 = (S D S^{-1})(S D S^{-1}) = S D^2 S^{-1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} B^k = S \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} D^k \right) S^{-1}$$

6) Soit $p(\lambda) = \det(\lambda I - B)$. Alors (voir Algèbre linéaire) $p(B) = 0 \Rightarrow$

$$e^B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k B^k$$

pour certains nombres $b_0, \dots, b_{n-1}$

$$7) \text{ Si } Bv = \lambda v, \text{ alors } e^B v = e^\lambda v \quad (v \neq 0)$$

11.2. Equations différentielles d'ordre n

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$$

(donc u de classe $C^n(I)$). Alors la fonction

$$\begin{aligned} y: I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (u(x), \dots, u^{(n-1)}(x))^T \end{aligned}$$

satisfait l'équation différentielle du premier ordre (y est de classe $C^1(I)$)

$$y'(x) = (u'(x), \dots, u^{(n)}(x))^T$$

$$= (u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x), f(x, u(x), \dots, u^{(n-1)}(x)))^T$$

$$=: \overline{F}(x, u(x), \dots, u^{(n-1)}(x)).$$

$$\equiv \overline{F}(x, y(x)).$$

avec $\overline{F}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Conclusion: les équations différentielles d'ordre $n \geq 2$ sont des cas particuliers d'équation différentielles d'ordre un à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^n$.

11.3 Equations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants (voir section 1.8)

Soit l'ED pour $u(x)$ (on a posé $a_n=1$ ici)

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = q(x)$$

avec $q(x)$ continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Alors, on pose

$$y(x) = (u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x))^T$$

et on obtient l'équation

$$y' = Ay + Q.$$

où

matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = (0, \dots, 0, q(x))^T.$$

ce qui est un cas particulier de l'équation linéaire générale.

$$y' = Ay + Q(x).$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Donnée une condition initiale $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$, la solution est toujours

$$y(x) = e^{(x-x_0)A} y_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-t)A} Q(t) dt.$$

ce qui est connu comme le "principe de Duhamel".

Les cas résonnants s'expliquent naturellement par l'exponentielle de blocs de Jordan (voir Algèbre linéaire). Voir série 14 A.

Vérification

i) la fonction $x \mapsto e^{xA}$ est différentiable comme fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot n}$ et on a pour la dérivée:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{e^{(x+h)A} - e^{xA}}{h} = e^{xA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} \\ = e^{xA} A = A e^{xA}$$

le montrer !
 $= I + hA + \|A\|^2 h^2 \varepsilon(h)$

ii) donc (dérivation d'une intégrale avec paramètre)

$$y'(x) = A e^{(x-x_0)A} y_0 \\ + e^{(x-x)A} Q(x) \\ + \int_{x_0}^x A e^{(x-t)A} Q(t) dt.$$

$$= A y(x) + Q(x)$$

Exemple

$$\left. \begin{array}{l} u''(x) + u(x) = 0 \quad (*) \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{array} \right\} \text{ solution: } u(x) = \cos(x)$$

Avec la formule de Duhamel ($\mathbb{Q} \equiv 0$ ici)

$$y = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} u' \\ -u \end{pmatrix} = Ay.$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le polynôme caractéristique de A on a.

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \text{et donc} \quad A^2 + I = 0 \Leftrightarrow A^2 = -I$$

$$\text{Avec } B \equiv xA, \quad B^k = x^k A^k$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} B^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} B^{2\ell+1}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} x^{2\ell} \underbrace{A^{2\ell}}_{(A^2)^\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \underbrace{A^{2\ell+1}}_{A(A^2)^\ell}$$

$$= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} \right) I + \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \right) A$$

$$= \cos(x) I + \sin(x) A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

La solution de notre problème est donc

$$y(x) = e^{xA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix},$$

ou, dans les variables de départ, $u(x) = \cos(x)$.

Example

$$u'' + u = \cos(x), \quad y := \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$y' = Ay + Q \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(x-t) & \sin(x-t) \\ -\sin(x-t) & \cos(x-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt.$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \sin(x-t) \cos(t) \\ \cos(x-t) \cos(t) \end{pmatrix} dt.$$

$$\sin(x-t) \cos(t) = \sin(x) \cos(t)^2 - \cos(x) \sin(t) \cos(t).$$

$$u(x) = \sin(x) + \sin(x) \int_0^x \underbrace{\cos(t)^2}_{\frac{1}{2}(1+\cos(2t))} dt - \cos(x) \int_0^x \underbrace{\sin(t) \cos(t)}_{\frac{1}{2} \sin(2t)} dt.$$

$$u(x) = \sin(x) + \sin(x) \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^x + \cos(x) \left[\frac{1}{4} \cos(2t) \right]_0^x$$

$$u(x) = \sin(x) + \sin(x) \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) \right)$$

$$+ \cos(x) \left(\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{4} \right)$$

$$- \frac{1}{2} \sin(x)^2$$

$$u(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(x)^2 \cos(x)$$

$$\underline{u(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x)}$$

11.4. Théorème du point fixe de Banach

Définition: un espace métrique complet est un espace métrique tel que toute suite de Cauchy converge vers un élément de l'espace.

Exemples • tous les espaces de Banach avec $d(x, y) = \|x - y\|$

- $C(I, \mathbb{R}^m)$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un Banach.

$$\|w\|_\infty := \sup_{x \in I} \|w(x)\|_\infty$$
- $\{w \in C(I, \mathbb{R}^m) : \|w - w_0\|_\infty \leq r\}$, où $r > 0$ et $w_0 \in C(I, \mathbb{R}^m)$ sont données.

Théorème: Soit (Ω, d) un espace métrique complet et $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ une fonction telle que $\exists \beta \in \mathbb{R}, 0 \leq \beta < 1$,

$$\forall x, y \in \Omega, \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \beta d(x, y)$$

alors φ admet un point fixe unique

$$x^* = \varphi(x^*) \in \Omega.$$

et on a que $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, où $x_0 \in \Omega$

est quelconque et $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$

Démonstration: identique à la démonstration donnée pour l'Exercice 3 de la Série 9A

Démonstration

$$i) \forall n \geq 1 \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \dots \leq s^n d(x_1, x_0)$$

$$ii) \forall n > m \geq n_0$$

$$d(x_n, x_m) \leq s^m d(x_{n-m}, x_0)$$

$$\leq s^m (d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{n-m-1}, x_{n-m}))$$

$$\leq s^{n_0} \frac{1}{1-s} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.g.}$$

11.5. Dérivée d'une fonction matricielle

(voir la série 11A, exercice 8)

Exemple $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ matrices 2×2 .

$$f: V \longrightarrow V, \quad f(X) = X^2$$

f est différentiable en tout point $X_0 \in V$

$$f'(X_0): V \longrightarrow V$$

$$H \longmapsto f'(X_0) H = X_0 H + H X_0$$

┌ Démonstration

$$f(X_0 + H) = (X_0 + H)^2 =$$

$$= f(X_0) + f'(X_0) H + \underbrace{H^2}_{=: \varepsilon(H) \|H\|}$$

$$0 \leq \lim_{H \rightarrow 0} \left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| \leq \lim_{H \rightarrow 0} \|H\| = 0$$

($H \in V$)

Cas particulier $X_0 = I$ (matrice identité)

$$f'(I) H = 2 \cdot I \cdot H \quad (I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Quelle est la matrice Jacobienne ?

$$J_f(I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrice } 4 \times 4$$

12 Apothéose**apothéose**

nom féminin

(latin *apotheosis*, du grec *apotheôsis*, action d'élever au rang des dieux)**Prérequis pour lundi****Cours (théorie).****Section 1.5.** (ED linéaires du deuxième ordre à coefficients constants)**Section 1.8.** (ED linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur)**Section 1.9.** (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)**Prérequis pour mardi****Cours (théorie).****Section 1.5.** (ED linéaires du deuxième ordre à coefficients constants)**Section 1.8.** (ED linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur)**Section 1.9.** (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)**Théorème de l'inversion locale** (démonstration, la fonction ϕ)**Théorème des fonctions implicites** (Notations pour dF/dx et dF/dy)**Cours (exemples).****Section 1.2** (Exemple 2, $y' = y^2$)**Section 1.9** (Exemple, $y' = x^2 + y^2$) Exercices (comprendre les corrigés !)**Exercices (comprendre les corrigés !).****Série 7B, Exercice 4** (Espace des fonctions continues)**Série 8B, Exercice 2** (Normes sur applications linéaires)**Série 9A, Exercice 2** (Normes matricielles, inverse de $(1-X)$, et de $(A-B)$ avec A inversible)**Série 9A, Exercice 3** (Théorème du point fixe)**Série 9B, Echauffement** (Dérivation sous l'intégrale)**Série 10B, Exercice 5** (Théorème des accroissements finis)**Série 11A, Exercice 8** (Dérivée et différentielle)**Série 11A, Exercice 9** (Norme d'une intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$)

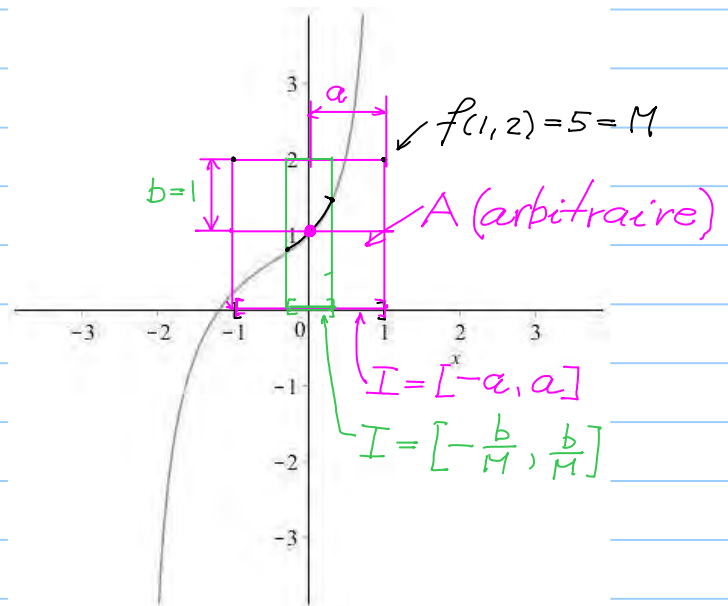
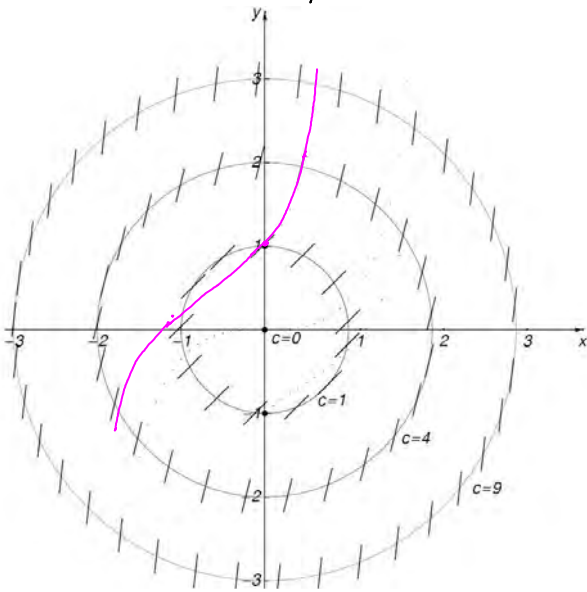
Théorème d'existence et d'unicité (suite de la section 1.10)

Exemples

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \quad (\text{section 1.2})$$

solution: $y(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in]-\infty, 1[$

$$y' = x^2 + y^2 \equiv f(x, y), \quad y(0) = 1 \quad (\text{Riccati, section 1.9})$$



Le cas général.

Soient $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $(x_0, y_0) \in D$, et considérons le problème de Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

ou d'une manière équivalente. l'équation intégrale.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad =: \varphi(y)(x)$$

où (par abus de notation) $y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction constante $y_0(x) = y_0$.

Idees

- 1) on cherche un ensemble de fonctions ($=: \Omega$) tel que.

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \Omega.$$

┌ Ω sera l'ensemble des fonctions continues sur I dont le graphe est dans le rectangle $\square$ ┘

- 2) on montre (sous une hypothèse additionnelle sur f) que φ est une contraction

┌ Ω sera équipé de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$ et sera donc un espace métrique complet ┘

- 3) on applique le théorème du point fixe de Banach pour conclure qu'il existe un unique $y = \varphi(y) \in \Omega$ solution du problème de Cauchy.

Proposition 1: soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ tels que $A \subset D$, où

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\|_{\infty} \leq b \},$$

$$M = \max \{ \|f(x, y)\|_{\infty} : (x, y) \in A \},$$

$$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad 0 < \alpha \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

$$\Omega = \{ w \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|w - y_0\|_{\infty} \leq b \}.$$

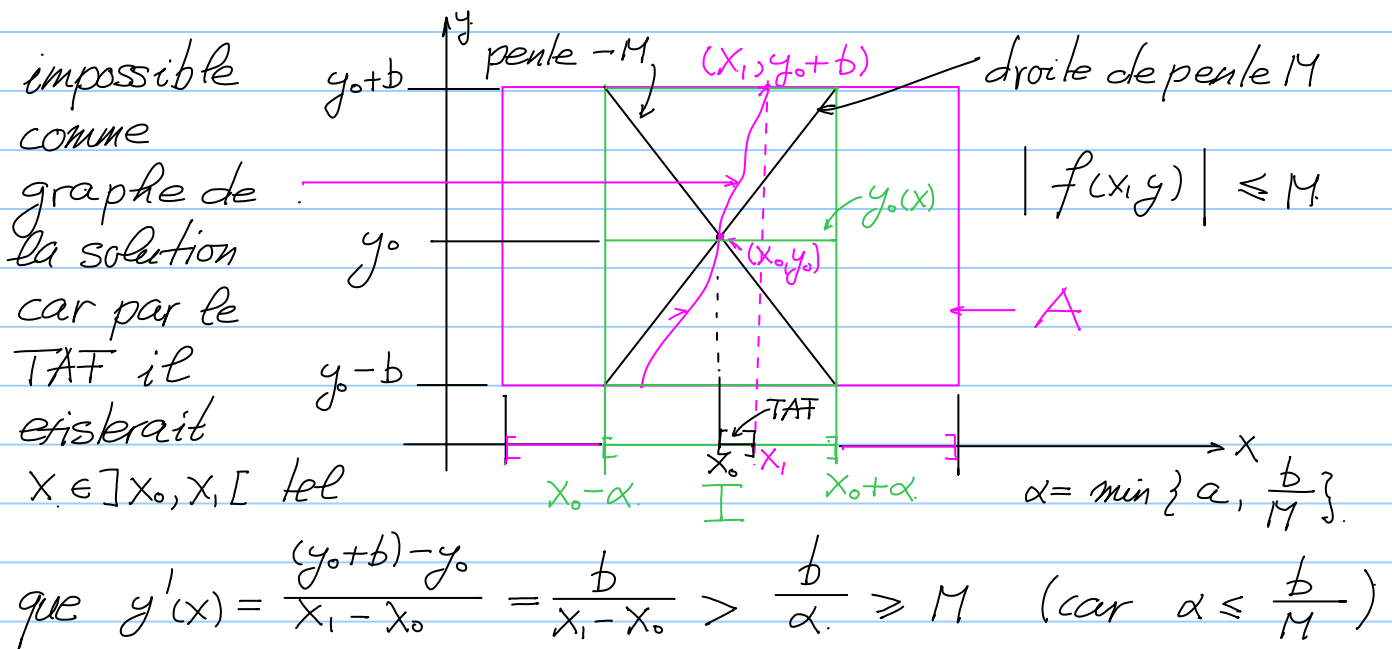
$\checkmark y_0(x) \equiv y_0$

Alors la fonction $\varphi: \Omega \longrightarrow \Omega$

$$\varphi(w)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, w(t)) dt$$

est bien définie ($\iff \varphi(\Omega) \subset \Omega$)

Motivation pour Ω (dessin pour $n=1, \mathcal{D} = \mathbb{R}^2$)

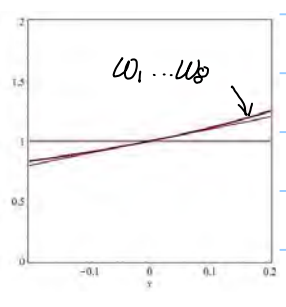
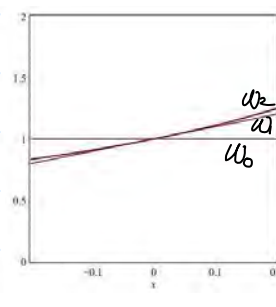
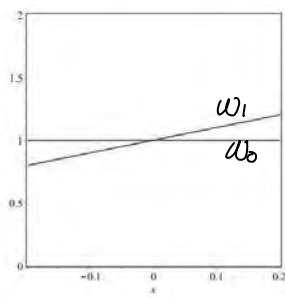
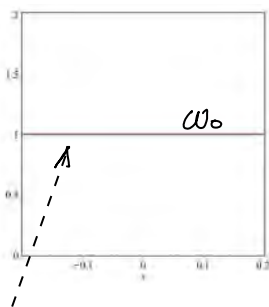


Mais la solution satisfait $y'(x) = f(x, y(x))$
et donc $\forall x \in I, |y'(x)| \leq M$.

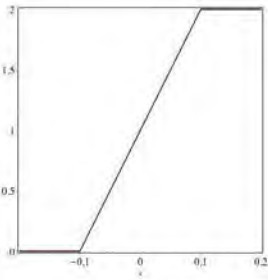
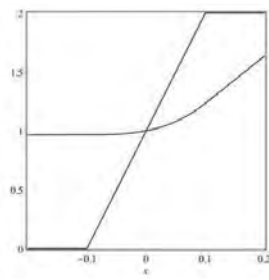
Remarque

Si $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ est bien définie on peut
considérer la suite de fonctions (w_k) où
(par tradition) $w_0 = y_0$ et $\forall k \geq 1, w_k = \varphi(w_{k-1})$
(qui sera de Cauchy si φ est une contraction).

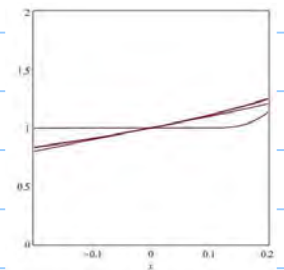
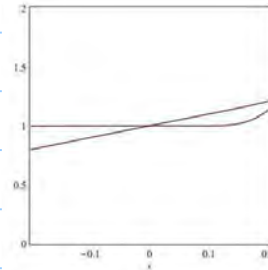
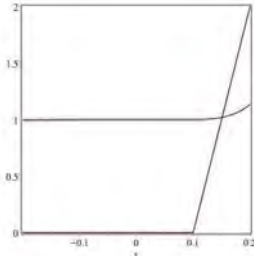
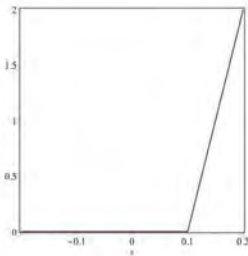
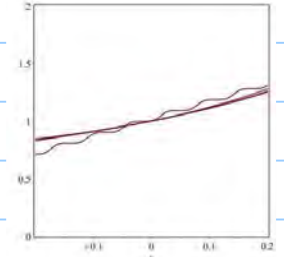
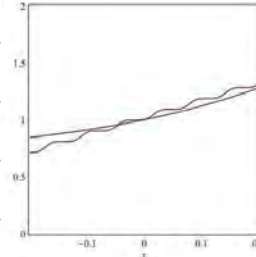
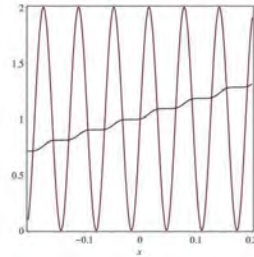
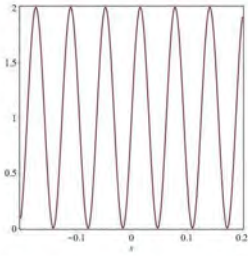
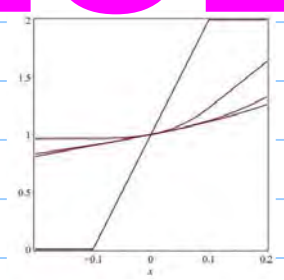
Exemple: $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$.



$$w_0(x) = y_0(x) \equiv y_0$$

w_0  w_0, w_1 

...



Explications

- $\forall w_0 \in \Omega$ on a $\varphi(w_0)(x_0) = y_0$
- $\forall w_0 \in \Omega$ tel que $w_0(x_0) = y_0$
on a $\varphi(w_0)'(x_0) = f(x_0, w_0(x_0)) = f(x_0, y_0)$
- si f est de classe C^∞ alors w_k
est de classe C^k .

Démonstration de la proposition 1

Il faut montrer que $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$. Soit donc $w \in \Omega$. Alors

$$\varphi(w)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \underbrace{f(t, w(t))}_{\substack{\in A \text{ car } t \in I \text{ et } w \in \Omega.}} dt$$

est bien définie et continue sur I (en fait $C^1(I)$).
De plus, $\forall x \in I$

$$\|\varphi(w)(x) - y_0\|_\infty = \left\| \int_{x_0}^x f(t, w(t)) dt \right\|_\infty.$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x \|f(t, w(t))\|_\infty dt \right| \leq M |x - x_0| \leq M \cdot \alpha \leq b.$$

et donc $\|\varphi(w) - y_0\|_\infty \leq b$ et donc $\varphi(w) \in \Omega$

Proposition 2: supposons que f satisfait une condition de Lipschitz c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \in \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y), (x, z) \in A$ ne dépend pas de x !

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_\infty \leq L \|y - z\|_\infty$$

(x, z)
 (x, y)

Soient $0 < \theta < 1$,

$$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad 0 < \alpha \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{\theta}{L} \right\}$$

$$\Omega = \{ w \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|w - y_0\|_\infty \leq b \}.$$

Alors $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ est une contraction

Démonstration de la proposition 2

Par la proposition 1 $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$. On va montrer que $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$\|\varphi(\omega_1) - \varphi(\omega_2)\|_\infty \leq \vartheta \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty.$$

(donc φ une contraction puisque $\vartheta < 1$).

$\forall x \in I$

$$\begin{aligned} & \|\varphi(\omega_1)(x) - \varphi(\omega_2)(x)\|_\infty \\ &= \left\| \int_{x_0}^x (f(t, \omega_1(t)) - f(t, \omega_2(t))) dt \right\|_\infty \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|f(t, \omega_1(t)) - f(t, \omega_2(t))\|_\infty dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \|\omega_1(t) - \omega_2(t)\|_\infty dt \right| \\ &\leq L \cdot \alpha \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty \leq \vartheta \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty \end{aligned}$$

et donc

$$\|\varphi(\omega_1) - \varphi(\omega_2)\|_\infty \leq \vartheta \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty \quad \square$$

Théorème (= proposition 3)

Soit φ comme dans la proposition 2.
 Alors la suite (w_k) , $w_0 = y_0$ (par exemple),
 $\forall k \geq 1$, $w_k = \varphi(w_{k-1})$ converge vers l'unique
 solution du problème de Cauchy sur $\bar{I}$ (sur I)

Démonstration de l'unicité

Soit y_1 et y_2 deux solutions du problème
 de Cauchy sur I . Alors. $\varphi(y_1) = y_1$ et
 $\varphi(y_2) = y_2$ et donc

$$\|y_1 - y_2\|_{\infty} = \|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_{\infty} \leq S \|y_1 - y_2\|_{\infty}$$

et donc $\|y_1 - y_2\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

Démonstration de l'existence. (voir Analyse I)

Soit $y \in \Omega$, $y = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k$.

Comme la suite (w_k) converge uniformément
 et f est uniformément continue sur A , la
 suite des fonctions $(f(x, w_k(x)))$
 converge uniformément vers $f(x, y(x))$.

On peut donc échanger (voir série 9B, échauffement)
 la limite et l'intégrale et donc $y = \varphi(y)$.

Remarque: si $f(x,y)$ est de classe C^1 par rapport à la variable y , c.-à-d. si la

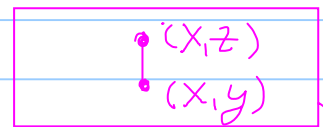
différentielle $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue sur D alors f satisfait une condition de Lipschitz. avec

$$L = \sup_{(x,y) \in A} \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\|_{\infty}.$$

┌ Démonstration de la remarque (voir série 10B, ex.5)

Pour $(x,y), (x,z) \in A$ on définit $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$g(t) = f(x, (1-t)y + tz).$$



On a $g(0) = f(x,y)$ et $g(1) = f(x,z)$ et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, (1-t)y + tz) \cdot (z - y). \quad n. \boxed{n} \cdot \boxed{1}$$

et donc

$$\|g'(t)\|_{\infty} \leq L \|z - y\|_{\infty}$$

Finalement, puisque

$$f(x,z) - f(x,y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$$

on trouve que

$$\|f(x,z) - f(x,y)\|_{\infty} \leq \int_0^1 \|g'(t)\|_{\infty} dt \leq L \|z - y\|_{\infty} \quad \square$$

Exemple: $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = [-1,1] \times [-1,2]$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

donc $L = 2$ (donc ici $\frac{S}{L} \geq \frac{1}{M}$ si $1 > S \geq \frac{L}{M} = \frac{2}{5}$)

Remarque finale (solution maximale)

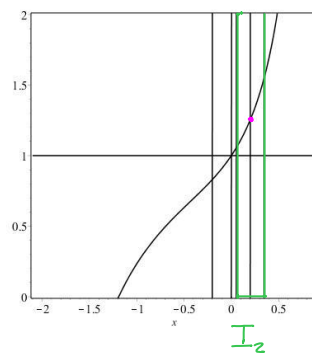
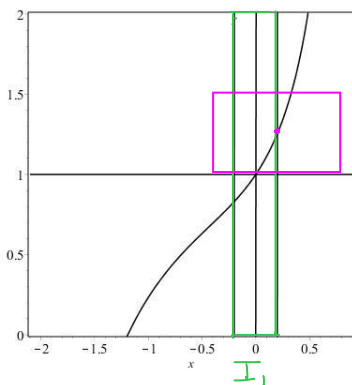
$\lim_{x \uparrow x_0 + \alpha} y'(x) = l$ existe ($l = f(x_0 + \alpha, y(x_0 + \alpha))$)

et donc (voir Analyse I) $y'(x_0 + \alpha) = l$. (dérivée à gauche)

On peut donc continuer la solution en appliquant le théorème d'existence et d'unicité au problème de Cauchy

$$\tilde{y}' = f(x, \tilde{y}), \quad \tilde{y}(x_0 + \alpha) = y(x_0 + \alpha)$$

$$\tilde{y}'(x_0 + \alpha) = l.$$



et ainsi de suite. $\bigcup_{i \geq 1} I_i$ sera un

intervalle ouvert à droite (sinon on peut continuer la solution). Avec la même procédure en $x_0 - \alpha$ on obtient finalement l'intervalle ouvert de la solution maximale.