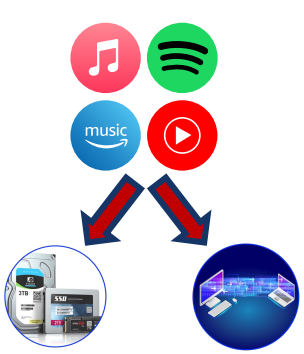
Information, Calcul et Communication

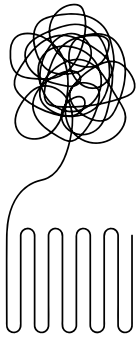
CS-119(k) ICC – Théorie
Semaine 13

Rafael Pires
rafael.pires@epfl.ch

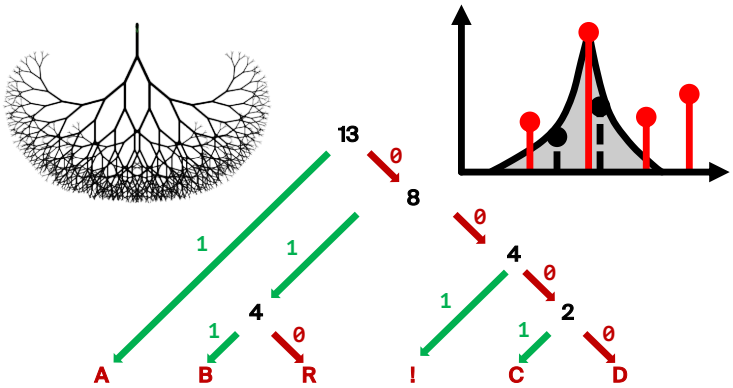
Lausanne, 15.05.2026

Précédemment, dans ICC-T 12





ABRACADABRA!!



- La compression sans pertes permet de réduire la taille d'un fichier sans perdre d'information.
- L'entropie mesure l'information moyenne par lettre dans une source : $H(X) = \sum p_j \log_2(1/p_j)$
- Les algorithmes de Shannon-Fano et Huffman construisent des codes binaires sans préfixe :
  codes plus courts aux lettres fréquentes.
- La longueur moyenne du code (par lettre)
  est donnée par $L(C) = \sum p_j \cdot l_j$
- Théorème de Shannon : $H(X) \leq L(C)$
  - L'entropie est une borne théorique minimale : on ne peut pas aller en-dessous sans pertes.
- La compression avec pertes permet de réduire davantage la taille (images, son, vidéo), au prix d'une distorsion.

Programme du cours

29.05 Révisions

Cours et séries, partie théorique

T 1 2 3 4 5 6 8 9 10 11 12 13 14

Calcul

Information

Communication

ICC

Information

- Représentation de l'information
  - Nombres entiers et réels
  - Circuits logiques et transistors
- Echantillonnage et reconstruction de signaux
- Entropie et compression de données

Calcul

- Algorithmes
- Complexité
- Récursivité
- Algorithmes gloutons / prog. dynamique
- Théorie de la calculabilité

Communication

- **Cryptographie**
- **Réseaux**

La sécurité informatique

- **Les besoins :**
  - Confidentialité
  - Intégrité
  - Authentification
  - Non-répudiation
- **Les briques :**
  - Chiffrement
  - Échange de clés
  - Hachage
  - Signatures

Les besoins

- **Confidentialité :** seul le destinataire peut lire
  - Réalisée via chiffrement
  - Empêche qu'un message intercepté soit lisible par un tiers non autorisé
- **Intégrité :** le message n'a pas été modifié
  - Détecte toute altération, même minime, du contenu
  - Utilisation typique des fonctions de hachage
  - Éviter les falsifications silencieuses

Les besoins

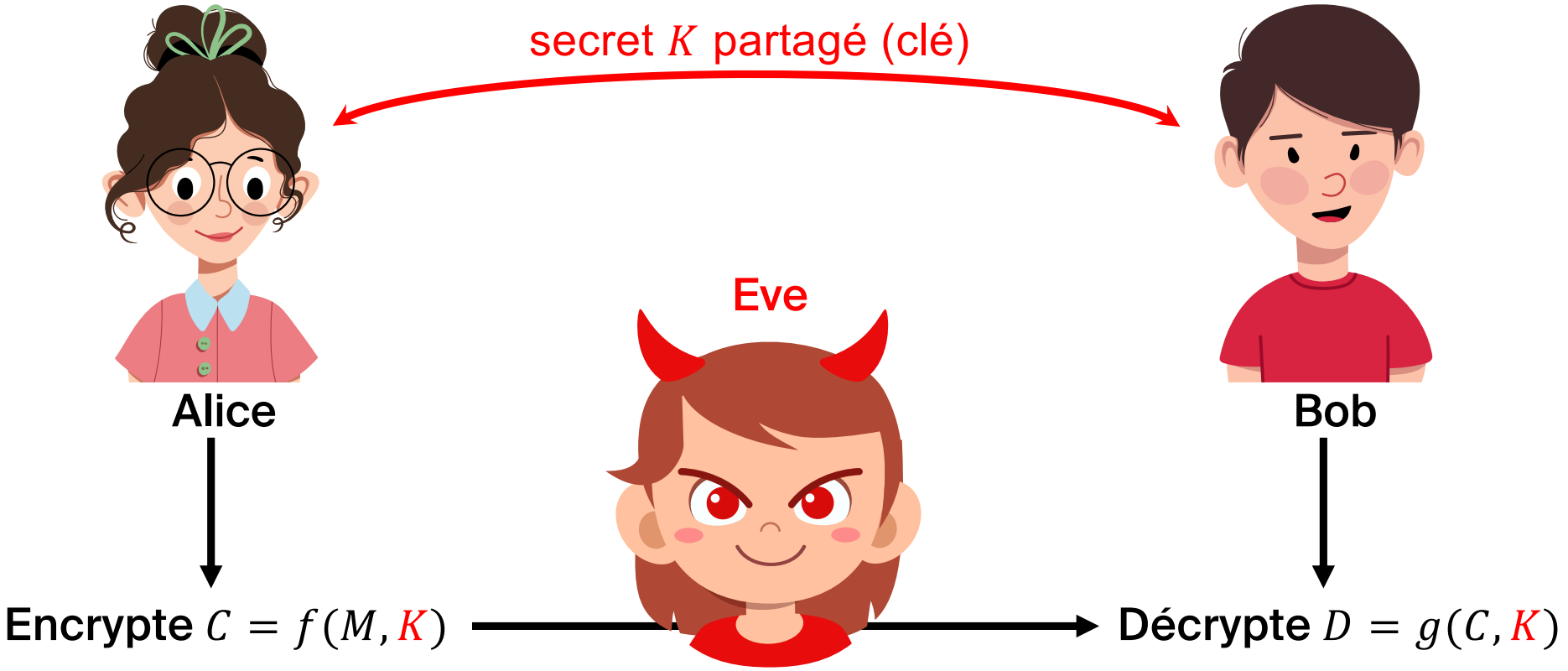
- **Authenticité :** s'assurer de l'identité de l'expéditeur
  - Utilise des signatures numériques ou des mécanismes d'authentification (mot de passe, biométrie)
  - Évite les attaques par usurpation d'identité

- **Non-répudiation :** L'émetteur ne peut pas nier avoir envoyé le message
  - Repose sur les signatures numériques et l'usage de clés privées
  - Important dans les contextes juridiques ou contractuels

Aujourd'hui

- Chiffrement symétrique
- Protocole de Diffie-Hellman
- Fonctions de hachage cryptographiques
- Chiffrement asymétrique

Chiffrement symétrique : scénario



Eve intercepte C mais ne sait pas trop quoi en faire sans la clé K...

Chiffrement de César

- Chiffrement par décalage de lettres dans l'alphabet
- Exemple avec un décalage de 3 :
  - Message : BONJOUR
  - Clé : +3
  - Chiffré : ERQMRXU
- **Facile à casser** : il n'y a que 25 possibilités
- Sert surtout à illustrer le principe de substitution

Clé à usage unique *(« one-time pad »)*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Message M	
C	3
O	15
U	21
C	3
O	15
U	21

+

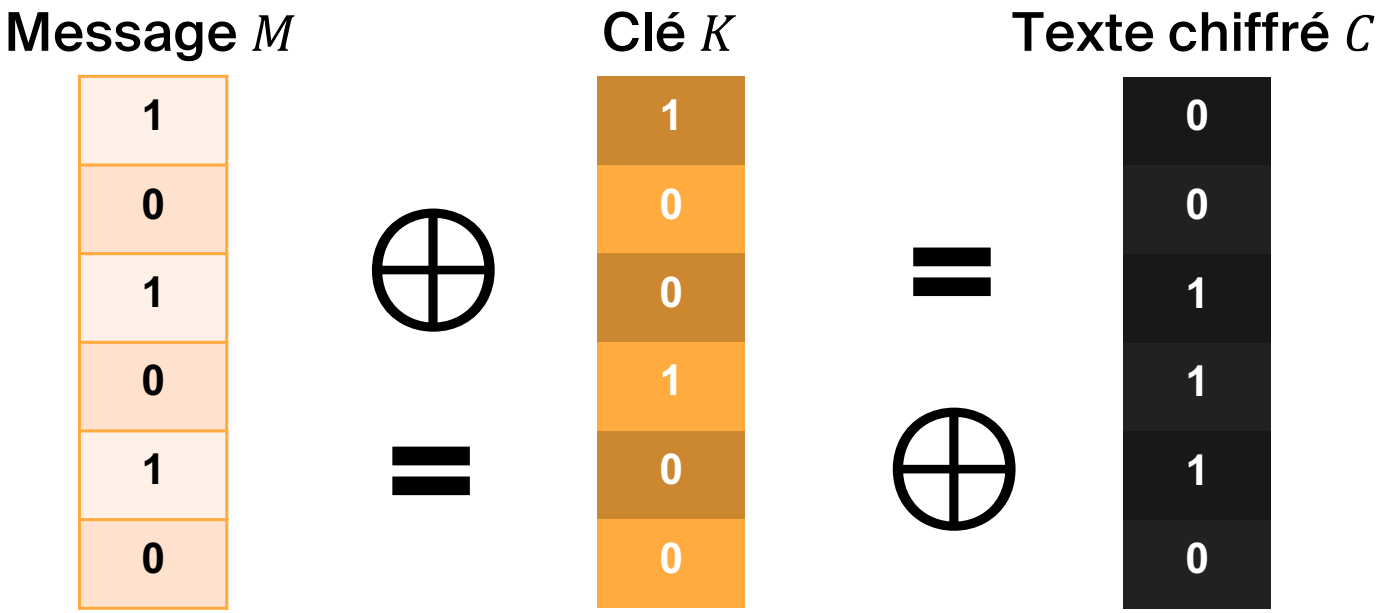
Clé K	
S	19
E	5
C	3
R	18
E	5
T	20

=

Texte chiffré C	
V	22
T	20
X	24
U	21
T	20
O	15

$$C = (M + K) \bmod n \longrightarrow D = (C - K) \bmod n$$

Clé à usage unique *(« one-time pad »)*



$C = M \oplus K$ ⟶ $D = C \oplus K$

$D = M \oplus K \oplus K$

$D = M$

Pas de débordement 👍

Clé à usage unique *(« one-time pad »)*

	Addition modulaire	XOR
Domaine	Entiers (e.g., 8, 16, 32 ou 64 bits)	Données binaires (bit par bit)
Chiffrement	$C = (M + K) \bmod n$	$C = M \oplus K$
Déchiffrement	$D = (C - K) \bmod n$	$D = C \oplus K$
Remarque	Nécessite une soustraction pour déchiffrer	Plus rapide, auto-inverse

Clé à usage unique *(« one-time pad »)*

- Le OTP assure une sécurité parfaite **à condition que la clé** :
  - soit parfaitement **aléatoire**
  - ait exactement la **même taille** que le message
  - ne soit **jamais réutilisée**

- Le One-Time Pad ne repose pas sur un problème mathématique difficile, mais sur une **clé parfaitement aléatoire et unique**.
  - Cela le rend **résistant aux attaques quantiques**.

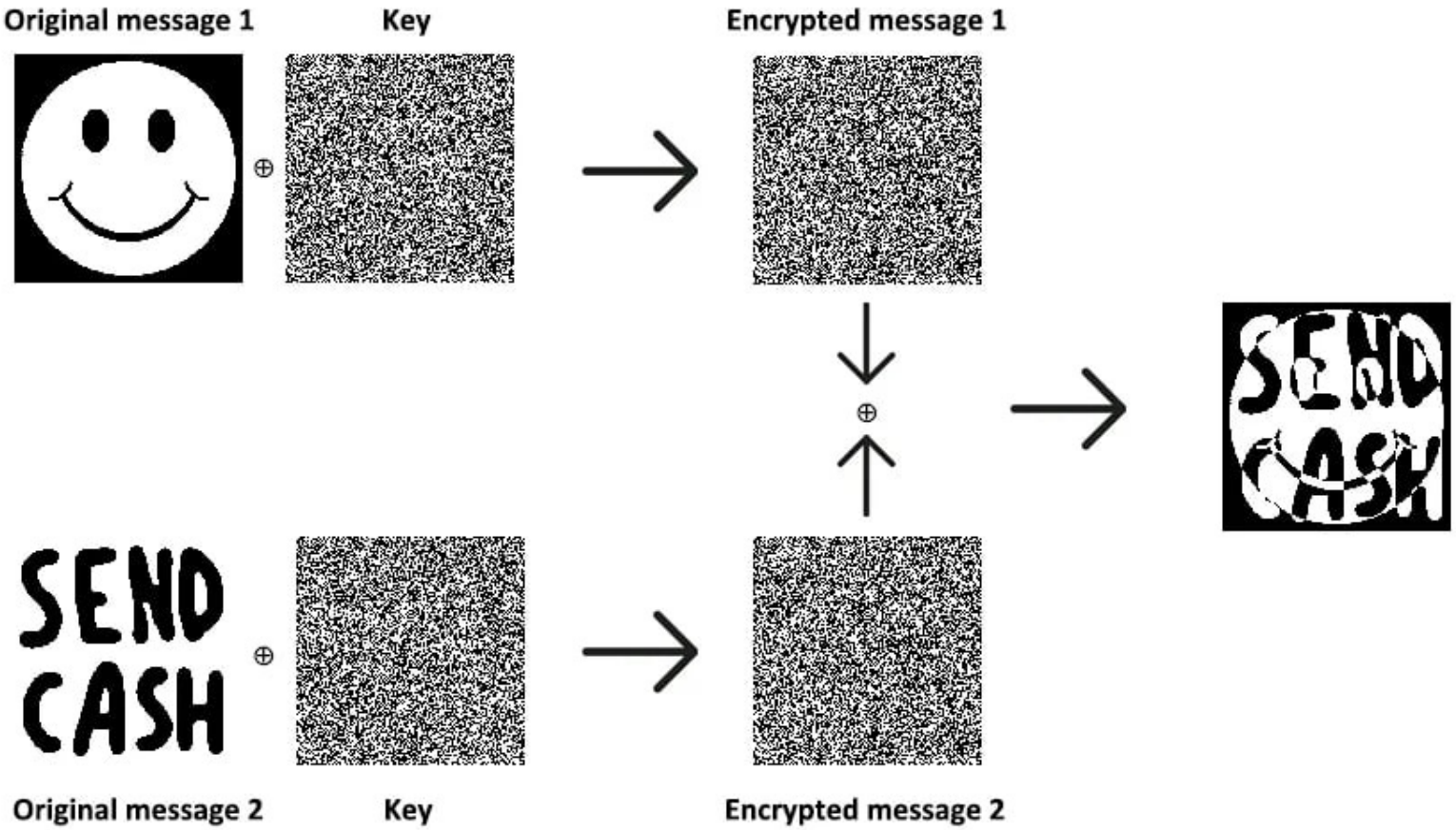
Défauts du OTP

- Pour envoyer un message de longueur n,
  il faut une **clé aussi longue que le message**
- Cette clé doit être **transmise de façon secrète**
  avant toute communication
- Si la clé est trop simple (ex. $K = 00000000$),
  la sécurité est compromise
- Si la même clé est utilisée deux fois :

$$C1 = M1 \oplus K$$
$$C2 = M2 \oplus K$$
$$C1 \oplus C2 = M1 \oplus K \oplus M2 \oplus K = M1 \oplus M2$$

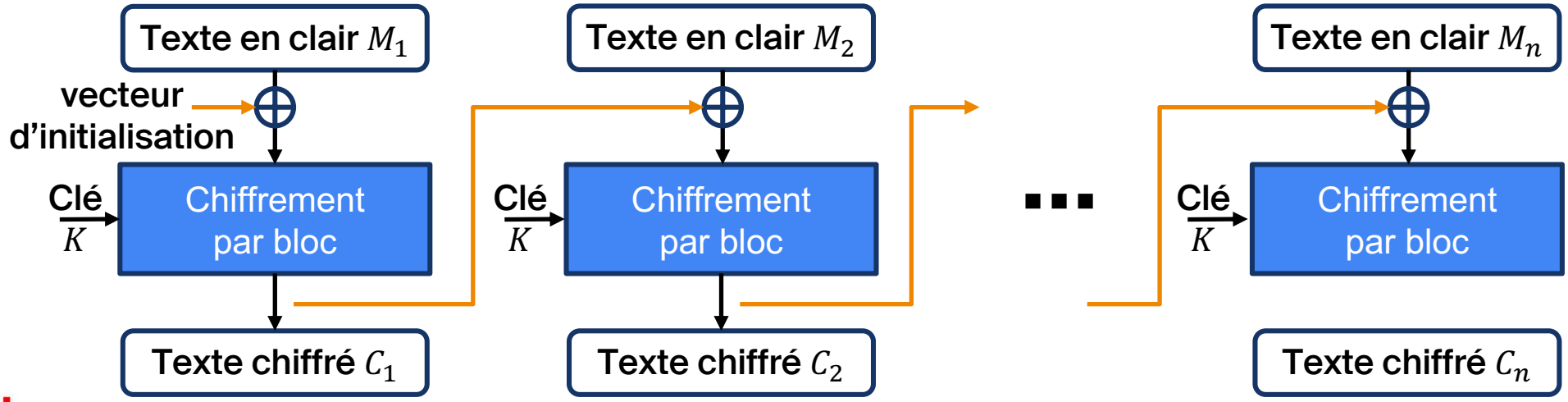
- Eve peut analyser les relations entre $M1$ et $M2$:
  plus aucune sécurité !

Défauts du OTP



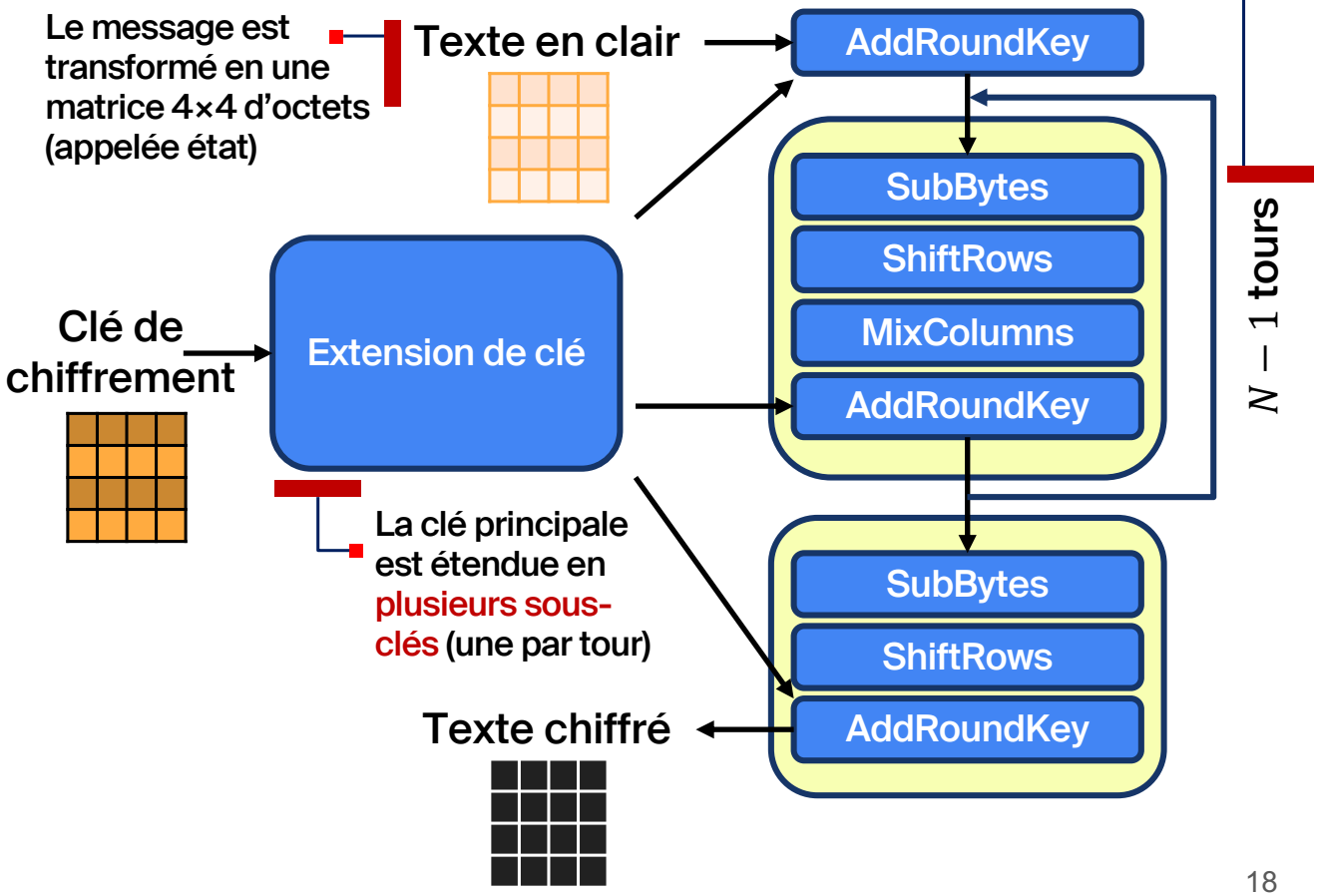
Chiffrements par blocs

- Contrairement au One-Time Pad, on utilise souvent **la même clé plusieurs fois**
- Un block cipher est un algorithme de chiffrement symétrique qui :
  - Prend un bloc de données M_i de taille fixe (par exemple 128 bits)
  - Utilise une clé secrète K
  - Et renvoie un bloc chiffré C_i de la même taille



AES : Advanced Encryption Standard

- Bloc de 128 bits
- Clés de 128, 192 ou 256 bits
- Fonctionne en 10, 12 ou 14 tours
- Chaque tour applique : substitution, permutation, mélange, et ajout de sous-clé
- Utilisé partout : Wi-fi, HTTPS, VPN, disques chiffrés



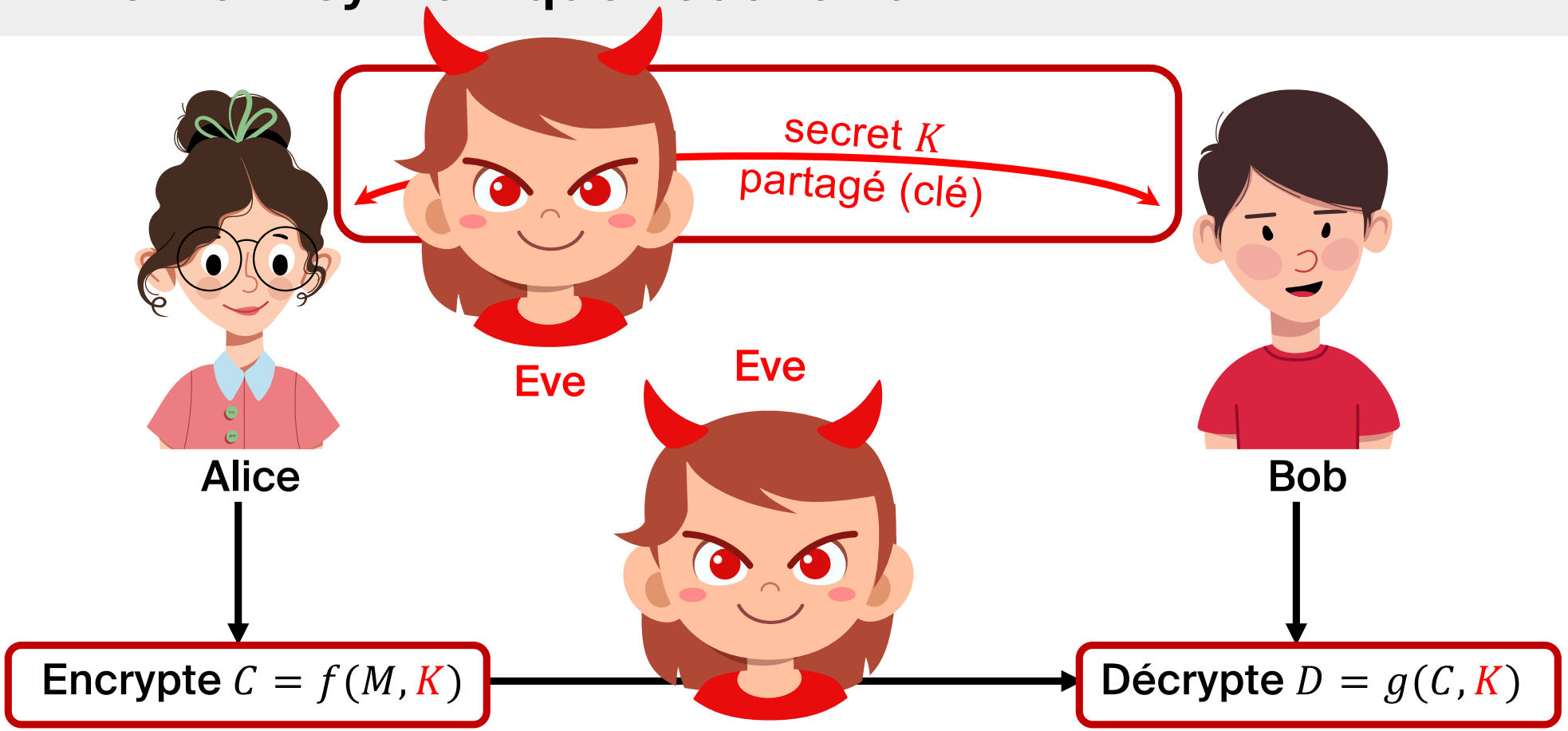
Bilan : Chiffrement symétrique

- Une seule clé pour chiffrer / déchiffrer
- Exemples : César, OTP, AES
- La taille du message chiffré est **la même** que celle du message d'origine
- Problème : **comment partager la clé sans la divulguer ?**

Aujourd'hui

- Chiffrement symétrique
- Protocole de Diffie-Hellman
- Fonctions de hachage cryptographiques
- Chiffrement asymétrique

Chiffrement symétrique : scénario



Eve intercepte C mais ne sait pas trop quoi en faire sans la clé K...

Protocole Diffie-Hellman : version simplifiée

- Alice et Bob désirent échanger des informations de manière confidentielle **sans** disposer d'une clé secrète K échangée au préalable.

Supposons qu'Eve a raté l'école et n'a jamais appris à diviser. En revanche, elle est super douée pour intercepter toutes les communications entre Alice et Bob. Ils ne peuvent pas échanger un mot sans qu'Eve n'en soit à l'écoute.

Protocole Diffie-Hellman : version simplifiée

On a donc besoin d'**opérations difficilement inversibles** ou « **opérations à sens unique** ».

Même si Eve intercepte M, N_{AM} et N_{BM}, **tant qu'elle ne sait pas diviser**, le secret reste bien protégé.

1. Ils se mettent d'accord sur un 3ème nombre public M

M

1. Alice choisit un nombre secret N_A
2. Alice calcule $N_{AM} = N_A \cdot M$
3. Alice envoie N_{AM} à Bob
4. Alice calcule $N_A \cdot N_{BM} = \boxed{N_A \cdot N_B \cdot M} = K$

N_{AM}

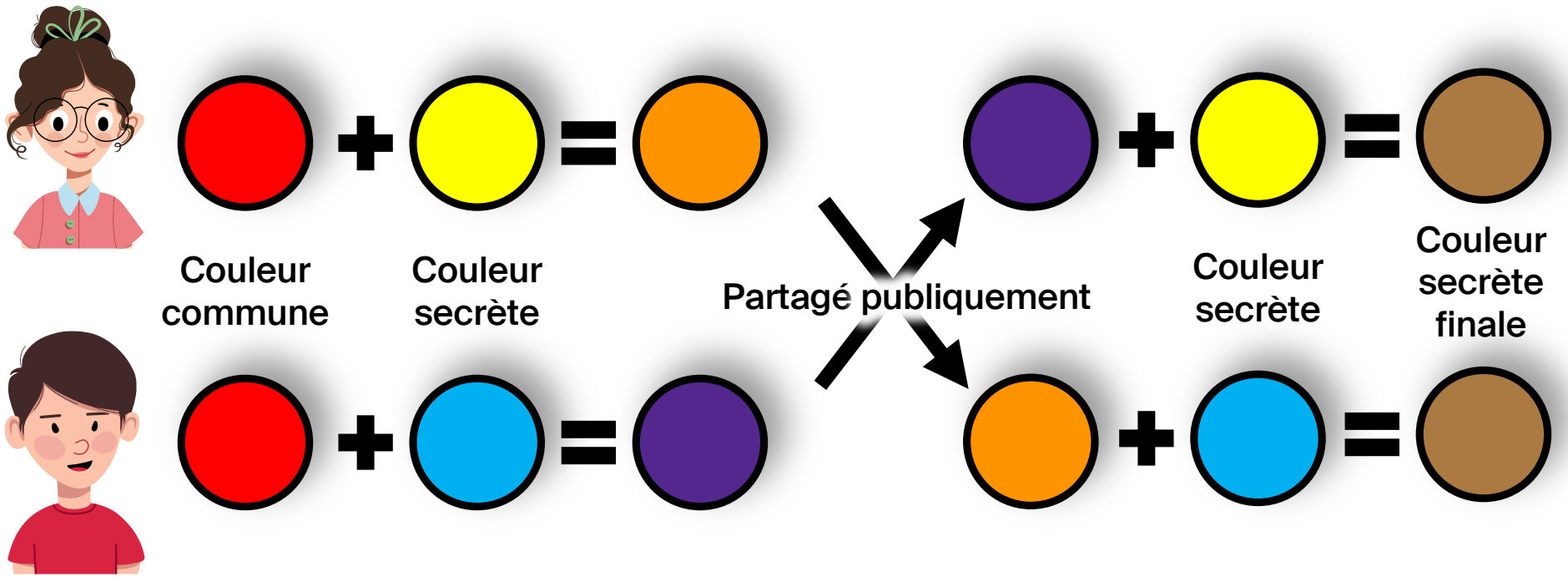
N_{BM}

1. Bob choisit un nombre secret N_B
2. Bob calcule $N_{BM} = N_B \cdot M$
3. Bob envoie N_{BM} à Alice
4. Bob calcule $N_B \cdot N_{AM} = \boxed{N_A \cdot N_B \cdot M} = K$

égaux = secret partagé

Diffie-Hellman avec des couleurs

- Les couleurs sont facilement mélangeables, mais difficilement séparables



Arithmétique modulaire

Sens Horaire (+ Addition)

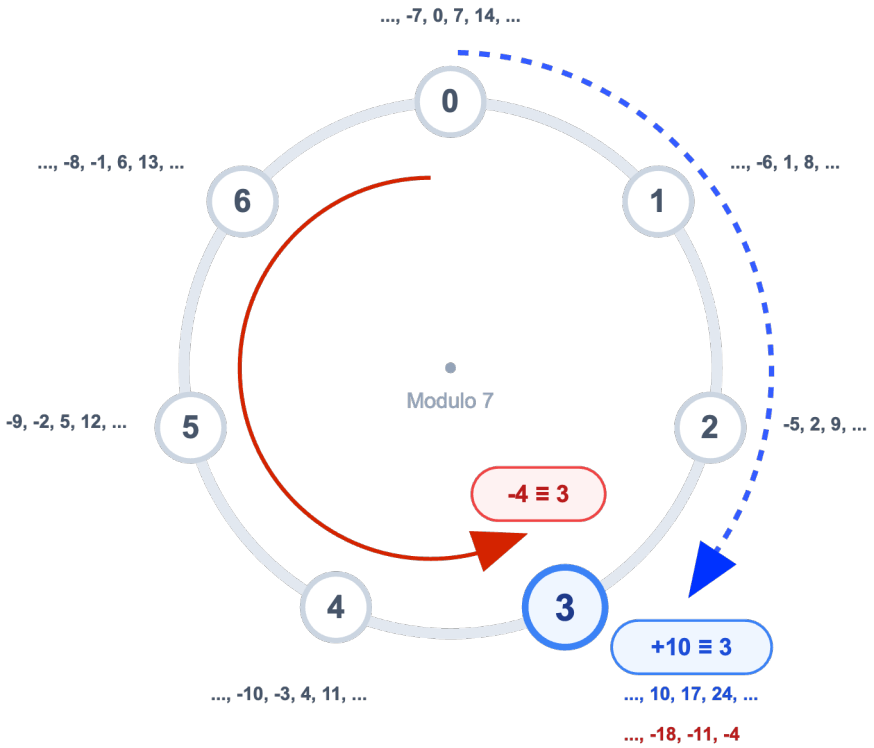
Avancer sur le cercle. Ajouter **+10** (modulo 7) équivaut à faire un tour complet (7) plus 3 étapes. On atterrit sur le **3**.

Sens Anti-horaire (- Soustraction)

Reculer sur le cercle. Soustraire **-4** depuis 0 équivaut à reculer de 4 étapes. On atterrit également sur le **3**.

Congruence :

Une infinité de nombres (-18, -11, -4, 3, 10, 17...) partagent la même position géométrique.



Arithmétique modulaire

- **Soit P un grand nombre premier. Sur l'ensemble $\{0,1, \dots, P-1\}$, on définit l'addition, la multiplication et l'exponentiation modulo P :**

Exemples (avec $P = 5$) :

$a + b \pmod P$	$a \cdot b \pmod P$	$a^b \pmod P$
$4 + 3 \ (mod\ 5) = 2$	$4 \cdot 3 \ (mod\ 5) = 2$	$4^3 \ (mod\ 5) = 4$

- pas de dépassement de capacité
- toutes des opérations faciles à exécuter

Arithmétique modulaire

$a^b \pmod P$
$4^3 \ (mod\ 5) = 4$

- Il se trouve que l'opération $a^b (mod\ P) = c$ est **difficile à inverser** (i.e., si on nous donne P, a et c, **il est difficile de retrouver** b).

Voilà donc **l'opération à sens unique** que nous allons utiliser.

Remarques

- La difficulté de l'opération d'inversion dépend des nombres P et a choisis (c'est le problème du **logarithme discret**).
- Il existe par contre des **algorithmes efficaces** pour trouver de **grands nombres premiers** et donc réaliser concrètement ce qui va suivre !

Protocole Diffie-Hellman

Même si Eve intercepte P, Q, N_{QA} et N_{QB}, tant qu'elle ne sait pas résoudre le problème du logarithme discret en un temps raisonnable, le secret reste bien protégé.

1. Alice et Bob choisissent ensemble un grand nombre premier P, ainsi qu'un autre nombre Q entre 1 et $P-1$.

P, Q

1. Alice choisit un nombre secret $1 < N_A < P-1$
2. Alice calcule $N_{QA} = Q^{N_A} \pmod P$
3. Alice envoie N_{QA} à Bob
4. Alice calcule ${N_{QB}}^{N_A} = Q^{N_A \cdot N_B} \pmod P = K$

N_{QA}

N_{QB}

1. Bob choisit un nombre secret $1 < N_B < P-1$
2. Bob calcule $N_{QB} = Q^{N_B} \pmod P$
3. Bob envoie N_{QB} à Alice
4. Bob calcule ${N_{QA}}^{N_B} = Q^{N_A \cdot N_B} \pmod P = K$

égaux = secret partagé

Aujourd'hui

- Chiffrement symétrique
- Protocole de Diffie-Hellman
- Fonctions de hachage cryptographiques
- Chiffrement asymétrique

Fonctions de hachage cryptographiques

- Une fonction de hachage prend n'importe quelle donnée
  (texte, vidéos, musique…)
  et produit une empreinte numérique courte (ex. 256 bits pour SHA-256)

- Propriétés essentielles :
  - Déterministe : même entrée → même sortie
  - Sens unique : impossible de retrouver l'entrée à partir du hash
  - Résistance aux collisions : très difficile de trouver deux entrées différentes ayant le même hash

- Exemples : SHA-256, SHA-3, MD5 👎, SHA-1 👎

Fonctions de hachage cryptographiques

Déterministe : même entrée → même sortie

```
$ echo -n "bonjour" | sha256sum
2cb4b1431b84ec15d35ed83bb927e27e8967d75f4bcd9cc4b25c8d879ae23e18  -
```

Essayez sur votre machine : vous devriez obtenir exactement **le même résultat**.

Fonctions de hachage cryptographiques

Sens unique : impossible de remonter à l'entrée

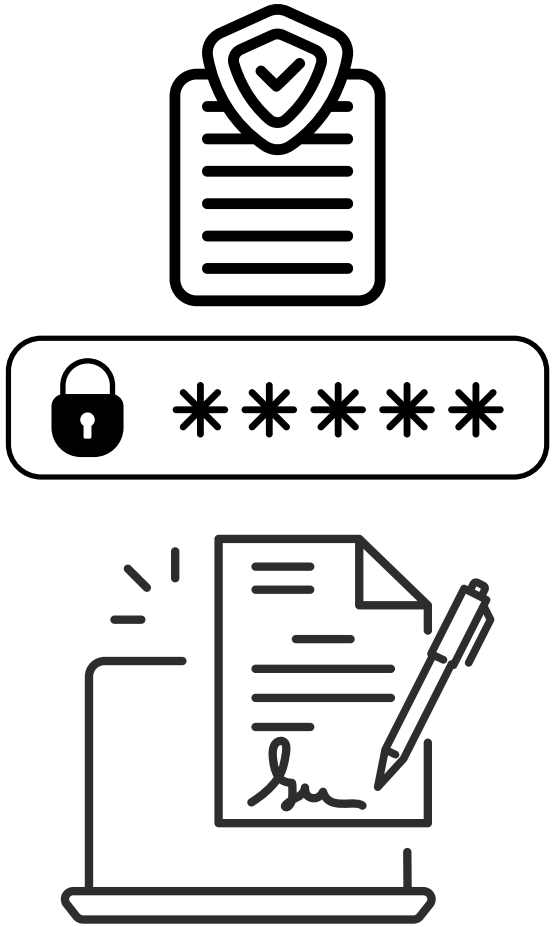
Fonctions de hachage cryptographiques

Résistance aux collisions : très difficile de trouver deux entrées différentes ayant le même hash

`af8691b9fe48994e5b5637386e0c4d92f2d1a88253f4b2feeec61a1ee1f8c69d`

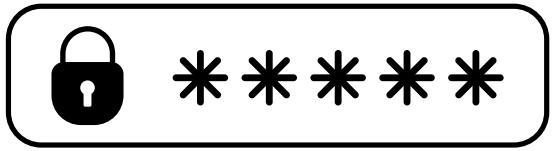
`46990b7751ae578ef7de9369e7fa3500ac3a8e2187ab40e94d19128293eedbbf`

À quoi servent les fonctions de hachage ?



- **Vérification d'intégrité** : si un fichier est modifié, son hash change
- **Stockage de mots de passe** : on stocke `hash(mot de passe)` au lieu du mot de passe lui-même
- **Signature numérique** : on signe le hash d'un message, pas le message complet

Fonctions de hachage : Stockage de mots de passe



- En tant que fournisseur de service, on ne doit jamais stocker les mots de passe en clair
- Une fuite = accès immédiat à tous les comptes

- On stocke seulement le **hachage du mot de passe**

```
stored = hash("azerty123")
```

- Lors de la connexion, on compare :

```
hash(input_password) == stored
```

- Mais attention : si deux utilisateurs ont le même mot de passe, on obtient le même hash — ce qui révèle trop d'informations !

Fonctions de hachage : Stockage de mots de passe

- Ajouter du sel (salt) pour renforcer la sécurité
- Le sel est une valeur aléatoire propre à chaque utilisateur, ajoutée au mot de passe avant hachage

```
salt = random()
stored = hash(salt + password)
```

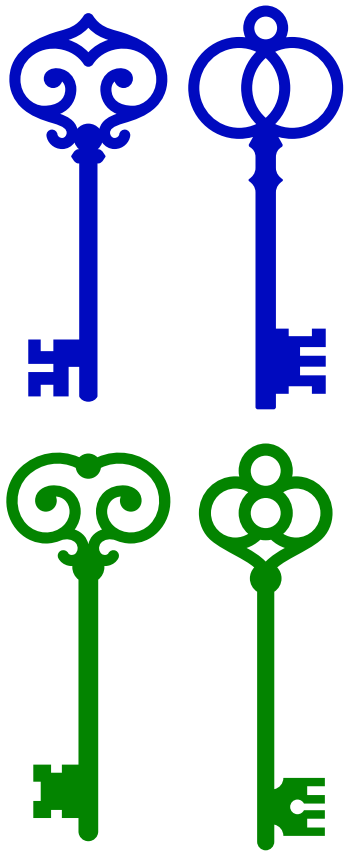
- Le sel est stocké en clair avec le hash

- Avantages :
  - Rend les attaques par dictionnaire ou rainbow tables inutiles
  - Même mot de passe → hash différent selon l'utilisateur

Aujourd'hui

- Chiffrement symétrique
- Protocole de Diffie-Hellman
- Fonctions de hachage cryptographiques
- **Chiffrement asymétrique**

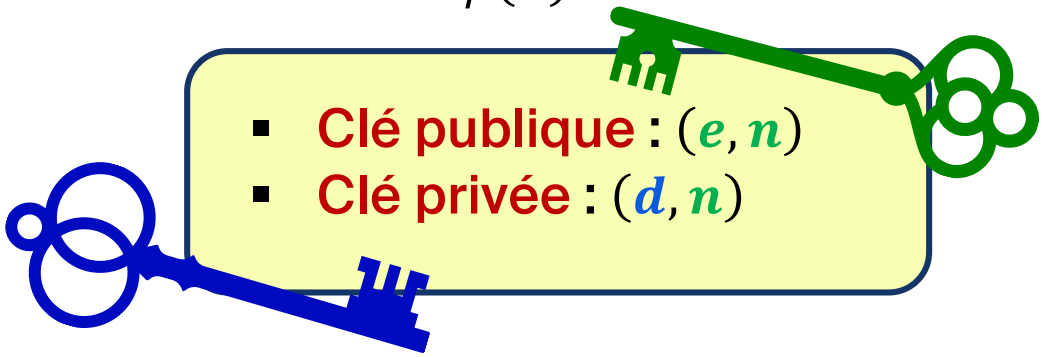
Cryptographie asymétrique



- Chaque utilisateur possède deux clés :
  - Une clé publique (diffusée librement)
  - Une clé privée (gardée secrète)
- Utilisations typiques :
  - Chiffrement → avec la clé publique du destinataire
  - Signature → avec sa propre clé privée
- Avantage : plus besoin de partager un secret à l'avance
- Inconvénient : calculs plus lourds que les méthodes symétriques
- La sécurité repose sur :
  - Multiplier deux grands nombres premiers : facile
  - Retrouver les facteurs à partir du produit : très difficile (en pratique)

Cryptographie asymétrique : RSA

- Alice choisit deux grands nombres premiers p et q
- Elle calcule :
  - $n = p \cdot q$
  - $\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$
- Elle choisit un exposant public e, tel que :
  - $1 < e < \varphi(n)$, et $\gcd(e, \varphi(n)) = 1$
- Elle calcule ensuite l'exposant privé d, tel que :
  - $e \cdot d \equiv 1 \bmod \varphi(n)$

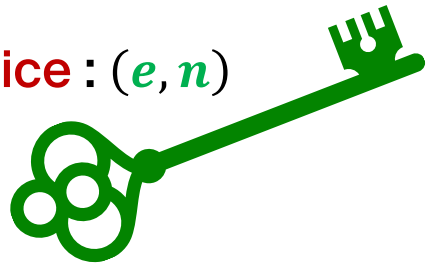


Cryptographie asymétrique : RSA

- Bob veut envoyer un message secret à Alice

- Il utilise la clé publique d'Alice : (e, n)
- Il chiffre son message m :

$$c = m^e \bmod n$$



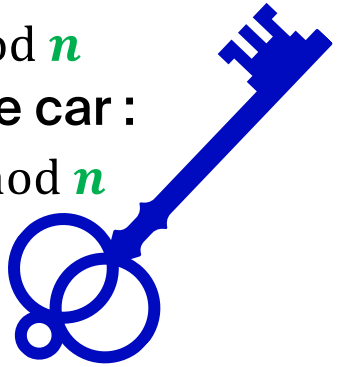
c

- Alice reçoit c et utilise sa clé privée (d, n) pour déchiffrer :

$$m = c^d \bmod n$$

- Cela fonctionne car :

$$m^{e \cdot d} \equiv m \bmod n$$



- En pratique, on ne chiffre pas directement un message long avec RSA
- On chiffre une clé de session → utilisée ensuite avec AES

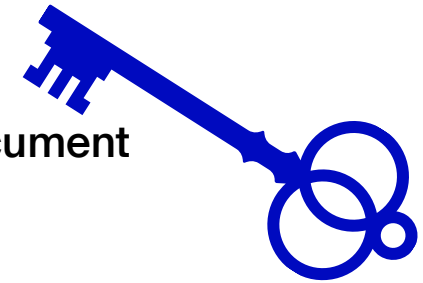
Signature numérique

- On ne chiffre pas le message, mais son empreinte (hash) **avec sa clé privée**
- Tout le monde peut **vérifier** avec la clé publique

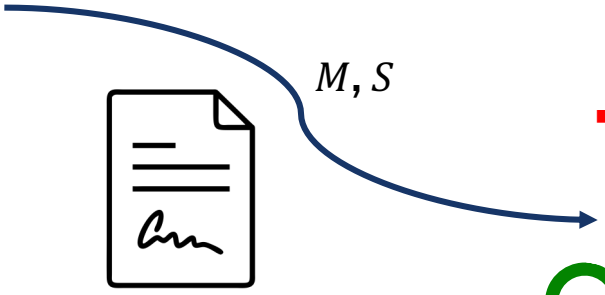
- Pourquoi c'est utile ?
  - Garantit **l'authenticité** : seul le propriétaire de la clé privée peut signer
  - Garantit **l'intégrité** : toute modification du message entraîne un hash différent
  - Garantit **la non-répudiation** : la signature prouve que l'auteur est bien à l'origine du message

Signature numérique

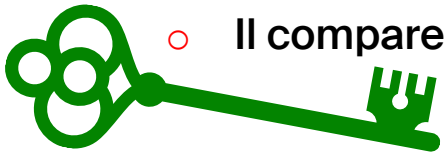
- Alice veut envoyer un document signé à Bob



- Alice calcule $\texttt{hash}(M)$ où M est le document
- Elle chiffre ce hash avec sa clé privée.
  Cela produit la signature S
- Elle envoie à Bob le document M et la signature S



- Bob vérifie la signature :
  - Il calcule $\texttt{hash}(M)$ de son côté
  - Il déchiffre S avec la clé publique d'Alice
  - Il compare les deux résultats



Aujourd'hui

- Chiffrement symétrique
- Protocole de Diffie-Hellman
- Fonctions de hachage cryptographiques
- Chiffrement asymétrique

Résumé Semaine 13 – ICC-T

- Les besoins en sécurité : confidentialité, authenticité, intégrité, non-répudiation
- Les outils cryptographiques :
  - Chiffrement symétrique (AES) : rapide, clé partagée
  - Diffie-Hellman : permet un échange de clé sans la transmettre
  - Fonctions de hachage : empreinte numérique, vérification d'intégrité
  - Chiffrement asymétrique (RSA) : deux clés, mais plus lent
  - Signature numérique : prouve l'identité et l'intégrité d'un message
- Certains cryptosystèmes (ex. : RSA, Diffie–Hellman) reposent sur des problèmes mathématiques difficiles (ex. : factorisation, logarithme discret) ; d'autres (AES, OTP) s'appuient sur des constructions algorithmiques ou de l'aléa parfait.

rafael.pires@epfl.ch

Merci