Peter Wittwer
16 mai 2025

Analyse avancée II – Corrigé de la série 11B

Échauffement. (Théorème des fonctions implicites)
Voir le cours pour l'énoncé. Il faut un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que $F(x_0, y_0) = 0$ et $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$, ce qui garantie l'existence d'un voisinage U de x_0 et d'une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, telle que $f(x_0) = y_0$ et $\forall x \in U$, $F(x, f(x)) = 0$. Pour la dérivée de f on a $\forall x \in U$

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, f(x)\right)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\left(x, f(x)\right).$$

Exercice 1. (Théorème des fonctions implicites)

i) Notons $\mathbf{y} = (y, z)$ et soit la fonction $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, \mathbf{y}) = \left(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)\right)^\top,$$

où $F_1(x, y, z) = x - y^3 + z + 8$ et $F_2(x, y, z) = x^3 + y^4 - z^5 - 16$.
Soit $(x_0, \mathbf{y}_0) = (0, 2, 0)$. Nous avons

$$F_1(0, 2, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_2(0, 2, 0) = 0,$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y^2 & 1 \\ 4y^3 & -5z^4 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}\right)(0, 2, 0) = \det\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 32 & 0 \end{pmatrix} = -32 \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites permet alors d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et deux fonctions $f_1, f_2 \in C^1(]-\delta, +\delta[\,, \mathbb{R})$ telles que $f_1(0) = 2$ et $f_2(0) = 0$ et telles que $\forall x \in\,]-\delta, \delta[\,$,

$$F_1(x, f_1(x), f_2(x)) = 0$$
$$F_2(x, f_1(x), f_2(x)) = 0$$

ii) Pour la dérivée de la fonction $f = (f_2, f_2)^\top$ on a (voir l'échauffement pour l'expression à calculer):

$$f'(0) = -\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -32 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc $f_1'(0) = 0$ et $f_2'(0) = -1$. La tangente à la courbe $y = f_1(x)$ en 0 a donc donnée par l'équation $y = 2$ et la tangente à la courbe $z = f_2(x)$ en 0 et donnée par l'équation $z = -x$.

iii) Si on veut exprimer x et z en termes de y il faut contrôler le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2 & -5z^4 \end{pmatrix}$$

en $(0,2,0)$ et si on veut exprimer x et y en termes de z il faut contrôler le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ 3x^2 & 4y^3 \end{pmatrix}$$

en $(0,2,0)$. Ces déterminants sont respectivement égal à 0 et $32 \neq 0$. On peut donc exprimer proche du point $(0,2,0)$ x et y en termes de z, mais pas x et z en termes de y.

Exercice 2. (Théorème des fonctions implicites)

i) Soit $D =]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et $F : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y,z) = -1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \frac{1}{2}\ln(1+x+z) - \ln(3) - \ln(z) + \frac{1}{3}\ln(y^2+z^3).$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in D$ on a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 5yz^4 + \frac{xy}{1+x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1+x+z)} - \frac{1}{z} + \frac{z^2}{y^2+z^3}.$$

Ainsi, puisque $F(1,0,7) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,0,7) = \dfrac{1}{18} \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction de classe C^1, $f\colon B((1,0),\delta) \to \mathbb{R}$, telle que

$$f(1,0) = 7 \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in B((1,0),\delta), \quad F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0.$$

ii) Pour tout $(x,y,z) \in D$ on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x + \frac{yz}{1+x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1+x+z)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,0,7) = 2 + \frac{1}{18},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = z^5 + \frac{xz}{1+x^2y^2z^2} + \frac{2y}{3(y^2+z^3)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0,7) = 7^5 + 7.$$

Le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$ correspond (localement) au plan tangent à la surface déterminée par l'équation $F(x,y,z) = 0$ au point $(1,0,7)$. Il est donc donné par:

$$\left\langle (\nabla F)(1,0,7), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-7 \end{pmatrix} \right\rangle = \left(2 + \frac{1}{18}\right)x + \left(7^5+7\right)y + \frac{1}{18}z - \frac{22}{9} = 0.$$

A noter que cette équation s'obtient aussi par le développement de Taylor à l'ordre 1 de f au point $(1,0)$.

Exercice 3. (Théorème des fonctions implicites)

i) Manifestement on a $F(0,0) = 0$ et, puisque chaque composante de F est la somme de fonctions de classe C^1, F est aussi de classe C^1.

ii) Il suffit de vérifier le théorème des fonctions implicites. On a déjà vérifié que $F(0,0) = 0$ et il suffit donc de contrôler que le déterminant de la sous-matrice 2×2 de $F'(0)$ correspondant à la variable $u = (u_1, u_2)$ est non nul. On a, avec $w = (w_1, w_2)$

$$F'(u,w) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 1 & 2w_1 & 0 \\ e^{u_1} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 1 \\ e^{u_1} & 1 \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $\det\left(\frac{\partial F}{\partial u}(0,0)\right) = -1 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe donc $\varepsilon > 0$ et une fonction $f \in C^1(B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que, pour tout $w \in B(0,\varepsilon)$

$$F(f(w), w) = 0.$$

iii) On a que

$$f'(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial u}(0,0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial w}(0,0) = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$