Peter Wittwer
9 mai 2025

Analyse avancée II – Série 10B

Remarque : dans ce cours, des difféomorphismes sont par convention toujours de classe C^1.

Échauffement. (Théorème de la fonction réciproque)

Énoncer le théorème de la fonction réciproque (voir §5.4.3 du cours). Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continûment différentiable, strictement monotone et surjective, mais ne satisfait pas les conditions du théorème.

Exercice 1. (Théorème de la fonction réciproque)

Soit la fonction $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} .$$

i) Montrer que F admet dans un voisinage du point $(1,0)$ une fonction réciproque, et que cette fonction réciproque locale est de classe C^1.

ii) Est-ce que F admet une fonction réciproque globale ?

Exercice 2. (Théorème de la fonction réciproque)

Soient $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts, et soient $\phi \in C^1(U,V)$ et $\psi \in C^1(V,W)$ deux difféomorphismes. Montrer que $\psi \circ \phi$ est un difféomorphisme.

Exercice 3. (Théorème de la fonction réciproque)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Par le théorème de la fonction réciproque il existent donc des voisinages $U \subset \mathbb{R}$ de x_0 et $V \subset \mathbb{R}$ de $f(x_0)$ et une fonction réciproque locale $g\colon V \to U$. Montrer que $g \in C^2(V,U)$.

Exercice 4. (Difféomorphismes et orientation)

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et $\psi\colon U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1. Si $\det(J_\psi)$ est strictement positif sur U on dit que ψ "préserve l'orientation", et si $\det(J_\psi)$ est strictement négatif sur U on dit que ψ "renverse l'orientation".

i) Montrer que si U est connexe par arc, alors soit ψ préserve l'orientation, soit ψ renverse l'orientation.

ii) Trouver des ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ qui ne sont pas connexes par arcs et un difféomorphisme $\psi\colon U \to V$ qui ne ni préserve ni renverse l'orientation.

Exercice 5. (Théorème des accroissements finis)

Démontrer l'inégalité du théorème des accroissements finis utilisée dans la démonstration du théorème d'inversion locale vu au cours (voir le paragraphe 5.4.7 du script), à savoir que

$$\|\varphi(\tilde{x}_1) - \varphi(\tilde{x}_2)\| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\| \ .$$