Analyse avancée II – Corrigé de la série 12A

Échauffement.

Comme dans l'exemple vu au cours, la surface du cylindre est $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ et son volume est $V = \pi r^2 h$. On veut donc maximiser la fonction $f(r,h) = \pi r^2 h$ sous la contrainte $g(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh - S = 0$.

Méthode 1: On utilise l'expression de S pour éliminer une des deux variables. En effet,

$$h(r) = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{S}{2\pi r} - r\,,$$

et donc

$$V(r) = f(r,h(r)) = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r\right) = \frac{S}{2}\,r - \pi r^3 \qquad \Rightarrow \qquad V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

et $V'(r) = 0 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Comme $V''(r) = -6\pi r < 0$, le cylindre ainsi obtenu a bien le volume maximal pour la surface donnée.

Méthode 2: Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction de Lagrange

$$F(r,h,\lambda) = f(r,h) - \lambda g(r,h) = \pi r^2 h - \lambda(2\pi r^2 + 2\pi rh - S)$$

et on cherche ses points stationnaires

$$\nabla F(r,h,\lambda) = \begin{pmatrix} 2\pi rh - 4\pi\lambda r - 2\pi\lambda h \\ \pi r^2 - 2\pi\lambda r \\ 2\pi r^2 + 2\pi rh - S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} rh - 2\lambda r - \lambda h = 0 & (1) \\ r^2 - 2\lambda r = 0 & (2) \\ 2\pi r^2 + 2\pi rh - S = 0 & (3) \end{cases}$$

Comme $r > 0$, on a

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{r}{2} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \frac{rh}{2} - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 2r \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad 6\pi r^2 = S \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}\,.$$

Exercice 1.

i) On cherche les extremums de la fonction-objectif $f(x,y) = x^3 + y^3$ sous la contrainte $g(x,y) = x^4 + y^4 - 32 = 0$. Notons que $\nabla g(x,y,z) = (4x^3, 4y^3) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x,y) = 0$ mais que $g(0,0) \neq 0$ et donc $\nabla g(x,y) \neq 0$ pour tout (x,y) satisfaisant $g(x,y) = 0$.
La fonction de Lagrange est

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^3 + y^3 - \lambda(x^4 + y^4 - 32).$$

On cherche les points stationnaires de F qui sont solutions du système

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 - 4\lambda x^3 = x^2(3 - 4\lambda x) & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 3y^2 - 4\lambda y^3 = y^2(3 - 4\lambda y) & = 0 \qquad (2) \\ F_\lambda = -(x^4 + y^4 - 32) & = 0 \qquad (3) \end{cases}$$

A partir de (1) et (2) on trouve plusieurs solutions :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;\text{ ou }\; \lambda x = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \;\text{ ou }\; \lambda y = \frac{3}{4}$$

- Si $x = y = 0$, (3) n'est pas satisfaite, donc impossible.
- Si $x = 0$, alors (3) implique que $y = \pm\sqrt[4]{32} = \pm 2\sqrt[4]{2}$. Il existe alors une valeur de λ pour satisfaire (2).
- Si $y = 0$, alors $x = \pm 2\sqrt[4]{2}$ et (1) peut être satisfaite.
- Si aucune des variables n'est nulle, alors $x = y = \frac{3}{4\lambda}$ par (1) et (2). Par (3) il suit que $2\,\frac{81}{256\,\lambda^4} = 32 \quad \Rightarrow \quad x = y = \pm 2$.

Les solutions du système sont donc

$$(x,y) \in \Big\{(0, 2\sqrt[4]{2}), (0, -2\sqrt[4]{2}), (2\sqrt[4]{2}, 0), (-2\sqrt[4]{2}, 0), (2,2), (-2,-2)\Big\}$$

et on a le tableau suivant

(x,y)	$(0, 2\sqrt[4]{2})$	$(0, -2\sqrt[4]{2})$	$(2\sqrt[4]{2}, 0)$	$(-2\sqrt[4]{2}, 0)$	$(2,2)$	$(-2,-2)$
$f(x,y)$	$8 \cdot 2^{3/4}$	$-8 \cdot 2^{3/4}$	$8 \cdot 2^{3/4}$	$-8 \cdot 2^{3/4}$	16	-16

Comme $2^{3/4} < 2$, la valeur maximale de f est 16, atteint en $(2,2)$, et la valeur minimale est -16, atteint en $(-2,-2)$.

ii) On cherche les extremums de f sur l'ensemble $\Gamma := \{(x,y,z) : g_1(x,y,z) = 0$ et $g_2(x,y,z) = 0\}$ avec $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ et $g_2(x,y,z) = x-y-1$. Pour montrer que $\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ et $\nabla g_2(x,y,z) = (1,-1,0)$ sont linéairement indépendants sur Γ, supposons que $\alpha \nabla g_1(x,y,z) + \beta \nabla g_2(x,y,z) = 0$. Du système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta = 0 \\ \alpha y - \beta = 0 \\ \alpha z = 0 \end{cases}$$

il suit que si $\alpha = 0$ alors $\beta = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $z = 0$ et la somme des deux premières équations donne $y = -x$. Observons $g_2(x,-x,0) = 2x - 1 = 0$ implique $x = \frac{1}{2} = -y$ mais $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \notin \Gamma$ à cause de g_1. Ainsi ∇g_1 et ∇g_2 sont linéairement indépendants sur Γ.
La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) - \lambda\, g_1(x,y,z) - \mu\, g_2(x,y,z) \\ &= x + y + z - \lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right) - \mu(x-y-1). \end{aligned}$$

et on résout le système $\nabla F = 0$:

$$\begin{cases} F_x = 1 - 2\lambda x - \mu & = 0 & (1) \\ F_y = 1 - 2\lambda y + \mu & = 0 & (2) \\ F_z = 1 - 2\lambda z & = 0 & (3) \\ F_\lambda = -(x^2+y^2+z^2-1) & = 0 & (4) \\ F_\mu = -(x-y-1) & = 0 & (5) \end{cases}$$

Par (3) on sait que $\lambda \neq 0$ et donc $z = \frac{1}{2\lambda}$. Ensuite

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad 2 - 2\lambda(x+y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = \frac{1}{\lambda} = 2z$$

De plus $(5) \Rightarrow y = x - 1$ et donc $z = x - \frac{1}{2}$. On insère ces expressions dans (4)

$$x^2 + (x-1)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0\,,$$

ce qui donne deux solutions :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

et les solutions du système sont

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{6}),\, \frac{1}{6}(-3+\sqrt{6}),\, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{6}), \frac{1}{6}(-3-\sqrt{6}), -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

La fonction f admet un maximum en $\left(\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{6}\right), \frac{1}{6}\left(-3+\sqrt{6}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et un minimum en $\left(\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{6}\right), \frac{1}{6}\left(-3-\sqrt{6}\right), -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 2.

On cherche les extremums de $f(x,y,z) = z$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 4x^2+3y^2+2yz+3z^2-4x-1 = 0$. Notons que $\nabla g(x,y,z) = (8x-4, 6y+2z, 2y+6z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = \left(\frac{1}{2},0,0\right)$ mais $g\left(\frac{1}{2},0,0\right) = -2 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ pour tout (x,y,z) tel que $g(x,y,z) = 0$.
La fonction de Lagrange est

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = z - \lambda(4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x - 1)$$

et il faut résoudre le système

$$\begin{cases} F_x = -\lambda(8x-4) & = 0 \qquad (1) \\ F_y = -\lambda(6y+2z) & = 0 \qquad (2) \\ F_z = 1 - \lambda(2y+6z) & = 0 \qquad (3) \\ F_\lambda = -\left(4x^2+3y^2+2yz+3z^2-4x-1\right) & = 0 \qquad (4) \end{cases}$$

Observons que $\lambda \neq 0$ à cause de (3). Par (1) on a alors $x = \frac{1}{2}$ et par (2) on a $z = -3y$, qu'on insère dans (3) pour obtenir $y = -\frac{1}{16\lambda}$. Tout cela inséré dans (4) donne

$$1 + \frac{3}{256\lambda^2} - \frac{6}{256\lambda^2} + \frac{27}{256\lambda^2} - 2 - 1 = \frac{24}{256\lambda^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{12}{256} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{2\sqrt{3}}{16}$$
$$\Rightarrow \quad y = \mp\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ainsi les solutions du système sont

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}$$

et les valeurs maximale et minimale de z sont $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; elles sont réalisées aux points $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 3.

i) Cherchons d'abord les extremums de f à l'intérieur du domaine $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 32\}$. Ils se trouvent parmi les points stationnaires de f :

$$\begin{cases} f_x = 4x - y - 6 = 0 \\ f_y = -x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

d'où le seul point stationnaire $x_1 = y_1 = 2$.
Soit $g(x, y) = x^2+y^2-32$. Alors $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ mais $g(0, 0) \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ sur le bord de D. On peut donc trouver les extremums de f sur le bord de D par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La fonction de Lagrange

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y - \lambda(x^2 + y^2 - 32)$$

donne le système d'équations

$$\begin{cases} F_x = 4x - y - 6 - 2\lambda x & = 0 \qquad (1) \\ F_y = -x + 4y - 6 - 2\lambda y & = 0 \qquad (2) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 32) & = 0 \qquad (3) \end{cases}$$

En faisant $(1) - (2)$ on obtient $(x - y)(5 - 2\lambda) = 0$, c.-à-d. $y = x$ ou $\lambda = \frac{5}{2}$.
Si $y = x$, alors on obtient les solutions $x_2 = y_2 = 4$ et $x_3 = y_3 = -4$ de (3).
Si $\lambda = \frac{5}{2}$, alors $y = -(x + 6)$ par (1) et (3) devient $x^2 + 6x + 2 = 0$, d'où on trouve $x_4 = -3 + \sqrt{7}$, $y_4 = -3 - \sqrt{7}$ et $x_5 = -3 - \sqrt{7}$, $y_5 = -3 + \sqrt{7}$.
Les valeurs maximale et minimale de f sur le domaine D sont réalisées parmi les points (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, 5)$. En évaluant f en ces cinq points, on trouve

$$f(x_1, y_1) = -12, \quad f(x_2, y_2) = 0, \quad f(x_3, y_3) = 96, \quad f(x_4, y_4) = 98, \quad f(x_5, y_5) = 98.$$

Ainsi, la valeur minimale de f est -12, atteinte en $(2, 2)$, et la valeur maximale est 98, atteinte en $\left(-3 + \sqrt{7}, -3 - \sqrt{7}\right)$ et $\left(-3 - \sqrt{7}, -3 + \sqrt{7}\right)$.
Dans l'Ex. 5 *ii)* de la Série 11 on a calculé les extremums de la même fonction f sur le demi-disque positif du même rayon, noté ici par D^+. Le minimum de f était atteint en $(2, 2)$ et le maximum en $(-4\sqrt{2}, 0)$. Les extremums de f sur D doivent donc être au moins aussi extrêmes que ceux sur D^+. En l'occurrence, le minimum est le même, mais la fonction f atteint des valeurs plus grandes sur le demi-cercle inférieur que sur D^+ si bien que le maximum a changé.

ii) Soit $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ la boule considérée. On commence par chercher les extremums de f à l'intérieur de D. Les points stationnaires de f satisfont

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y + 2 = 0 \\ f_z = 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \quad \text{est le seul point stationnaire}$$

qui est bien à l'intérieur de D car $1^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \leq 4$.
Pour trouver les extremums de f sur le bord de D, on définit $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ en sorte que le bord de D est l'ensemble $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$. Notons qu'on a $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$ mais $g(0, 0, 0) = -4 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ sur le bord de D.

On introduit la fonction de Lagrange

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2y-z-\frac{5}{4}-\lambda(x^2+y^2+z^2-4).$$

et on résout le système qui décrit les points stationnaires de F, à savoir

$$\begin{cases} F_x = 2x-2-2\lambda x = 2(1-\lambda)x-2 & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 2y+2-2\lambda y = 2(1-\lambda)y+2 & = 0 \qquad (2) \\ F_z = 2z-1-2\lambda z = 2(1-\lambda)z-1 & = 0 \qquad (3) \\ F_\lambda = -\left(x^2+y^2+z^2-4\right) & = 0 \qquad (4) \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 1$ (sinon (1) à (3) ne sont pas satisfaites), on peut diviser par $1-\lambda$ pour obtenir à partir de (1) à (3)

$$x = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad y = -\frac{1}{1-\lambda}, \qquad z = \frac{1}{2(1-\lambda)}$$

qu'on met ensuite dans (4) qui devient

$$\frac{2}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{4(1-\lambda)^2}-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 9-16(1-\lambda)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 16\lambda^2-32\lambda+7=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2-2\lambda+\frac{7}{16} = \left(\lambda-\frac{7}{4}\right)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1=\frac{7}{4}, \quad \lambda_2=\frac{1}{4}.$$

Ainsi on a

$$x_1=-\frac{4}{3}, \quad y_1=\frac{4}{3}, \quad z_1=-\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{4}{3}, \quad y_2=-\frac{4}{3}, \quad z_2=\frac{2}{3}.$$

On calcule la valeur de f aux extremums potentiels sur D

(x,y,z)	$\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$
$f(x,y,z)$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{35}{4}$	$-\frac{13}{4}$

Ainsi le minimum de f sur D est $-\frac{7}{2}$, atteint en $\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$, et le maximum est $\frac{35}{4}$, atteint en $\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 4.

i) Soient x et y les longueurs des cathètes d'un triangle rectangle. Son aire est alors $A=\frac{xy}{2}$ et l'hypothénuse est de longueur $\sqrt{x^2+y^2}$. Pour simplifier, on définit une fonction-objectif équivalente, c.-à-d. $f(x,y)=x^2+y^2$ qu'on veut minimiser sous la contrainte $g(x,y)=xy-2A=0$.

Notons que $\nabla g(x,y)=(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ mais que $g(0,0)=-2A\neq 0$. Donc $\nabla g(x,y)\neq 0$ pour tout (x,y) satisfaisant $g(x,y)=0$. La fonction de Lagrange est alors

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2+y^2-\lambda(xy-2A)$$

ce qui mène au système

$$\begin{cases} F_x = 2x-\lambda y & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 2y-\lambda x & = 0 \qquad (2) \\ F_\lambda = -(xy-2A) & = 0 \qquad (3) \end{cases}$$

pour les points stationnaires de F.

De (1) on trouve $x = \frac{\lambda}{2}y$, d'où $(2 - \frac{1}{2}\lambda^2)y =$ par (2). Si $y = 0$, (3) ne peut être satisfaite, donc on $\lambda^2 = 4$, ou encore $\lambda = \pm 2$. Ainsi $x = \pm y$ mais comme x, y sont les deux positifs, on doit avoir $x = y$. Il découle alors de (3) que $x = y = \sqrt{2A}$. Par conséquent le triangle rectangle avec hypoténuse minimale est le triangle rectangle isocèle dont chaque cathète vaut $\sqrt{2A}$.

ii) On cherche le minimum de la fonction-objectif $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (distance du point (x, y, z) à l'origine au carré) sur l'ensemble $\Gamma := \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\}$ avec

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \qquad \text{et} \qquad g_2(x, y, z) = x + y - z + 1.$$

On peut montrer que $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, -1)$ sont linéairement indépendants sur Γ par un argument similaire à celui à l'Ex. 1 *ii)*.

La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda, \mu) &= f(x, y, z) - \lambda\, g_1(x, y, z) - \mu\, g_2(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - z^2) - \mu(x + y - z + 1) \end{aligned}$$

d'où le système

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda x - \mu = 2(1 - \lambda)x - \mu & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 2y - 2\lambda y - \mu = 2(1 - \lambda)y - \mu & = 0 \qquad (2) \\ F_z = 2z + 2\lambda z + \mu = 2(1 + \lambda)z + \mu & = 0 \qquad (3) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 - z^2) & = 0 \qquad (4) \\ F_\mu = -(x + y - z + 1) & = 0 \qquad (5) \end{cases}$$

En faisant (1) − (2) on trouve $2(1 - \lambda)(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$ ou $x = y$.

Si $\lambda = 1$, alors $\mu = 0$ et par (3) on a $z = 0$. Par (4) il suit que $x = y = 0$. Mais $(0, 0, 0)$ ne satisfait pas (5), donc ce n'est pas une solution.

Si $x = y$, alors $z = 2x + 1$ par (5). Pour un point de la forme $(x, x, 2x + 1)$, (4) s'écrit

$$2x^2 + 4x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = y \quad \text{et} \quad z = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Il reste alors à vérifier que ces valeurs de (x, y, z) sont compatibles avec les équations (1) et (3). Pour ceci, insérons les valeurs obtenues dans (1) et (3) et écrivons le tout sous forme matricielle $A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = b$:

$$\begin{cases} 2(1 - \lambda)\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \mu = 0 \\ 2(1 + \lambda)\left(-1 \pm \sqrt{2}\right) + \mu = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} & 1 \\ -2 \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} \\ 2 \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = \pm\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2} = \mp\sqrt{2} \neq 0$, il existe des solutions pour λ et μ (qu'on n'a pas besoin de chercher).

Ainsi les solutions du système $\nabla F = 0$ sont

$$p_1 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad p_2 = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}\right).$$

et
$$f\left(-1\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2},-1\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2},-1\pm\sqrt{2}\right)=2\left(-1\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-1\pm\sqrt{2}\right)^2=6\mp4\sqrt{2}$$
Ainsi p_1 réalise la distance minimale $6-4\sqrt{2}$.

Exercice 5.

Observons d'abord que les deux axes de l'ellipse sont les droites qui passent par le centre et les deux points sur l'ellipse dont la distance au centre est maximale respectivement minimale. On cherche donc les extremums de la distance au centre.
Comme l'axe du cylindre $x^2+y^2=4$ est l'axe z, le centre de l'ellipse se trouve aussi sur l'axe z, i.e. il est de la forme $(0,0,z)$. De plus, l'ellipse est dans le plan $x+y+2z=2$, et donc son centre est $(0,0,1)$. On cherche donc les droites qui contiennent les extremums de la fonction $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2,$$
sur $\Gamma=\{(x,y,z)\ :\ g_1(x,y,z)=0 \text{ et } g_2(x,y,z)=0\}$, où $g_1(x,y,z)=x^2+y^2-4$ et $g_2(x,y,z)=x+y+2z-2$.
Or, $\nabla g_1(x,y,z)=(2x,2y,0)$ et $\nabla g_2(x,y,z)=(1,1,2)$ sont linéairement dépendants seulement en des points $(0,0,z)$ qui ne sont pas contenus dans le cylindre.
En posant $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda\, g_1(x,y,z)-\mu\, g_2(x,y,z)$ on obtient le système suivant :
$$\begin{cases} F_x=2x-2\lambda x-\mu &=0 \qquad (1)\\ F_y=2y-2\lambda y-\mu &=0 \qquad (2)\\ F_z=2z-2-2\mu &=0 \qquad (3)\\ F_\lambda=-(x^2+y^2-4) &=0 \qquad (4)\\ F_\mu=-(x+y+2z-2) &=0 \qquad (5)\end{cases}$$
De (1) et (2) on obtient $x=\frac{\mu}{2(1-\lambda)}=y$. Supposons donc pour l'instant que $\lambda\neq1$, le cas $\lambda=1$ sera traité après. Par (3) on a
$$z=\mu+1 \qquad \text{et donc} \qquad x=y=\frac{z-1}{2(1-\lambda)}. \tag{6}$$
En récrivant (5) en fonction de z, on a
$$\frac{z-1}{1-\lambda}+2z-2=\left(2+\frac{1}{1-\lambda}\right)(z-1)=0 \qquad \Rightarrow z=1 \text{ ou } \lambda=\frac{3}{2}.$$
Quand $z=1$, il suit de (6) que $x=y=0$. Mais le point $(0,0,1)$ ne satisfait pas (4), donc ce n'est pas une solution.
Quand $\lambda=\frac{3}{2}$, (6) implique que $x=y=1-z$ et si bien que (4) devient
$$2(1-z)^2-4=2(z^2-2z-1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad z=1\pm\sqrt{2}$$
et donc $x=y=\mp\sqrt{2}$.
Lorsque $\lambda=1$, on a $\mu=0$ par (1) et (2), d'où il suit par (3) que $z=1$. De (5) on tire que $x=-y$, qui, inséré dans (4), donne
$$2y^2=4 \qquad \Rightarrow \qquad y=\pm\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad x=\mp\sqrt{2}.$$

Les solutions du système sont donc

$$(x,y,z) \in \left\{(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1+\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{2},1-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2},1),(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)\right\}$$

et on a

$$f(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1+\sqrt{2}) = f(\sqrt{2},\sqrt{2},1-\sqrt{2}) = 6 \qquad \text{et} \qquad f(-\sqrt{2},\sqrt{2},1) = f(\sqrt{2},-\sqrt{2},1) = 4.$$

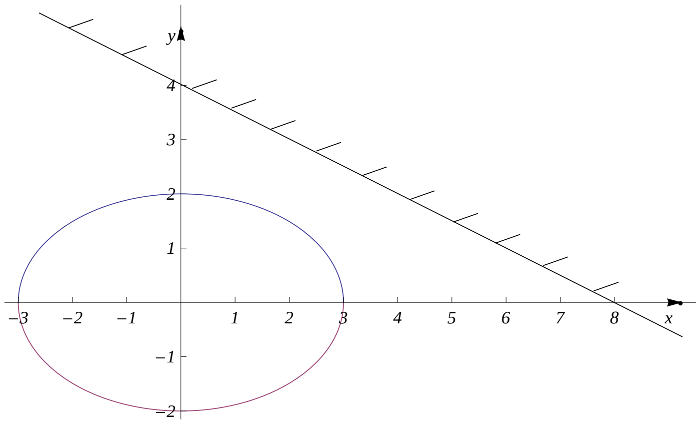
Ainsi le grand axe de l'ellipse est sur la droite d_1 et le petit axe sur la droite d_2 définies par

$$d_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = t, z = 1-t, t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = s, y = -s, z = 1, s \in \mathbb{R}\}.$$

Noter qu'on a utilisé le centre $(0,0,1)$ de l'ellipse comme point de référence.

Exercice 6.

Les régions $\{(x,y) : x+2y \geq 8\}$ et $\left\{(x,y) : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ dans lesquelles se trouvent P et Q sont un demi-plan et une ellipse centrée à l'origine respectivement (cf. figure ci-après).



Il est alors géométriquement évident que si la distance entre les points $P \in \{(x,y) : x+2y \geq 8\}$ et $Q \in \left\{(x,y) : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ est minimale, ces points se trouvent sur le bord de leur ensemble respectif.

En écrivant $P = (x,y)$ et $Q = (u,v)$, le problème revient à trouver le minimum de la fonction

$$f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$$

sous les conditions

$$g_1(x,y,u,v) = x+2y-8 = 0 \qquad \text{et} \qquad g_2(x,y,u,v) = 4u^2+9v^2-36 = 0\,.$$

Les vecteurs $\nabla g_1(x,y,u,v) = (1,2,0,0)$ et $\nabla g_2(x,y,u,v) = (0,0,8u,18v)$ sont linéairement indépendants sur $\Gamma = \{(x,y,u,v) : g_1(x,y,u,v) = 0 \text{ et } g_2(x,y,u,v) = 0\}$. En effet, si $\alpha\nabla g_1 + \beta\nabla g_2 = 0$, il est immédiat que $\alpha = 0$. Si $\beta \neq 0$ alors $u = v = 0$ mais $g_2(x,y,0,0) = -36 \neq 0$ et donc $(x,y,0,0) \notin \Gamma$.

On peut donc utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v,\lambda,\mu) &= f(x,y,u,v) - \lambda\, g_1(x,y,u,v) - \mu\, g_2(x,y,u,v) \\ &= (x-u)^2 + (y-v)^2 - \lambda(x+2y-8) - \mu(4u^2+9v^2-36) \end{aligned}$$

d'où le système

$$\begin{cases} F_x = 2(x-u) - \lambda & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 2(y-v) - 2\lambda & = 0 \qquad (2) \\ F_u = -2(x-u) - 8\mu u & = 0 \qquad (3) \\ F_v = -2(y-v) - 18\mu v & = 0 \qquad (4) \\ F_\lambda = -(x+2y-8) & = 0 \qquad (5) \\ F_\mu = -(4u^2+9v^2-36) & = 0 \qquad (6) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, alors les équations (1) à (4) impliquent que $x = u$, $y = v$. Mais de (5) on a $v = 4 - \frac{u}{2}$ et en remplaçant ceci dans (6), on obtient $\frac{25}{4}u^2 - 36u + 108 = 0$ qui n'admet pas de solution réelle. On a donc $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$.
Alors (1) et (2) impliquent que $2(x-u) = y - v$ et en utilisant cette relation dans (3) et (4) on trouve que $8u = 9v$.
On reporte ces valeurs dans (6) qui devient

$$\frac{100}{9}u^2 - 36 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = \pm\frac{9}{5} \qquad \Rightarrow \qquad v = \pm\frac{8}{5}\,.$$

A partir de $2(x-u) = y - v$ on trouve maintenant $2x - y = \pm\frac{18}{5} \mp \frac{8}{5} = \pm 2 \;\Rightarrow\; y = 2x \mp 2$.
Avec ceci l'équation (5) s'écrit

$$x + 4x \mp 4 - 8 = 5x - \begin{Bmatrix} 12 \\ 4 \end{Bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{5} \text{ ou } x = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{14}{5} \text{ ou } y = \frac{18}{5}.$$

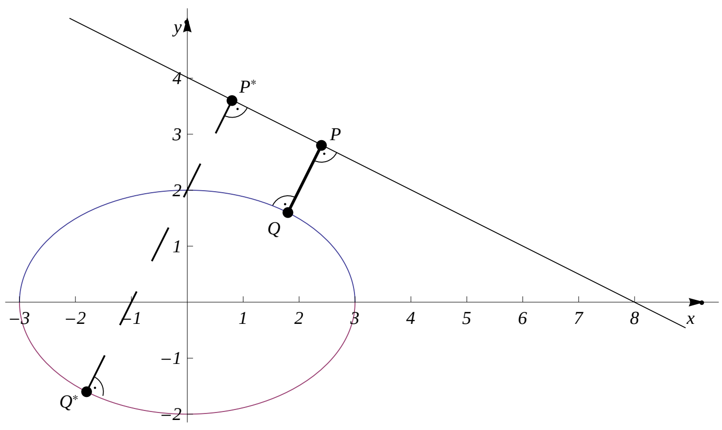
Les deux solutions du système sont alors

$$x = \frac{12}{5}, \quad y = \frac{14}{5}, \quad u = \frac{9}{5}, \quad v = \frac{8}{5} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{18}{5}, \quad u = -\frac{9}{5}, \quad v = -\frac{8}{5}\,.$$

La distance entre $P = \left(\frac{12}{5}, \frac{14}{5}\right)$ et $Q = \left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ et celle entre $P^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{18}{5}\right)$ et $Q^* = \left(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ vaut $\frac{13}{\sqrt{5}}$. Ainsi la distance est minimale entre P et Q.

<u>*Interprétation géométrique*</u>

On constate que le vecteur $\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{5}(1,2)$ est orthogonal à la droite $g_1(x,y) = x + 2y - 8 = 0$ en P et à l'ellipse $g_2(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ en Q parce que $\overrightarrow{PQ}$ est parallèle à $\nabla g_1(P) = (1,2)$ et à $\nabla g_2(Q) = \frac{2}{5}\cdot(1,2)$.
L'autre solution $P^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{18}{5}\right)$ et $Q^* = \left(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ réalise un point-selle de f (cf. figure ci-dessous). En fait, il n'existe pas de distance maximale.



Exercice 7.

Q1 : Soit l'équation différentielle

$$y'\,(y + x^2 y) = x$$

pour $x \in \mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$. Alors la solution $y(x)$ vérifie

- ☐ $y(1) = \sqrt{4 + 2\,\ln(2)}$
- ☐ $y(1) = 2 + \sqrt{\ln(2)}$
- ■ $y(1) = \sqrt{4 + \ln(2)}$
- ☐ $y(1) = -\sqrt{4 + \ln(2)}$

On peut récrire l'équation sous la forme

$$\frac{dy}{dx} \cdot y\,(1 + x^2) = x$$

et on peut donc séparer les variables. On obtient

$$y\,dy = \frac{x}{1 + x^2}\,dx$$

et en intégrant on trouve

$$\frac{1}{2} y(x)^2 = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $y(0) = 2$ on a $C = 2$ et donc

$$y(x) = \sqrt{\ln(1 + x^2) + 4}\,.$$

Ainsi $y(1) = \sqrt{\ln(2) + 4}\,$.

Q2 : Soit l'équation différentielle

$$y' \sin(x) + y \cos(x) + \sin(2x) = 0$$

pour $x \in \left]0, \pi\right[$. Alors la solution générale est

- ☐ $y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ■ $y(x) = \frac{\cos(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\cos(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = e^{-\ln(\sin(x))} \cos(2x) + \frac{C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire. La solution générale est donc de la forme

$$y(x) = y_{\text{part}}(x) + C\,y_{\text{hom}}(x)$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver $y_{\text{hom}}(x)$ il faut résoudre l'équation homogène

$$y' \sin(x) + y \cos(x) = 0\,.$$

La séparation des variables donne

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx$$

et en intégrant on obtient

$$\ln\bigl(|y(x)|\bigr) = -\ln\bigl(|\sin(x)|\bigr) + \tilde{C}$$

avec $\tilde{C} \in \mathbb{R}$, et donc

$$y_{\text{hom}}(x) = \frac{C}{\sin(x)}\,.$$

avec $C \in \mathbb{R}$.
Ensuite on fait la variation de la constante qui donne

$$\left(C'(x)\frac{1}{\sin(x)}\right)\sin(x) + \sin(2x) = 0\,,$$

d'où il suit que

$$C'(x) = -\sin(2x)$$

et donc $C(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$. Finalement on a

$$y_{\text{part}}(x) = \frac{\frac{1}{2}\cos(2x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin(x)}\,.$$

$\bigl($*Rappel:* $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1.\bigr)$
La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{\cos(x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin(x)} + C\,\frac{1}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)^2 + \left(-\frac{1}{2} + C\right)}{\sin(x)}\,.$$

Puisque $C \in \mathbb{R}$ est arbitraire on peut récrire la solution comme

$$y(x) = \frac{\cos(x)^2 + C}{\sin(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}\,.$$

Q3 : Soit l'équation différentielle

$$x\,y' - y = x\,\cos\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

pour $x \in\,]0, \infty[$ avec $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Alors

- ■ $y(x) = x\arctan\bigl(\ln(x) + 1\bigr)$
- □ $y(x) = x\arctan\bigl(\frac{1}{x^2}\bigr)$
- □ $y(x) = \frac{1}{x}\arctan\bigl(\ln(x) + 1\bigr)$
- □ $y(x) = x\arctan\bigl(\ln(x)^2 + 1\bigr)$

Remarque : effectuer le changement de variables $y(x) = x\,v(x)$

On peut récrire l'équation sous la forme

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\Big(\frac{y}{x}\Big)^2,$$

ce qui est une équation différentielle homogène. On pose $y(x) = x\,v(x)$ et l'on obtient

$$v + x\,v' = v + \cos(v)^2$$

ou

$$x\,v' = \cos(v)^2.$$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{dv}{\cos(v)^2} = \frac{dx}{x}$$

et par intégration

$$\tan(v) = \ln(x) + C$$

et donc

$$y(x) = x\ \arctan\big(\ln(x) + C\big)$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Avec la condition initiale on trouve

$$y(1) = \arctan(C) = \frac{\pi}{4}$$

et donc $C = 1$. La solution recherchée est alors

$$y(x) = x\ \arctan\big(\ln(x) + 1\big).$$

Exercice 8.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, car la fonction ρ est continue sur $\mathbb{R}^2$, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui implique que la fonction $2x\,h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right)$ est continue sur le demi-plan à droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$, et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 2x\,h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right) = 0.$$

En particulier on a donc que $f(0, 0) = 1$. La fonction ρ a comme graphe le cône comme discuté à plusieurs occasions pendant les cours (voir le manuscrit). En $(0, 0)$ ρ admet des dérivées directionnelles unilatérales égales à -1 suivant tout vecteur unitaire $\mathbf{e} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ car on a $g(t) = \rho(t\cos(\phi), t\sin(\phi)) = 1 - |t|$ et donc

$$\lim_{t\to0+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to0+} \frac{-|t|}{t} = -1.$$

Par la définition de la fonction h, la fonction $2x\,h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right)$ est non-nulle uniquement si $-1 < \frac{y}{x^2} - 2 < 1$, c.-à-d., puisque $x > 0$, pour les points (x, y) du premier quadrant qui satisfont $1 < \frac{y}{x^2} < 3$, autrement dit, donné $x > 0$ pour y tel que $x^2 < y < 3x^2$. Ceci implique que pour des points de la forme $(x, y) = t\mathbf{e} = (t\cos(\phi), t\sin(\phi))$ avec $\mathbf{e} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ un vecteur unitaire du du premier quadrant, c.-à-d. pour $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$, on devrait avoir que

$$t^2\cos(\phi)^2 < t\sin(\phi) < 3t^2\cos(\phi)^2,$$

pour que la fonction $2x\,h\left(\dfrac{y}{x^2} - 2\right)$ prenne des valeurs non nulles. Cependant, la deuxième inégalité est toujours violée si t est suffisamment petit. Ceci veut dire que, donné ϕ, les points $(t\cos(\phi), t\sin(\phi))$ se trouvent, pour t suffisamment petit, tous à l'extérieur de la région où la fonction $2x\,h\left(\dfrac{y}{x^2} - 2\right)$ est non nulle. En conclusion, la dérivée directionnelle de la fonction f en $(0, 0)$ suivant tout vecteur unitaire $\mathbf{e}$ est donc bien égale à -1. Par contre le long du chemin $c\colon\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, 2t^2)$ on a pour $t > 0$, t suffisamment petit:

$$(f \circ c)(t) = 1 - \sqrt{t^2 + t^4} + 2t \geq 1 - \sqrt{t^2 + t^2} + 2t = 1 - \sqrt{2}t + 2t > 1.$$

La fonction f admet donc dans tout voisinage de $(0, 0)$ des valeurs strictement plus petit et plus grand que $f(0, 0) = 1$. Cependant, malgré cela, il ne s'agit pas d'un point selle, car f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. En effet, par définition un point selle doit être un point stationnaire de la fonction. La figure suivante montre le graphe de la fonction f au dessus du rectangle $[0, 0.1] \times [0, 0.01] \subset \mathbb{R}^2$ du premier quadrant.