Analyse avancée II – Série 12A

Échauffement. (Volume et surface d'un cylindre)

Utiliser les deux méthodes vues au cours pour déterminer le rayon r et la hauteur h qui maximisent le volume V d'un cylindre de surface S donnée.

Exercice 1. (Extremums liés)

Trouver les valeurs maximale et minimale des fonctions suivantes sous les contraintes données.

i) $f(x, y) = x^3 + y^3, \quad x^4 + y^4 = 32$

ii) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x - y = 1$

Exercice 2. (Extremums liés)

Trouver les points de cote z maximale et minimale sur la surface $4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz - 4x = 1$.

Exercice 3. (Extremums absolus)

i) Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$ sur le disque fermé $x^2 + y^2 \leq 32$.
Comparer les résultats avec l'Ex. 5 *ii)* de la Série 11.

ii) Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - \frac{5}{4}$ sur la boule fermée $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Exercice 4. (Un peu de géométrie, I)

i) Déterminer parmi les triangles rectangles ayant la même aire A, celui qui a la plus petite hypothénuse.

ii) Le cône $z^2 = x^2 + y^2$ est coupé par le plan $z = 1 + x + y$. Trouver le point qui se trouve dans l'intersection du cône et du plan et qui est le plus près de l'origine.

Exercice 5. (Un peu de géométrie, II)

Trouver les axes de l'ellipse déterminée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et du plan d'équation $x + y + 2z = 2$.

Exercice 6. (Un peu de géométrie, III)

Déterminer les points $P \in \{(x, y) : x + 2y \geq 8\}$ et $Q \in \left\{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ pour lesquels la distance de P à Q est minimale.
Donner une justification géométrique à votre réponse.

Ex. 7 au verso.

Exercice 7. (QCM : révision équations différentielles)

Q1 : Soit l'équation différentielle $y'\,(y+x^2y) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$. Alors la solution $y(x)$ vérifie

- ☐ $y(1) = \sqrt{4 + 2\,\ln(2)}$
- ☐ $y(1) = 2 + \sqrt{\ln(2)}$
- ☐ $y(1) = \sqrt{4 + \ln(2)}$
- ☐ $y(1) = -\sqrt{4 + \ln(2)}$

Q2 : Soit l'équation différentielle $y' \sin(x) + y \cos(x) + \sin(2x) = 0$ pour $x \in \,]0, \pi[$. Alors la solution générale est

- ☐ $y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \frac{\cos(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\cos(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = e^{-\ln(\sin(x))} \cos(2x) + \frac{C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Q3 : Soit l'équation différentielle $x\,y' - y = x \left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$ pour $x \in \,]0, \infty[$ avec $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Alors

- ☐ $y(x) = x \arctan\big(\ln(x) + 1\big)$
- ☐ $y(x) = x \arctan\big(\frac{1}{x^2}\big)$
- ☐ $y(x) = \frac{1}{x} \arctan\big(\ln(x) + 1\big)$
- ☐ $y(x) = x \arctan\big(\ln(x)^2 + 1\big)$

Rappel : effectuer le changement de variables $y(x) = x\,v(x)$.

Exercice 8. (Dérivée directionnelle et nature d'un point)

Soit la fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1\,, \\ 0 & \text{si } |x| > 1\,, \end{cases}$$

la fonction $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\rho(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, et la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) + 2x\,h\left(\dfrac{y}{x^2} - 2\right) & \text{si } x > 0\,, \\ \rho(x, y) & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Montrer que pour tout vecteur unitaire $\mathbf{e}$ la dérivée directionnelle unilatérale de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\mathbf{e}$ vaut -1, mais que f n'admet pas de maximum local en $(0, 0)$.