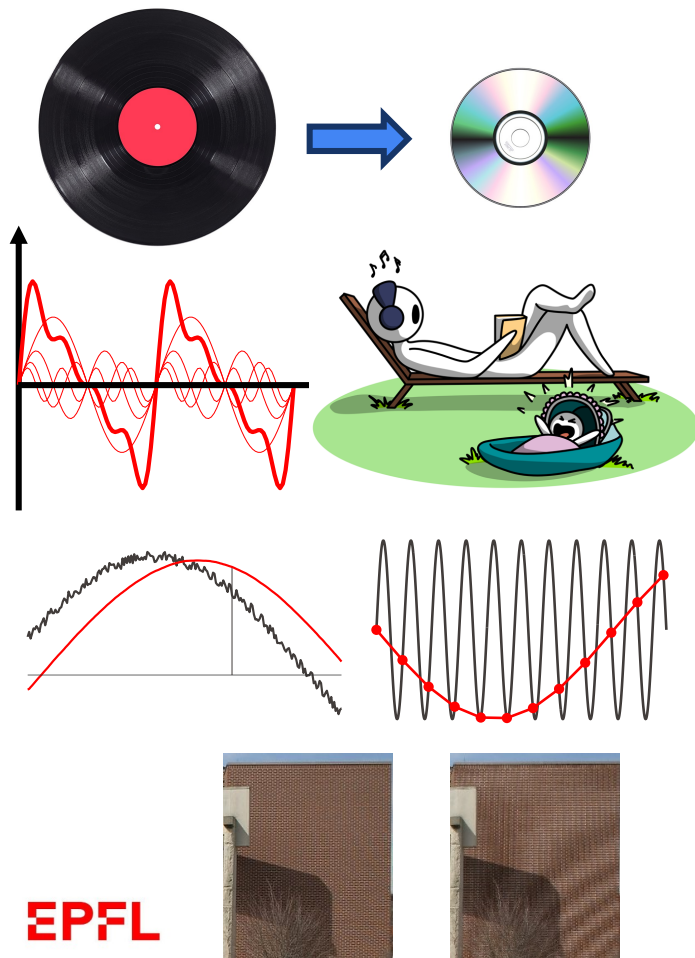


## Information, Calcul et Communication

### CS-119(k) ICC – Théorie Semaine 10

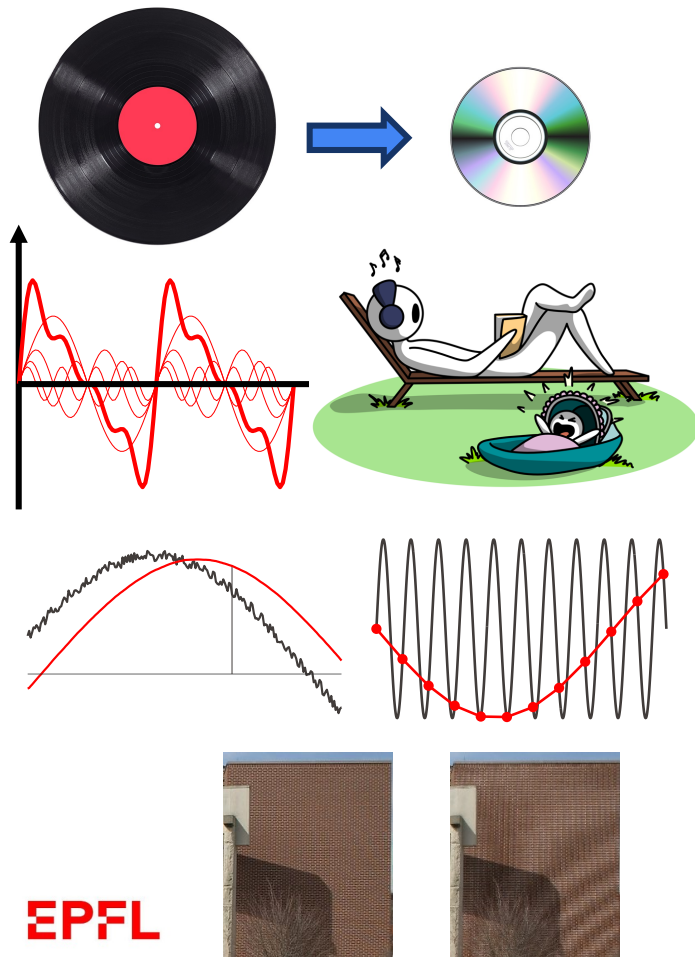
Rafael Pires  
[rafael.pires@epfl.ch](mailto:rafael.pires@epfl.ch)

# Précédemment, dans ICC-T 9



- Un **signal** est une **fonction**  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Un signal particulier : la **sinusoïde**  $X(t) = a \cdot \sin(2\pi ft + \delta)$
- Un paramètre particulièrement important : la **fréquence**  $f$
- Joseph Fourier : **Tout signal est une somme de sinusoïdes !**
- La **bande passante** d'un signal est sa plus haute fréquence
- Deux techniques de traitement des signaux :
  - **Le filtrage**, pour supprimer ou atténuer les hautes fréquences (filtre **passé-bas**)
  - **L'échantillonnage**, pour numériser le signal

# Précédemment, dans ICC-T 9



- Soit  $X(t) = \sin(3\pi t) + \cos(8\pi t)$ , quelle est la bande passante  $B_X$  ?
  - $B_X = \max(f_1, f_2) = \max(3/2, 4) = 4$
- Soit  $X(t)$  un signal de bande passante  $B_X$ , quelle est la bande passante de  $X(Ct)$ ,  $C > 0$  ?
  - $C \cdot B_X$
- Soit  $X(t)$  et  $Y(t)$  deux signaux de bande passante  $B_X$  et  $B_Y$  resp., quelle est la bande passante  $B_{XY}$  de  $X(t) + Y(t)$  ?
  - $B_{XY} \leq \max(B_X, B_Y)$

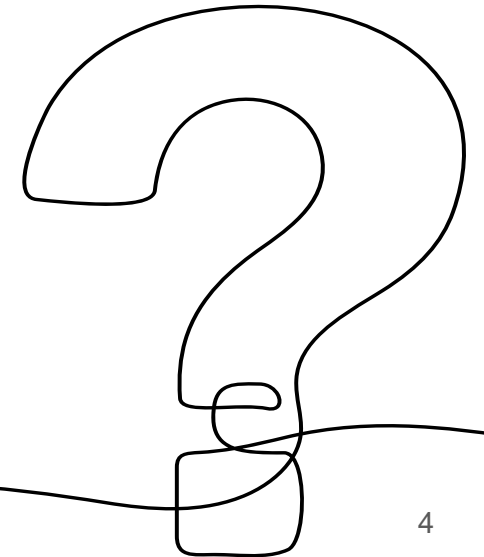
# Question

Soient  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes  $T_1$  et  $T_2$ , respectivement. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont des nombres entiers, est-ce que le signal  $X_1(t) + X_2(t)$  est périodique? Si oui, avec quelle période?

$$X_1(t) + X_2(t) = X_1(t + N) + X_2(t + N)$$

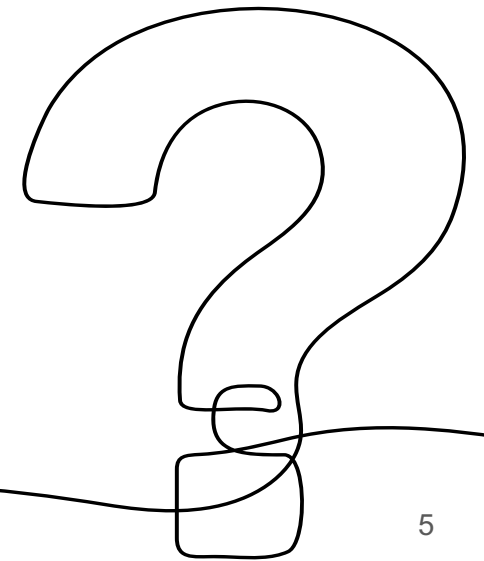
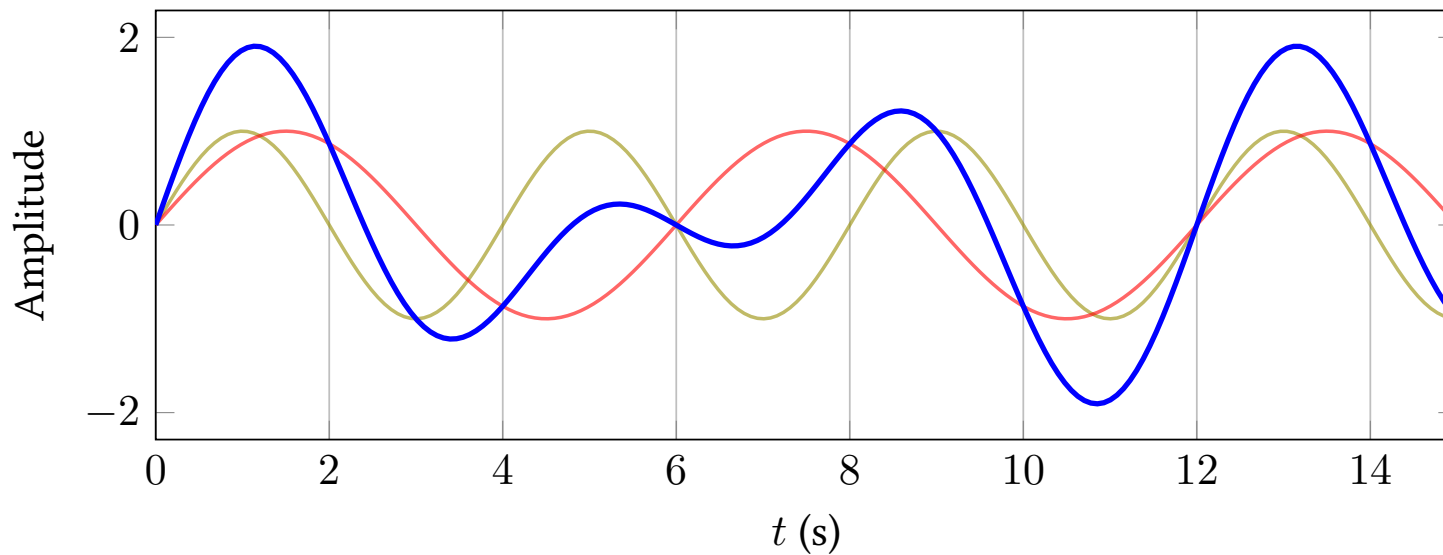
$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$X_1(t)$	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
$X_2(t)$	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	A	B	C

$$N = \text{ppmc}(T_1, T_2) = \text{ppmc}(4, 6) = 12$$

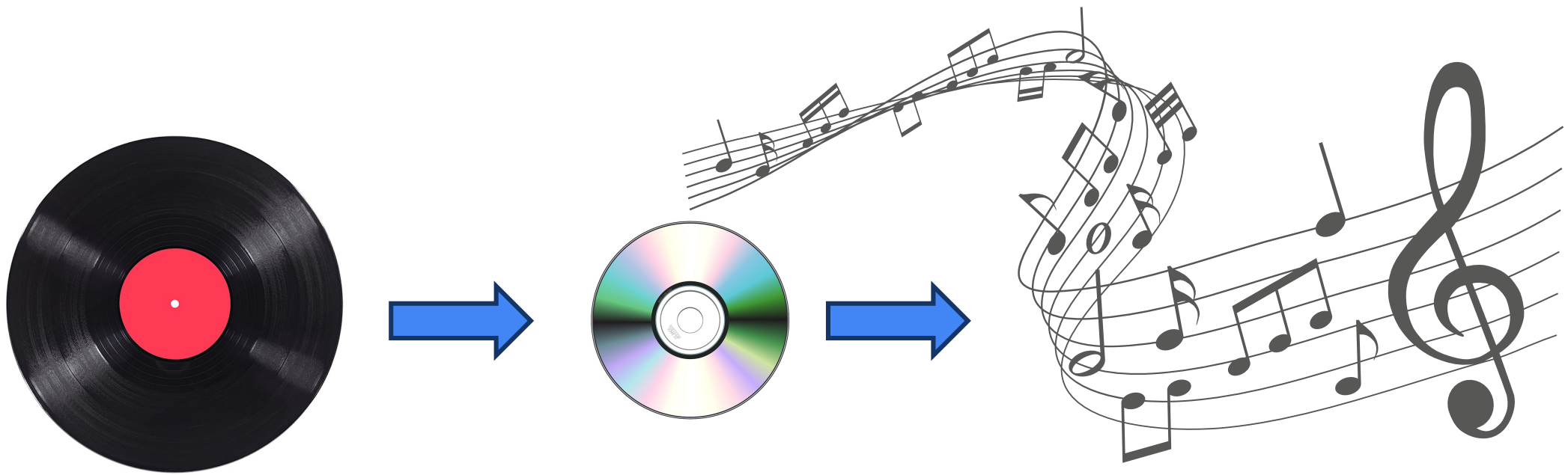


# Question

Soient  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes  $T_1$  et  $T_2$ , respectivement. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont des nombres entiers, est-ce que le signal  $X_1(t) + X_2(t)$  est périodique? Si oui, avec quelle période?

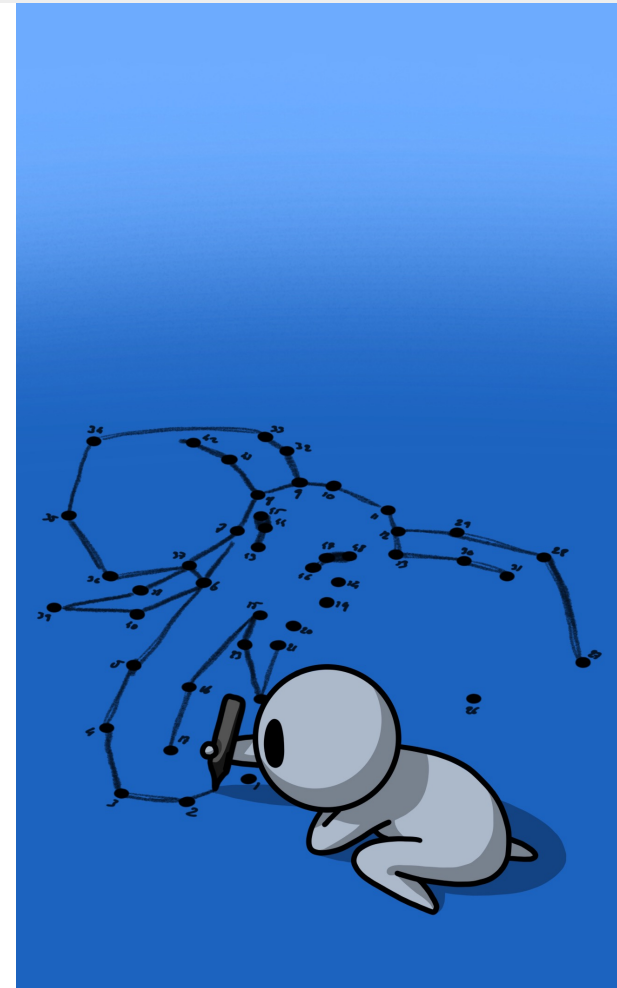


# Échantillonnage et reconstruction de signaux



# Aujourd'hui

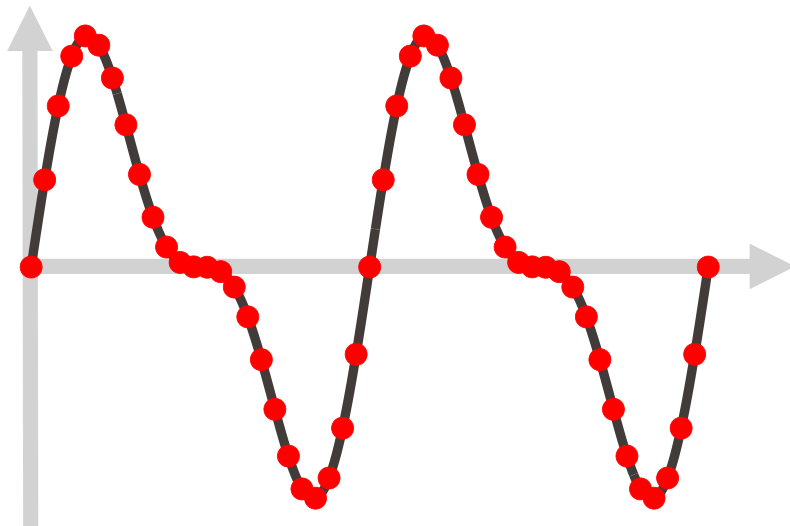
- **Reconstruction de signaux**
- Le théorème d'échantillonnage
- Filtrer avant d'échantillonner



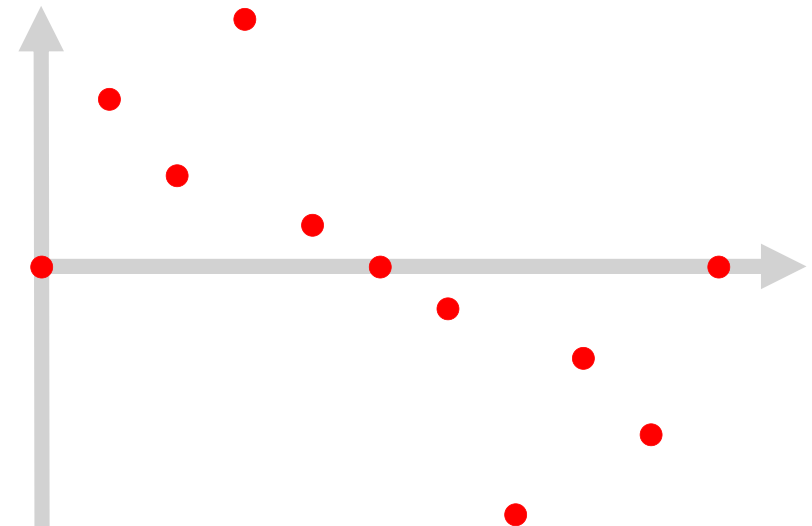
# Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal  $(X(t), t \in \mathbb{R})$  à partir de sa version échantillonnée  $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$  ?

- Dans certains cas, c'est assez clair...



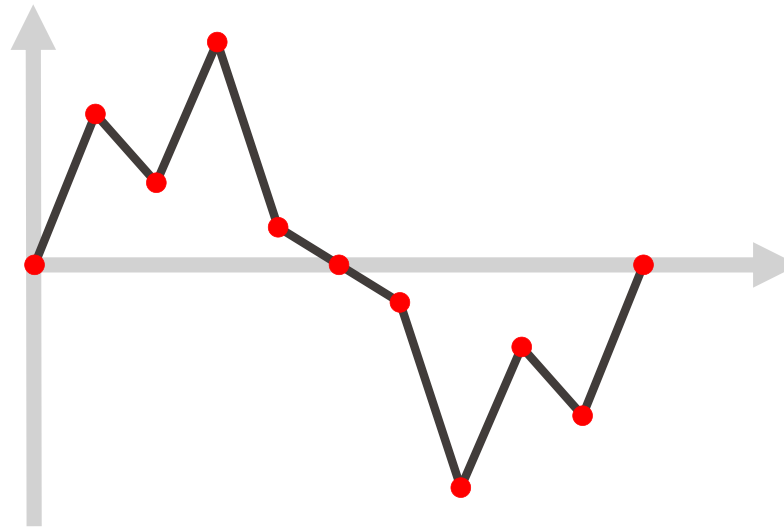
- Dans d'autres, ça l'est un peu moins !



# Tentatives d'interpolation

Premières tentatives pour **interpoler** un signal :

1. Relier les points par des **segments de droites** :



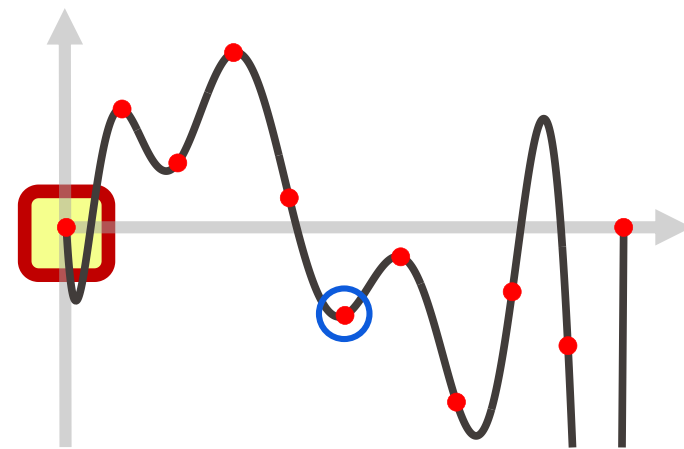
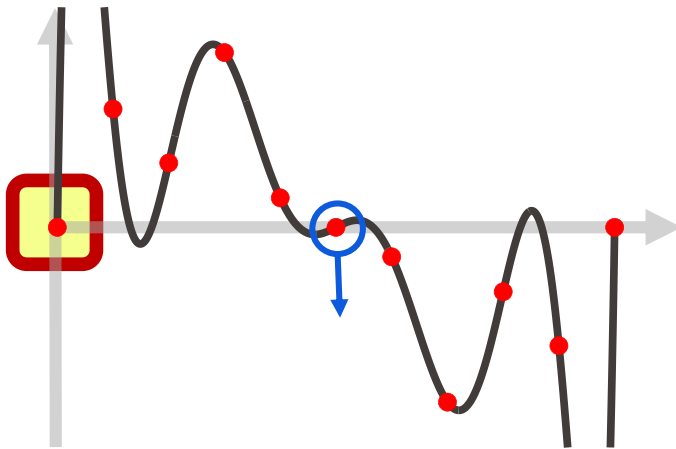
- Un défaut principal : la "courbe" obtenue **n'est pas régulière**.

# Tentatives d'interpolation

2. Trouver un **polynôme** qui passe par tous les points.

Deux défauts principaux :

- Avec  $N$  points, il faut trouver un polynôme de degré  $N - 1$  : la procédure est **compliquée** !
- Elle est également **instable** : si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.



# Tentatives d'interpolation

3. De manière générale, une **formule d'interpolation** pour  $X(t)$  s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \text{ et } F(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad (k \text{ entier non nul})$$

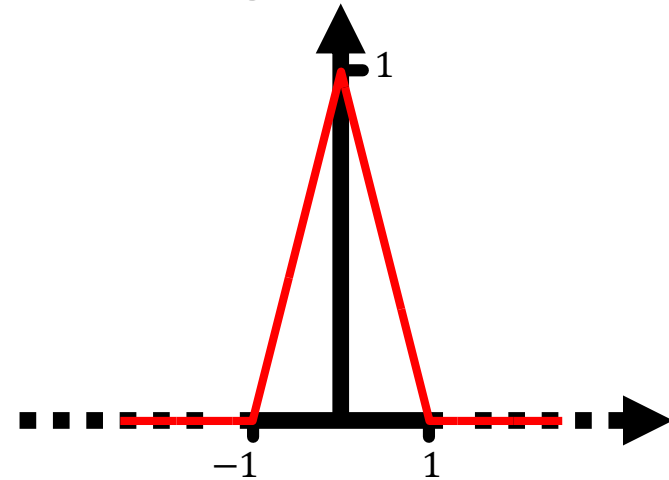
Cette condition implique en particulier que :  $X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$

La question est maintenant : **quelle fonction  $F$  choisir ?**

# Formule d'interpolation avec $\text{tri}(t)$

- La fonction  $F$  qui permet de relier les points par des segments est :

$$F(t) = \text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$



$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

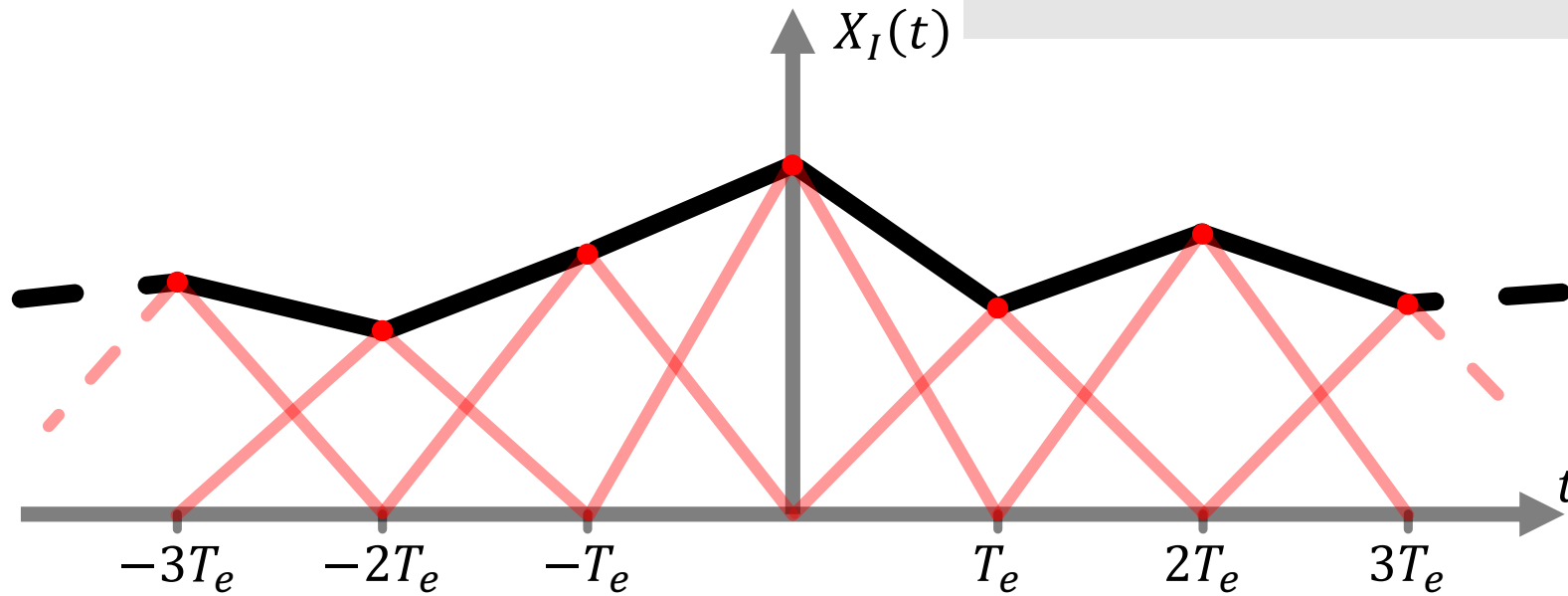
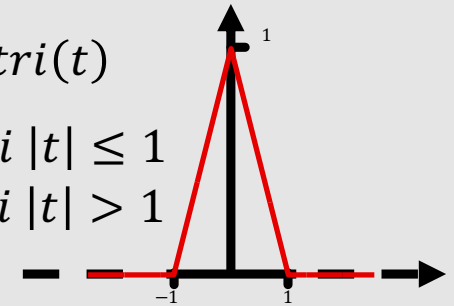
# Exemple

## Formule d'interpolation

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

## Fonction $tri(t)$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$



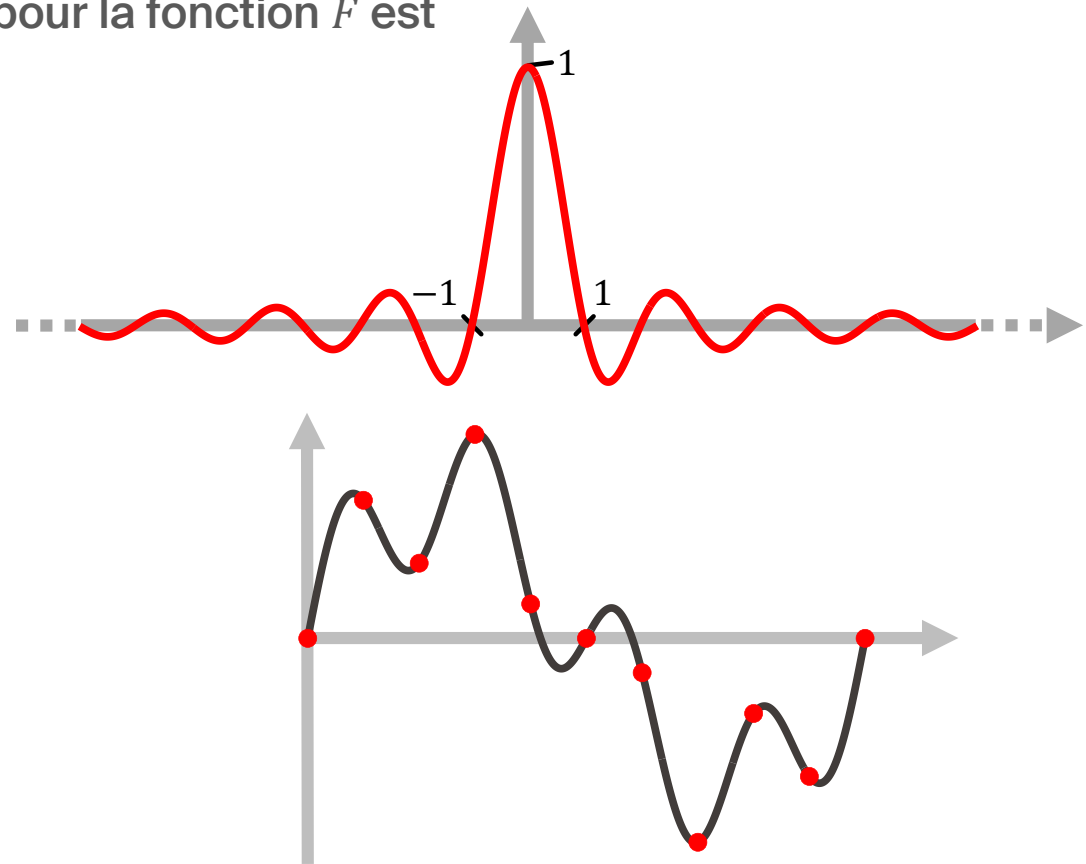
# Formule d'interpolation avec $\text{sinc}(t)$

- Il se trouve qu'un bien meilleur choix pour la fonction  $F$  est

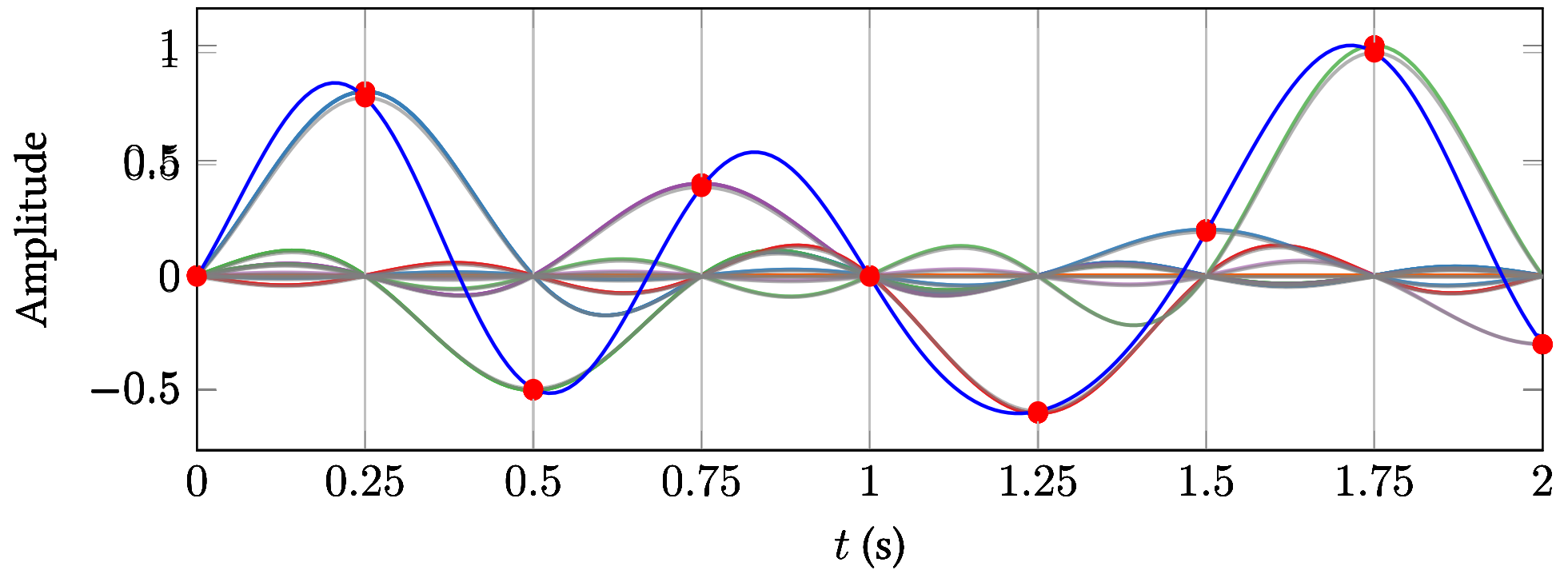
$$F(t) = \text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui donne dans notre exemple :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



# Formule d'interpolation avec $\text{sinc}(t)$



# Formule d'interpolation

- À partir des échantillons  $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$ , nous construisons donc le signal interpolé  $X_I(t)$  grâce à la **formule d'interpolation** :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

- Il nous reste maintenant une question cruciale à résoudre :

**Quand est-ce que  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ?**

# Aujourd'hui

- Reconstruction de signaux
- **Le théorème d'échantillonnage**
- Filtrer avant d'échantillonner

# Le théorème d'échantillonnage : historique



Edmund Taylor Whittaker

1873 - 1956



Harry Nyquist

1889 - 1979



Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov

1908 - 2005



Herbert Raabe

1909 - 2004



Claude Edwood Shannon

1916 - 2001

# Enoncé du théorème d'échantillonnage

## Nyquist-Shannon

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$  un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut  $f_{max}$
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$  le même signal échantillonné avec une période  $T_e$   
(et soit  $f_e$  la fréquence correspondante :  $f_e = 1/T_e$ )
- On pose encore  $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$  pour  $t \in \mathbb{R}$

Alors :

### Condition de Nyquist

- Si  $f_e > 2f_{max}$  alors  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , alors  $f_e \geq 2f_{max}$

Si  $f_e < 2f_{max}$ , alors  $\exists t \in \mathbb{R}$  t.q.  $X_I(t) \neq X(t)$

# Illustration du théorème en pratique

- Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

- La version échantillonnée de ce signal est :  $X(mT_e) = \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e)$  et la formule d'interpolation devient :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

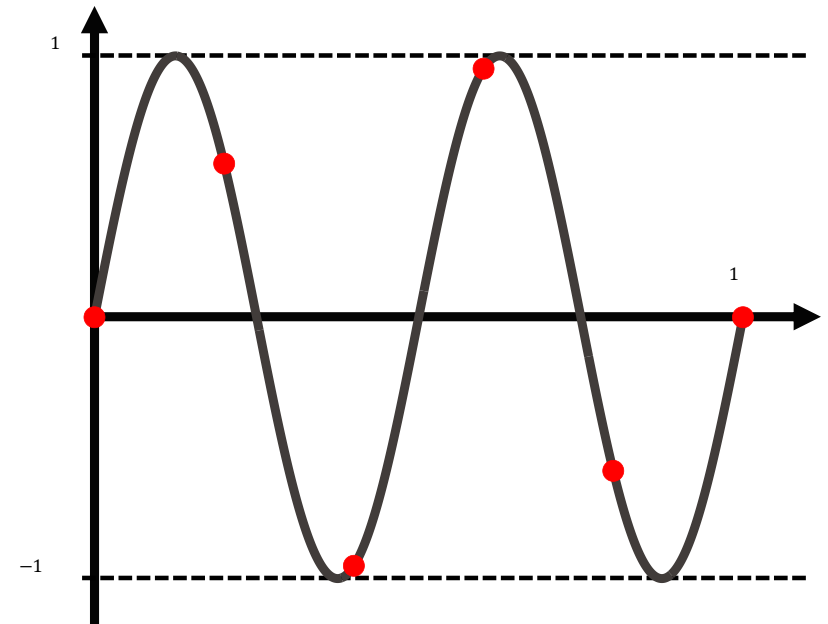
- En pratique, on se limite à quelques termes de la somme :

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

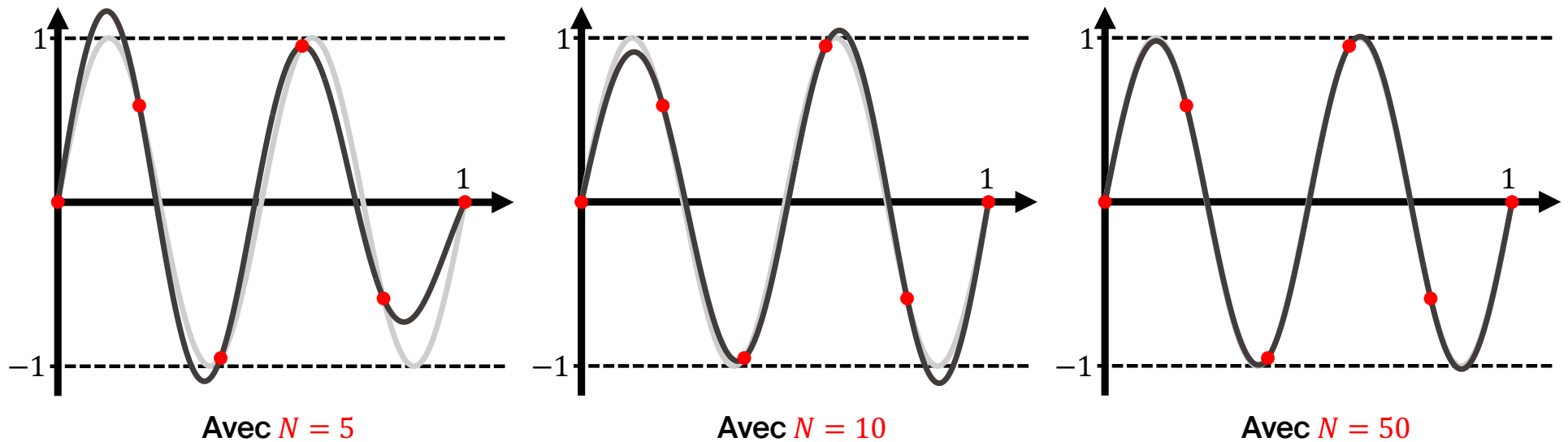
# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule  
d'interpolation pour  $f = 2 \text{ Hz}$  et  
 $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :



## Illustration du théorème en pratique

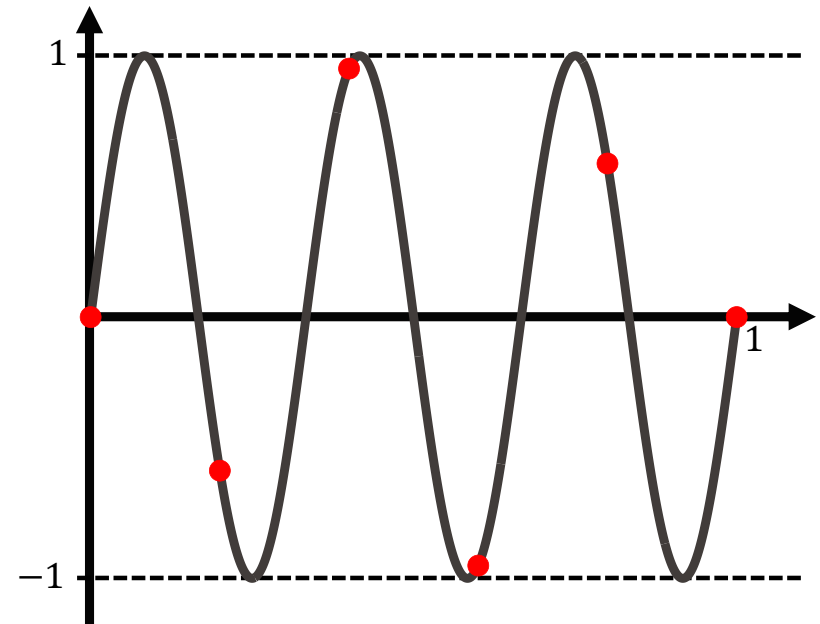


Si  $f_e > 2f$ , la reconstruction est bonne pour grand  $N$ .

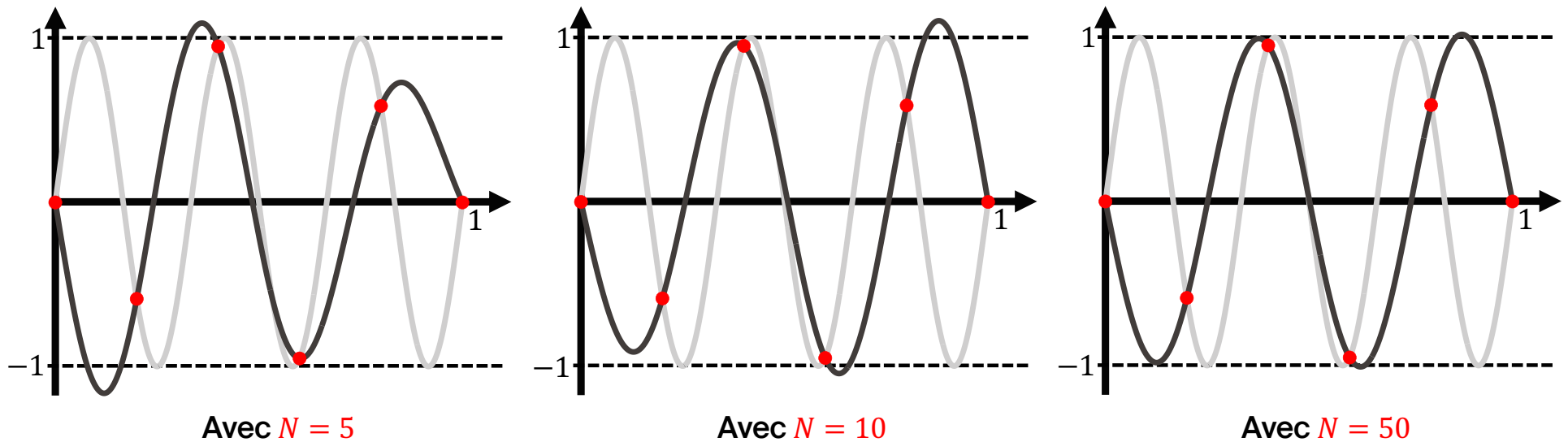
# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule  
d'interpolation pour  $f = 3 \text{ Hz}$  et  
 $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :



# Illustration du théorème en pratique



Ici, par contre,  $f_e < 2f$  : on a un problème...

**Et si  $f_e = 2f$  ?**

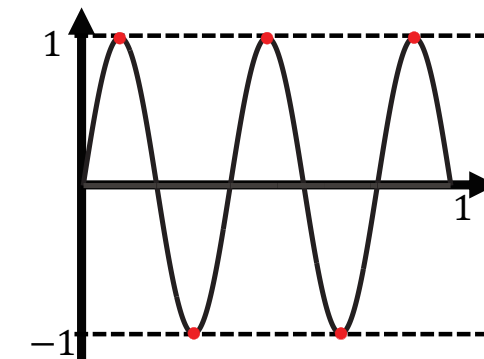
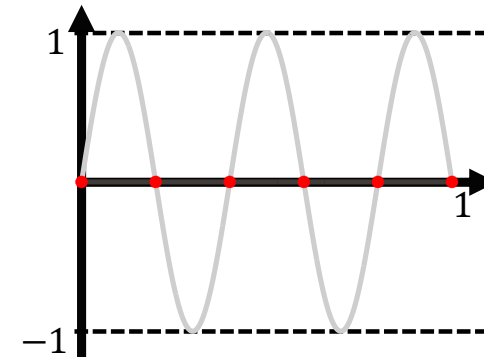
## Illustration du théorème en pratique : $f_e = 2f_{max}$

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2.5 \text{ Hz}$  et  $f_e = 5 \text{ Hz}$  (donc  $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ) :

Reconstruction **nulle**, **parfaite**, ou **atténuée** !

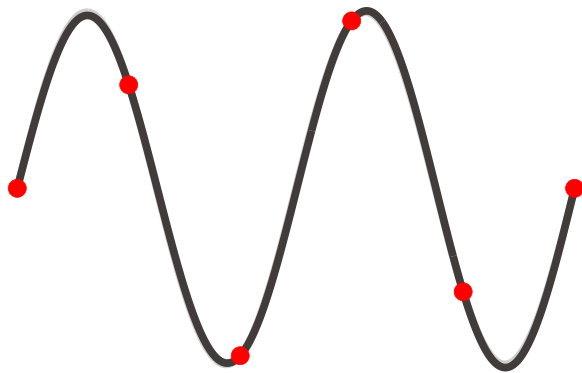
Ici aussi, on a un problème...



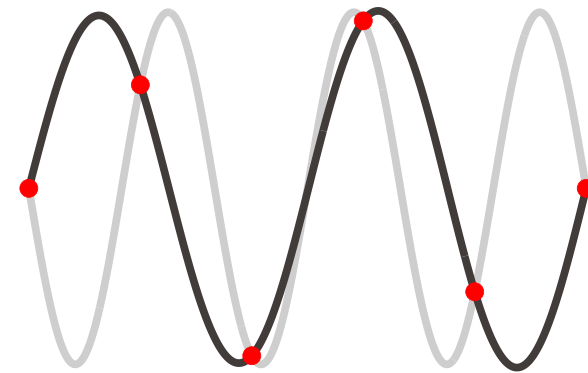
# Essayons de mieux comprendre cette illustration

Rappel : la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5 \text{ Hz}$ .

- Quand  $f = 2 \text{ Hz}$ , la reconstruction est bonne.



- Quand  $f = 3 \text{ Hz}$ , la reconstruction est mauvaise.



- Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !
- La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite, mais pas le signal d'origine (en transparence)

# Illustration : conclusion

Rappel : la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5 \text{ Hz}$ .

- A partir des seules valeurs échantillonnées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de  $f = 2 \text{ Hz}$  ou de  $f = 3 \text{ Hz}$ .
- Dans une telle situation, notre formule d'interpolation choisit la fréquence la plus basse, i.e.,  $f = 2 \text{ Hz}$ .
- Donc, si on sait dès le départ que la fréquence  $f$  de la sinusoïde d'origine est plus petite que  $\frac{f_e}{2} = 2.5 \text{ Hz}$ , alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- Si par contre la fréquence  $f$  est plus grande que  $\frac{f_e}{2} = 2.5 \text{ Hz}$ , alors la formule d'interpolation choisit la mauvaise fréquence :  $\tilde{f} = f_e - f$ . C'est l'effet stroboscopique que nous avons vu dans une vidéo précédente.

## Pourquoi $f_{max}$ dans le théorème ?

- Dans l'illustration précédente, on avait affaire à un signal  $X(t)$  avec une seule fréquence  $f$ .
- On a vu dans ce cas que  $f_e > 2f$  est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.

Et si maintenant le signal  $X(t)$  contient **deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$**  ?

- Dans ce cas, il suffit que  $f_e > 2f_1$  **et**  $f_e > 2f_2$  pour que le signal soit bien reconstruit, i.e., que  $f_e > 2 \max\{f_1, f_2\}$ .
- En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc à la condition
$$f_e > 2f_{max}$$
.

# Enoncé du théorème d'échantillonnage

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$  un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut  $f_{max}$
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$  le même signal échantillonné avec une période  $T_e$  (et soit  $f_e$  la fréquence correspondante :  $f_e = 1/T_e$ )
- On pose encore  $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$  pour  $t \in \mathbb{R}$

Alors :

- Si  $f_e > 2f_{max}$ , alors  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , alors  $f_e \geq 2f_{max}$

# Un lemme utile pour la démonstration

**Lemme** : La bande passante du signal  $X_I(t)$  est inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ .

Démonstration du lemme : Remarquez tout d'abord que

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi t \cdot f) \cdot df$$

*i.e.*, le signal  $\text{sinc}(t)$  est une somme (infinie) de sinusoides de fréquences  $f$  allant de 0 à  $\frac{1}{2}$ .

**Sa bande passante vaut donc  $\frac{1}{2}$ .**

La bande passante signal  $\text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right) = \text{sinc}(f_e t - m)$  vaut donc  $\frac{f_e}{2}$ .

Et la bande passante du signal  $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$  est donc inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ .

QED

# Idée de la démonstration du théorème

Démontrons d'abord la **seconde implication** (plus facile) :

$$\text{Si } X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ alors } f_e \geq 2f_{max}$$

- Si  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , alors ils ont même bande passante (forcément : ce sont les mêmes signaux).
- Or d'après le lemme, la bande passante du signal  $X_I(t)$  est inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ .
- La bande passante  $f_{max}$  du signal  $X(t)$  est donc également inférieure ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ . QED

# Idée de la démonstration du théorème

Passons maintenant à la première implication :

Si  $f_e > 2f_{max}$ , alors  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- L'hypothèse et le lemme impliquent que les signaux  $X(t)$  et  $X_I(t)$  ont tous deux une bande passante plus petite (ou égale) à  $f_e/2$ .
- On a vu d'autre part que  $X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .
- On peut montrer le résultat suivant :  
Deux signaux de bande passante plus petite (ou égale) à  $\frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$   
et qui coïncident aux points  $nT_e, n \in \mathbb{Z}$ , coïncident en fait partout !
- En conclusion, sous l'hypothèse effectuée, on a bien  $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .  
«QED»

## Question

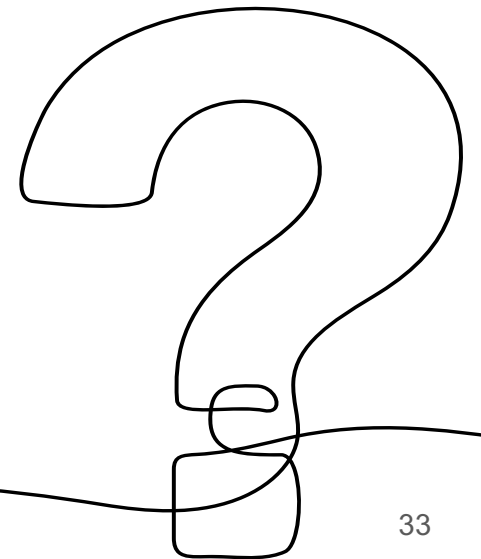
On considère le signal suivant:

$$x(t) = 3 \sin\left(\frac{10\pi}{3}t\right) + 2 \sin(6\pi t) + \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

On souhaite échantillonner ce signal à une fréquence  $f_e$  (en Hz), puis le reconstruire parfaitement par interpolation *sinc*.

Quelle(s) est(sont) la(les) fréquence(s) d'échantillonnage admissible(s) parmi les suivantes ?

- A. 6 Hz
- B. 3 Hz
- C. 8 Hz
- D. 10 Hz



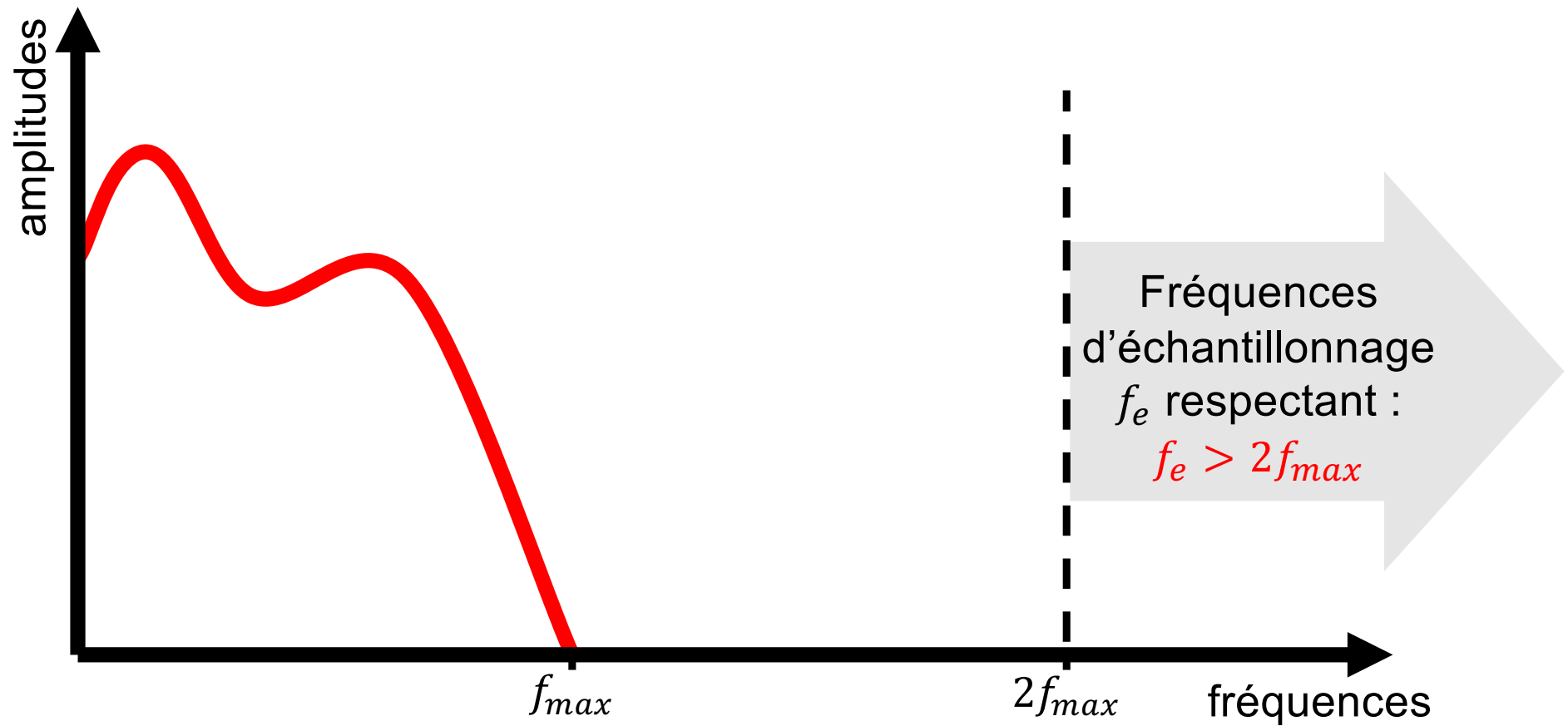
# Aujourd'hui

- Reconstruction de signaux
- Le théorème d'échantillonnage
- **Filtrer avant d'échantillonner**

# Sous-échantillonnage d'un signal

- Lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence  $f_e < 2f_{max}$ , apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé précédemment.
- On dit alors que le signal est **sous-échantillonné**.
- En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique !
- Une solution simple :  
    **augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à**  
    **satisfaire la condition  $f_e > 2f_{max}$ .**

# 1<sup>ère</sup> Solution : décomposition spectrale



# 1<sup>ère</sup> Solution : limitations

- Ceci dit, cette solution d'augmenter  $f_e$  peut s'avérer très coûteuse, voire carrément impossible à réaliser en pratique, suivant l'appareillage de mesure dont on dispose.
- De plus, certains signaux contiennent un nombre infini de fréquences (comme la fonction *sinc*), et certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique, des fréquences très élevées).
- Pour ces signaux,  $f_{max} = +\infty$  : de tels signaux sont donc **toujours sous-échantillonnés**, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ .

**Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas ?**

# Effet stroboscopique : une autre solution

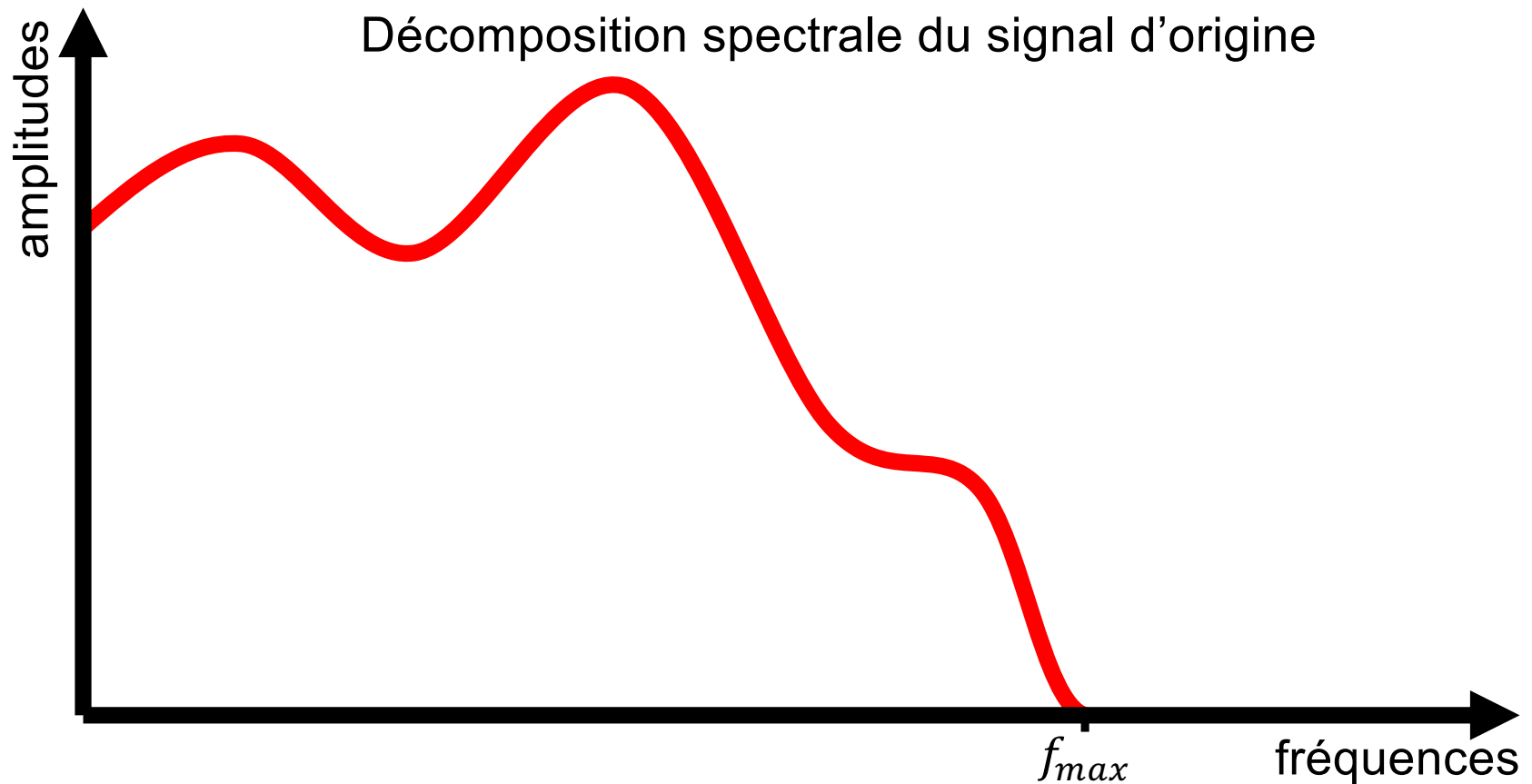
Une solution qui minimise les dégâts consiste à :

filtrer le signal **avant** de l'échantillonner !

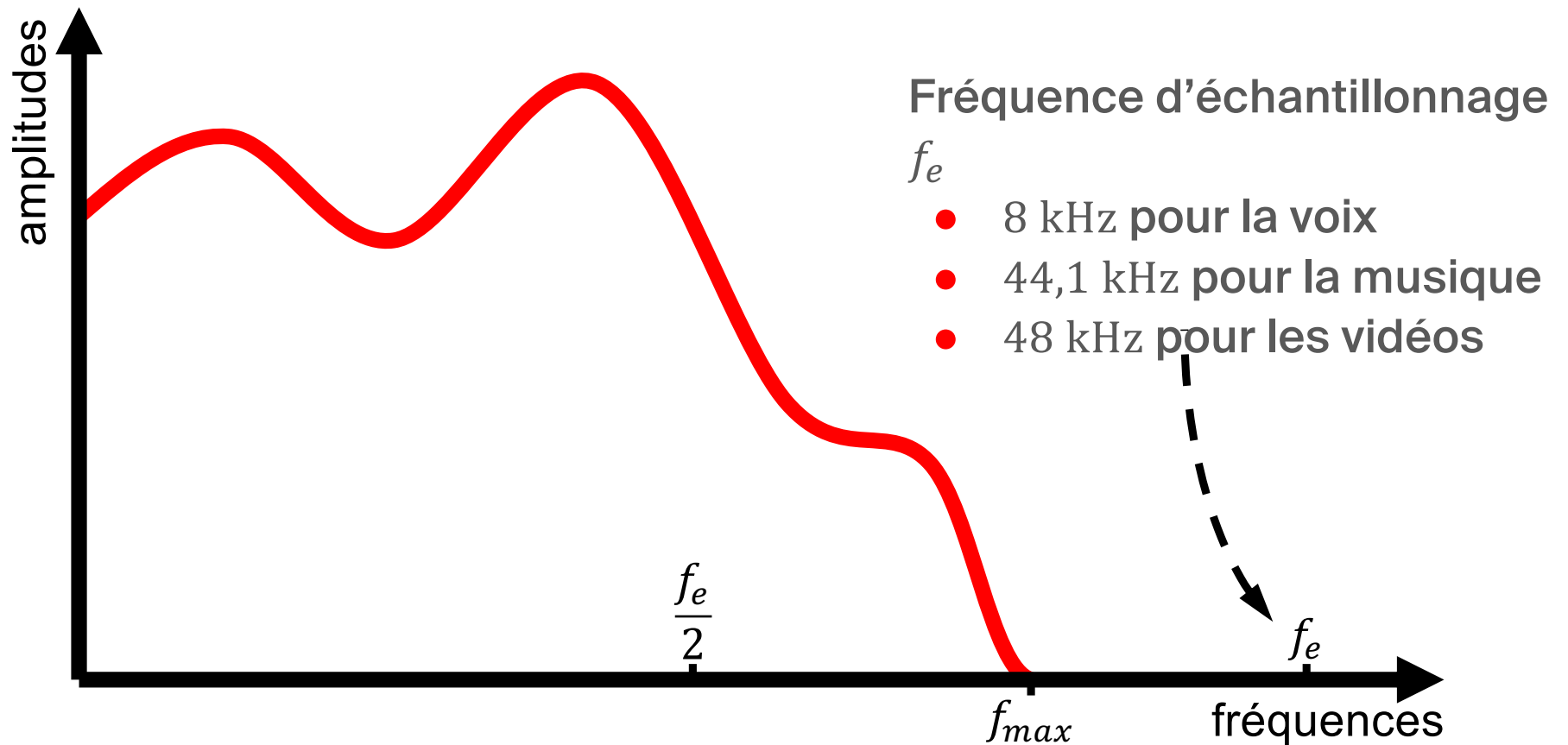
- On filtre le signal avec un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure  $f_c$  est juste un peu plus petite que  $\frac{f_e}{2}$ .
- Puis on échantillonne le signal filtré à la fréquence  $f_e$ .
- Et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation.

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite; en particulier, on n'a pas d'effet stroboscopique.

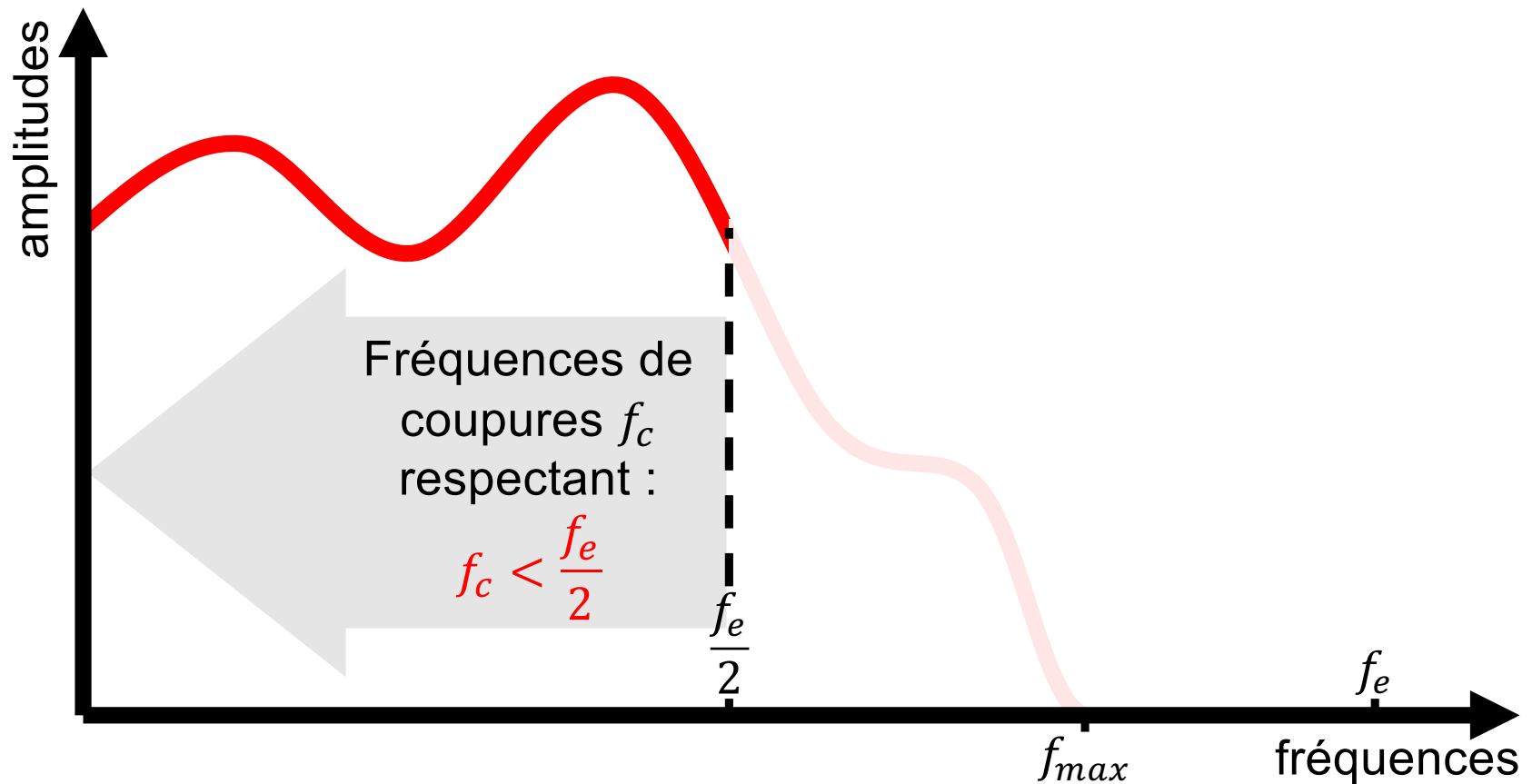
## 2<sup>ème</sup> Solution : décomposition spectrale



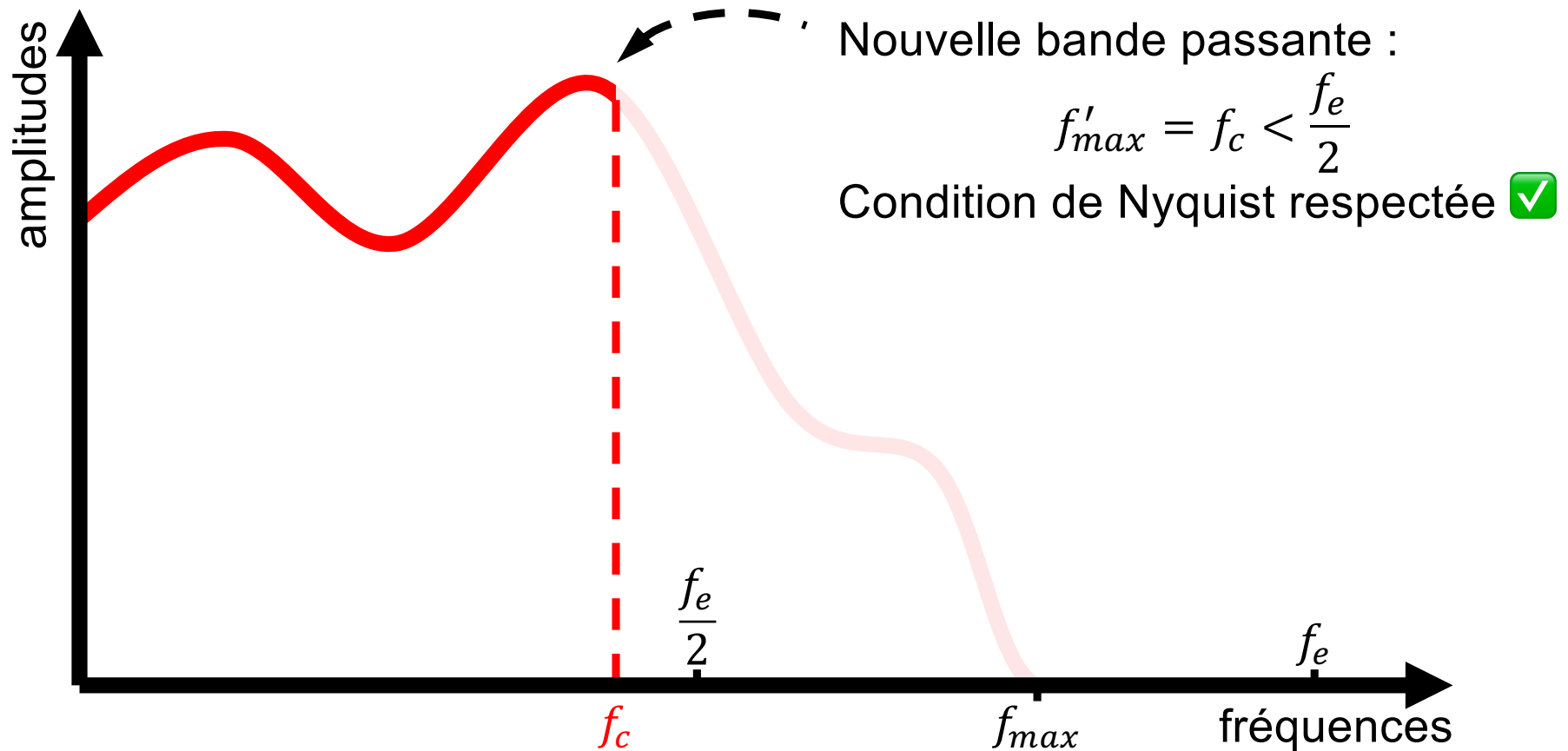
## 2<sup>ème</sup> Solution : décomposition spectrale



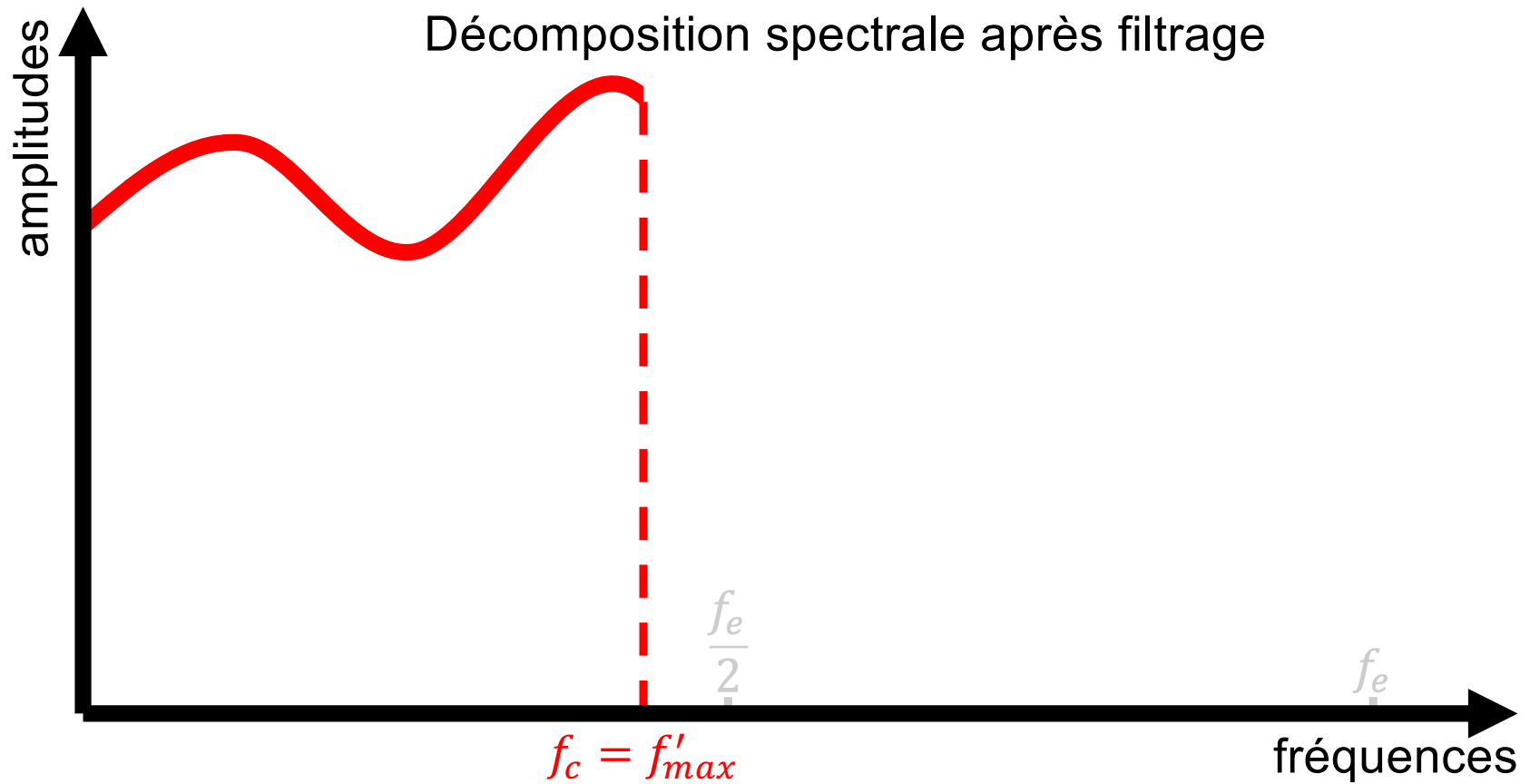
## 2<sup>ème</sup> Solution : décomposition spectrale



## 2<sup>ème</sup> Solution : décomposition spectrale



## 2<sup>ème</sup> Solution : décomposition spectrale



## Exemple sonore

Sur un support numérique, le son est échantillonné à une fréquence  $f_e = 44.1$  kHz, car les fréquences au dessus de 22 kHz ne sont (en général) pas perçues par l'oreille humaine. Celles-ci sont donc filtrées avant l'échantillonnage, ce qui garantit que la condition de Nyquist soit respectée.

# Démonstration

Vous allez maintenant entendre trois extraits d'un morceau de musique Jazz :

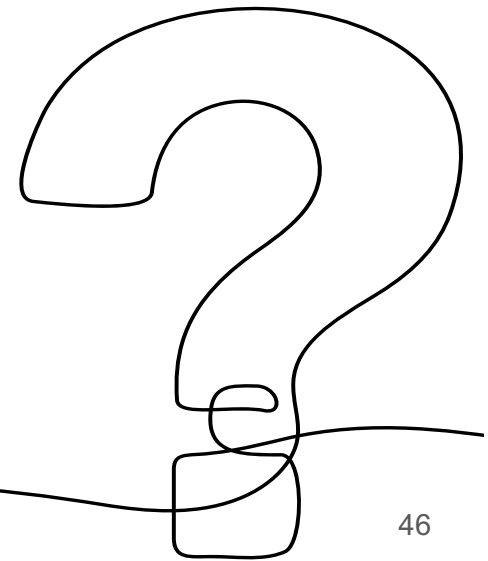
("Our love is here to stay" de Georges Gerschwin, joué par Roland Kirk)

- Un premier extrait, où le son a été filtré à 22 kHz avant d'être échantillonné à 44.1 kHz.
- Un deuxième extrait, où le son a été filtré à 22 kHz, mais a ensuite été échantillonné à 8.82 kHz seulement.
- Et finalement, un troisième extrait, où le son a d'abord été filtré à 4.4 kHz, avant d'être échantillonné à 8.82 kHz.

# Question

Que faut-il faire pour éviter l'effet stroboscopique ?

- A. Appliquer un filtre passe-haut avant l'échantillonnage
- B. Augmenter suffisamment la fréquence d'échantillonnage
- C. Appliquer un filtre passe-bas idéal avant l'échantillonnage
- D. Réduire suffisamment la fréquence d'échantillonnage



# Résumé Semaine 10 – ICC-T

- **Réconstruction de signaux** (interpolation optimale)
  - Les segments ou polynômes peuvent être instables → on utilise la **sinc**

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

- **Théorème d'échantillonnage** (Nyquist-Shannon)

- Condition de reconstruction :

$$f_e > 2f_{max}$$

- Effet stroboscopique (repliement spectral) : Si  $f_e < 2f_{max}$   
Chevauchement des spectres → perte d'information

- **Filtrer avant échantillonner** (anti-aliasing)

- Filtre passe-bas idéal  $f_c < f_e/2$  avant l'échantillonnage
- Reconstruction parfaite  $\Leftrightarrow$  respect de  $f_e > 2f_{max}$  + filtrage adéquat.

[rafael.pires@epfl.ch](mailto:rafael.pires@epfl.ch)



**EPFL**

Merci