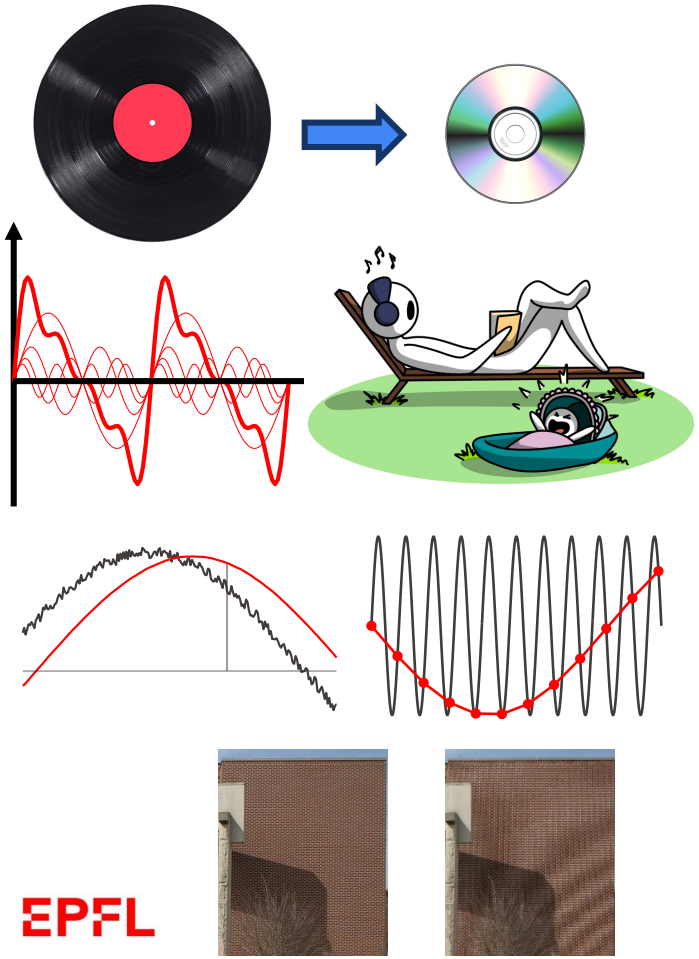
# Information, Calcul et Communication

## CS-119(k) ICC – Théorie
## Semaine 11

Rafael Pires
rafael.pires@epfl.ch

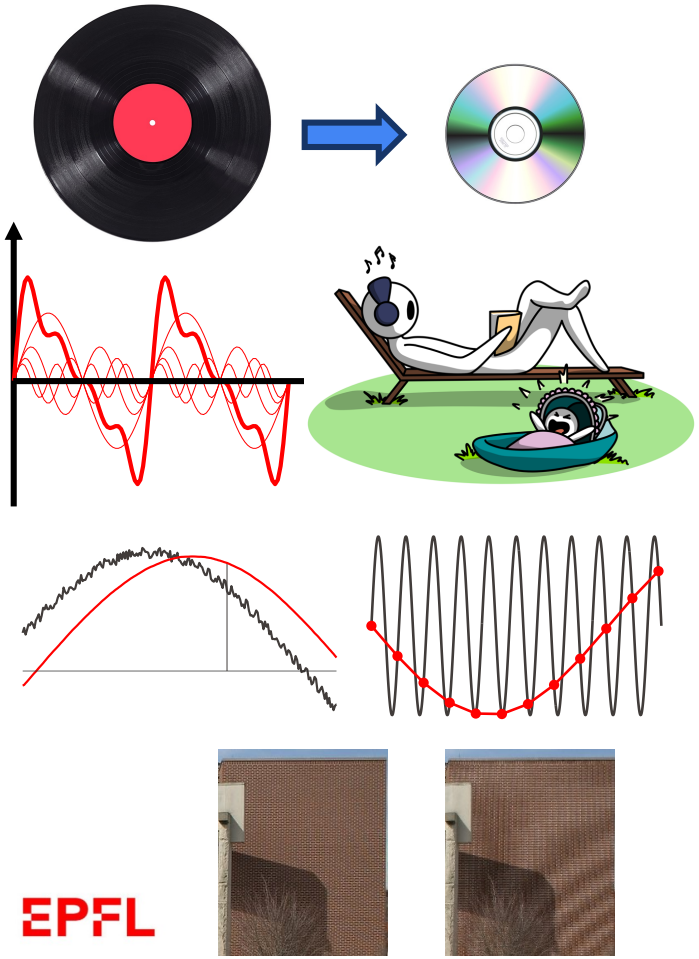
Lausanne, 09.05.2025

# Précédemment, dans ICC-T 10



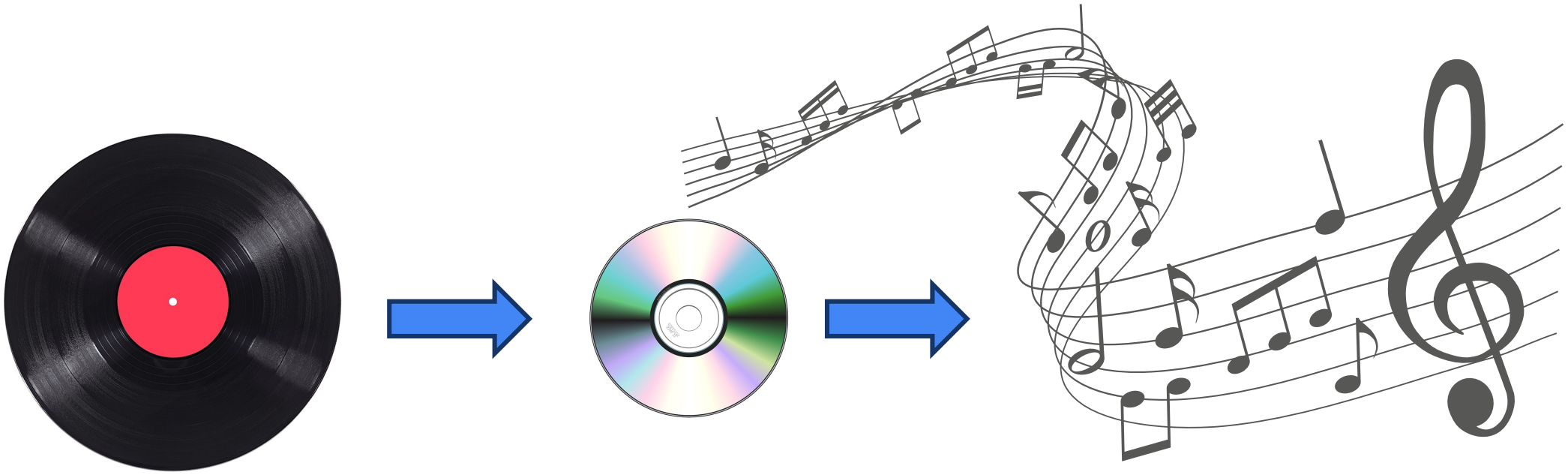
- Un **signal** est une **fonction** $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Un signal particulier : la **sinusoïde** $X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta)$
- Un paramètre particulièrement important : la **fréquence** $f$
- Joseph Fourier : **Tout signal est une somme de sinusoïdes !**
- La **bande passante** d'un signal est sa plus haute fréquence
- Deux techniques de traitement des signaux :
  - **Le filtrage**, pour supprimer ou atténuer les hautes fréquences (filtre passe-bas)
  - **L'échantillonnage**, pour numériser le signal

# Précédemment, dans ICC-T 10



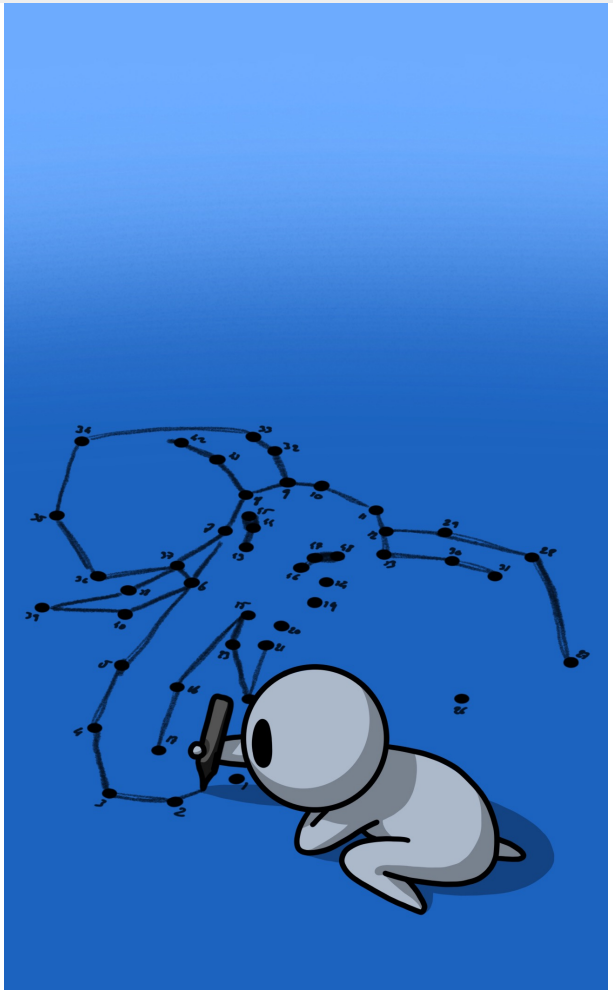
- Soit $X(t) = \sin(3\pi t) + \cos(8\pi t)$, quelle est la bande passante $B_X$ ?
- Soit $X(t)$ un signal de bande passante $B_X$, quelle est la bande passante de $X(Ct), C > 0$ ?
- Soit $X(t)$ et $\mathrm{Y}(t)$ deux signaux de bande passante $B_X$ et $B_Y$ resp., quelle est la bande passante $B_{XY}$ de $X(t) + \mathrm{Y}(t)$ ?

# Échantillonnage et reconstruction de signaux



# Aujourd’hui

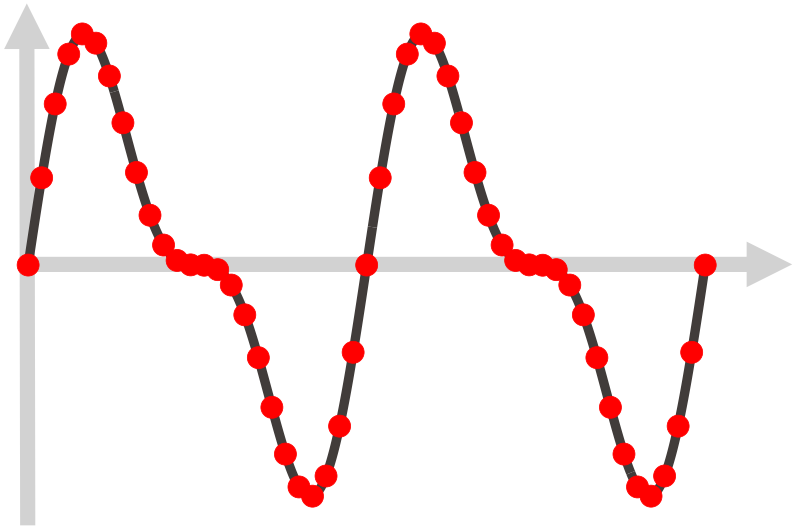
- Reconstruction de signaux
- Le théorème d’échantillonnage
- Filtrer avant d’échantillonner



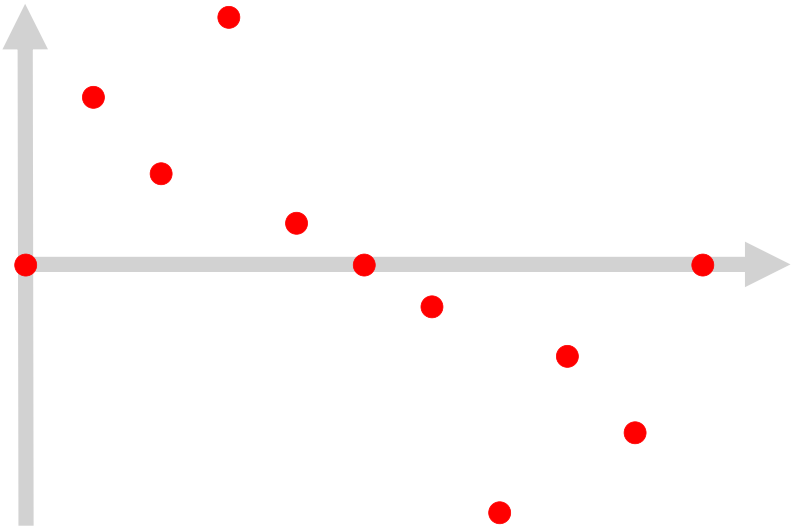
# Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$ à partir de sa version échantillonnée $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$ ?

- Dans certains cas, c'est assez clair...



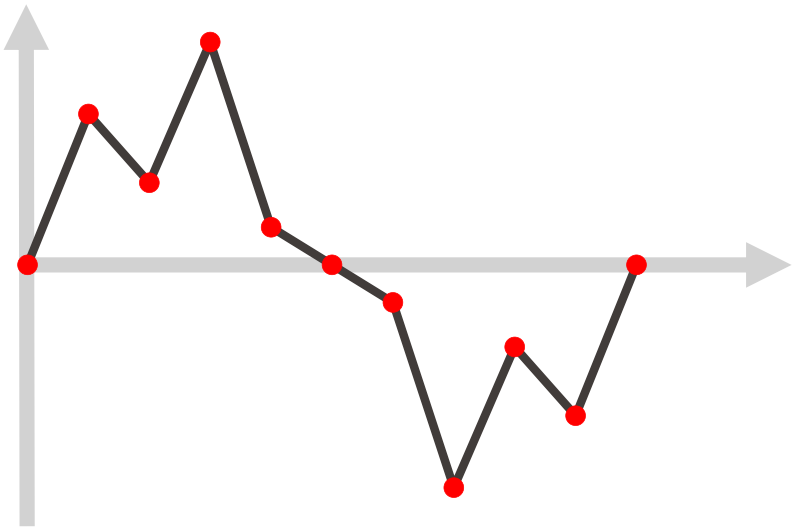
- Dans d'autres, ça l'est un peu moins !



# Tentatives d’interpolation

Premières tentatives pour **interpoler** un signal :

1. Relier les points par des **segments de droites** :



- Un défaut principal : la "courbe" obtenue **n’est pas régulière**.

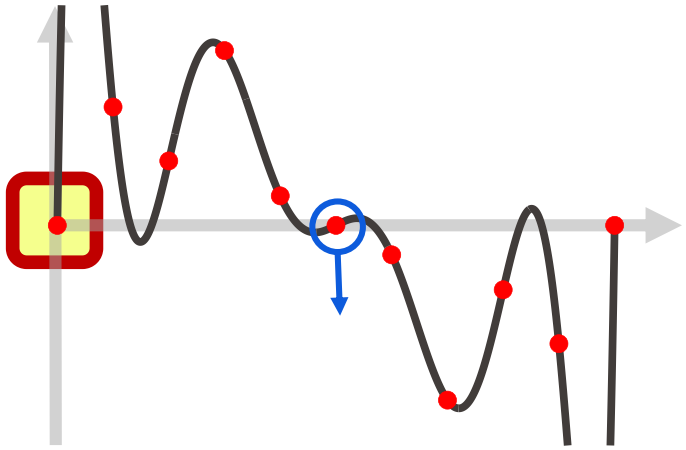
EPFL

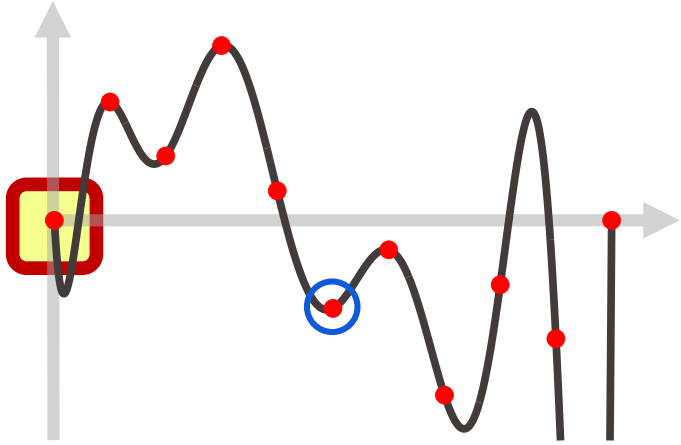
# Tentatives d'interpolation

2. Trouver un **polynôme** qui passe par tous les points.

Deux défauts principaux :

- Avec $N$ points, il faut trouver un polynôme de degré $N - 1$ : la procédure est **compliquée** !
- Elle est également **instable** : si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.





EPFL

# Tentatives d'interpolation

3. De manière générale, une **formule d'interpolation** pour $X(t)$ s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \text{ et } F(k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad (k \text{ entier non nul})$$

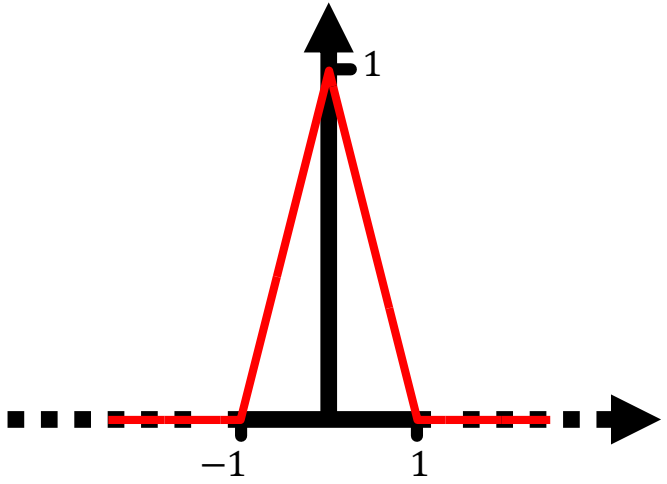
Cette condition implique en particulier que : $X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$

**La question est maintenant : quelle fonction $F$ choisir ?**

# Formule d'interpolation avec tri$(t)$

- La fonction $F$ qui permet de relier les points par des segments est :

$$F(t) = tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si\ |t| \leq 1 \\ 0 & si\ |t| > 1 \end{cases}$$




$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

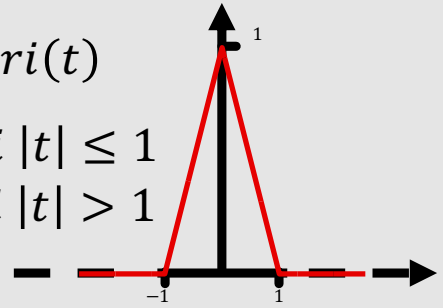
# Exemple

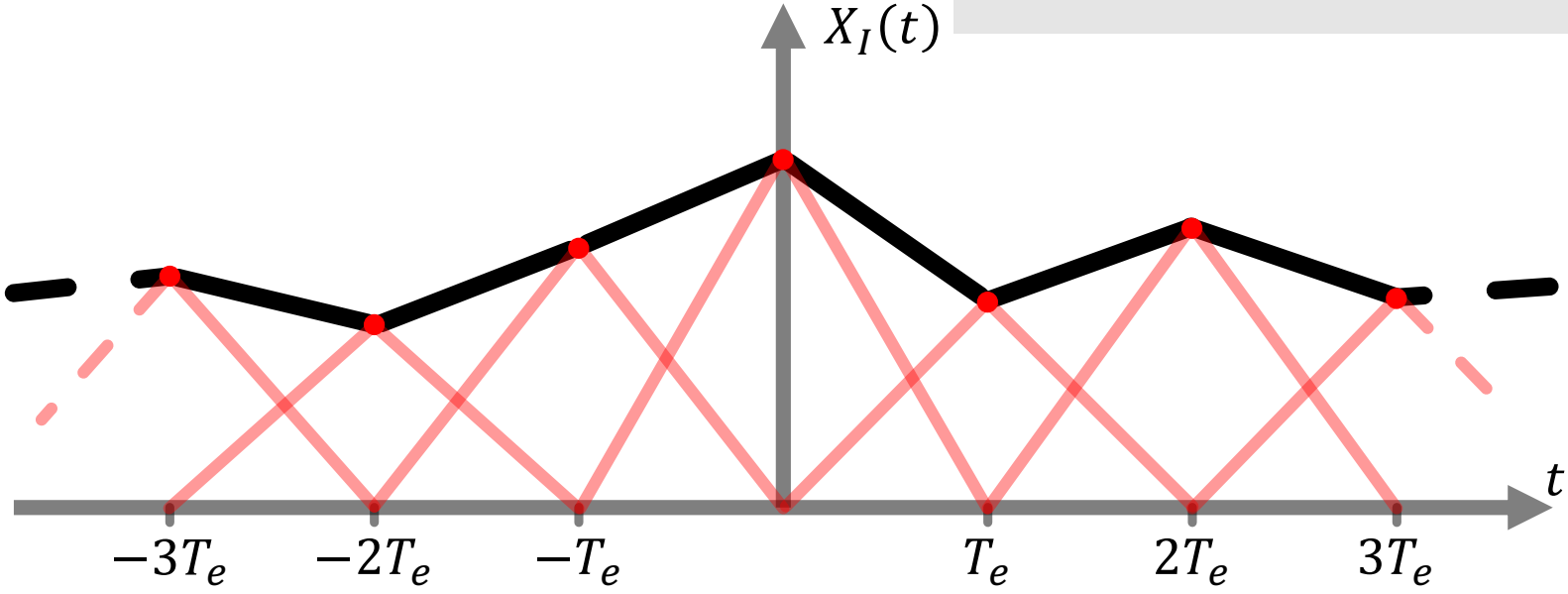
**Formule d'interpolation**

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\cdot \mathrm{F}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$$

**Fonction** $tri(t)$

$$F(t) = \begin{cases} 1-|t| & si\ |t| \le 1 \\ 0 & si\ |t| > 1 \end{cases}$$



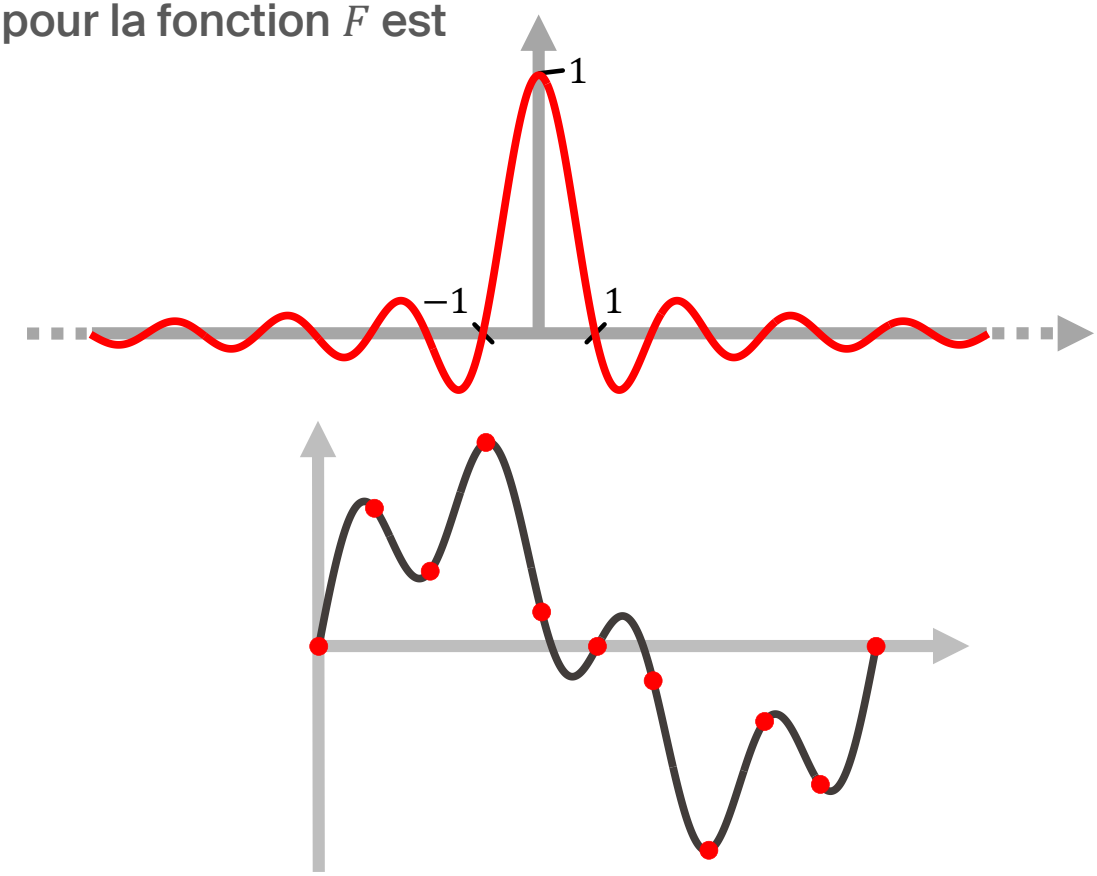




EPFL

# Formule d'interpolation avec $\mathbf{sinc}(t)$

- Il se trouve qu'un bien meilleur choix pour la fonction $F$ est

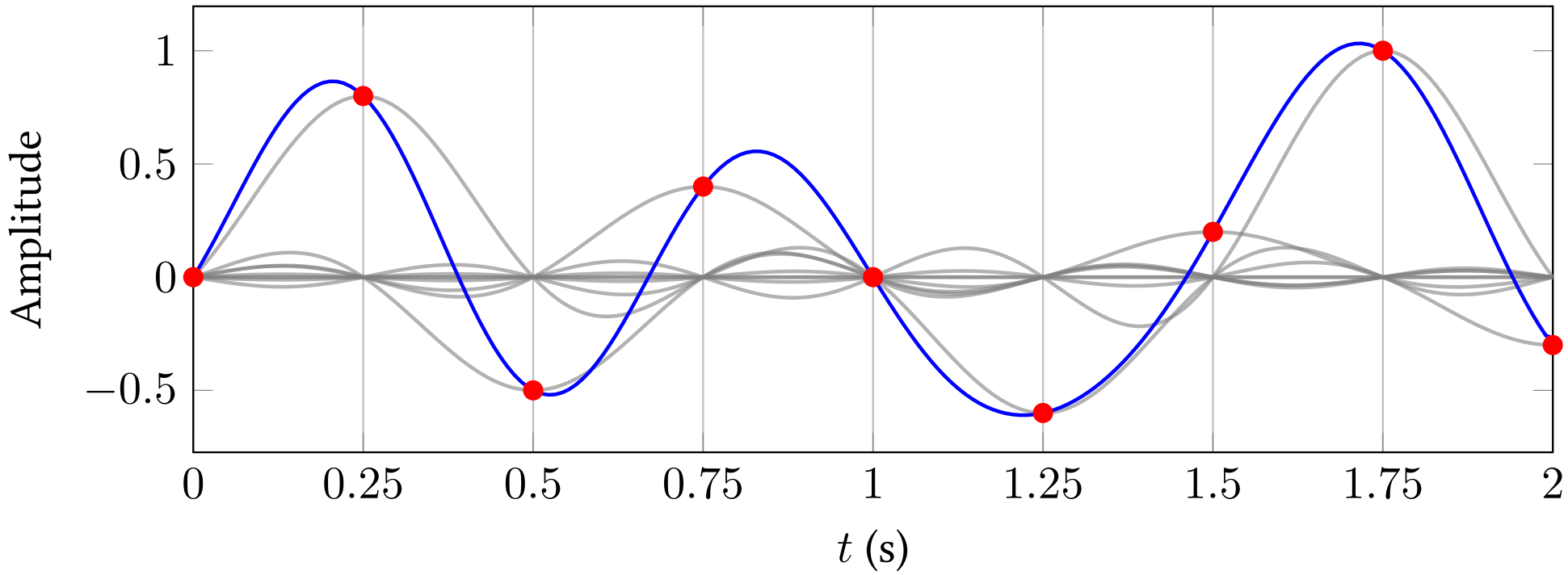
$$F(t) = \mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & si\ t \neq 0 \end{cases}$$




Ce qui donne dans notre exemple :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

# Formule d'interpolation avec $\mathbf{sinc}(t)$




EPFL

# Formule d'interpolation

- À partir des échantillons $(X(mT_e), m \in \mathbb{Z})$, nous construisons donc le signal interpolé $X_I(t)$ grâce à la **formule d'interpolation** :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

- Il nous reste maintenant une question cruciale à résoudre :

**Quand est-ce que $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ?**

# Aujourd’hui

- Reconstruction de signaux
- Le théorème d’échantillonnage
- Filtrer avant d’échantillonner

# Le théorème d'échantillonnage : historique

Edmund Taylor Whittaker
1873 - 1956

Harry Nyquist
1889 - 1979

Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov
1908 - 2005

Herbert Raabe
1909 - 2004

Claude Edwood Shannon
1916 - 2001

# Enoncé du théorème d'échantillonnage

## Nyquist-Shannon

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$ un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut $f_{max}$
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné avec une période $T_e$
  (et soit $f_e$ la fréquence correspondante : $f_e = 1/T_e$ )
- On pose encore $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$

Alors :

**Condition de Nyquist**

- Si $f_e > 2f_{max}$ alors $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors $f_e \geq 2f_{max}$

Si $f_e < 2f_{max}$, alors $\exists t \in \mathbb{R}$ t.q. $X_I(t) \neq X(t)$

EPFL

# Illustration du théorème en pratique

- Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

- La version échantillonnée de ce signal est : $X(mT_e) = \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e)$ et la formule d'interpolation devient :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

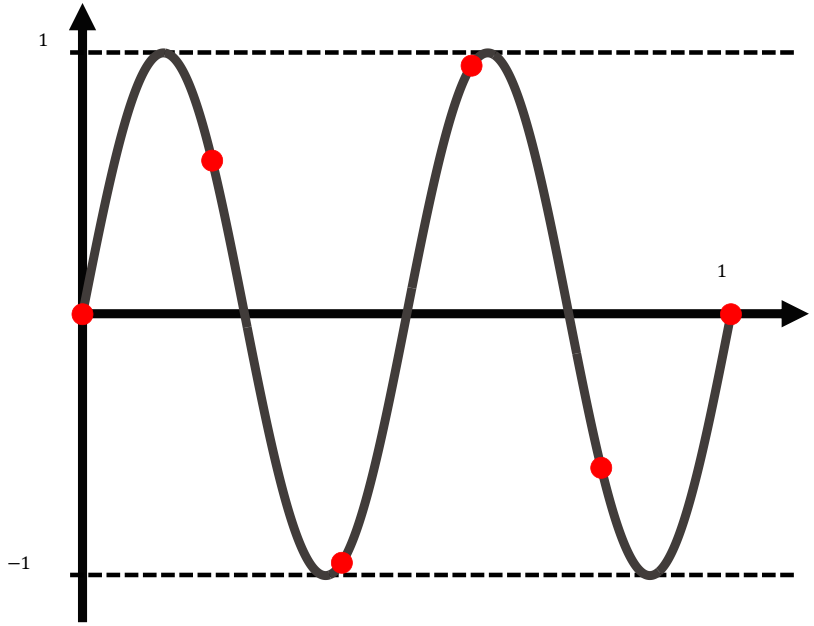
- En pratique, on se limite à quelques termes de la somme :

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

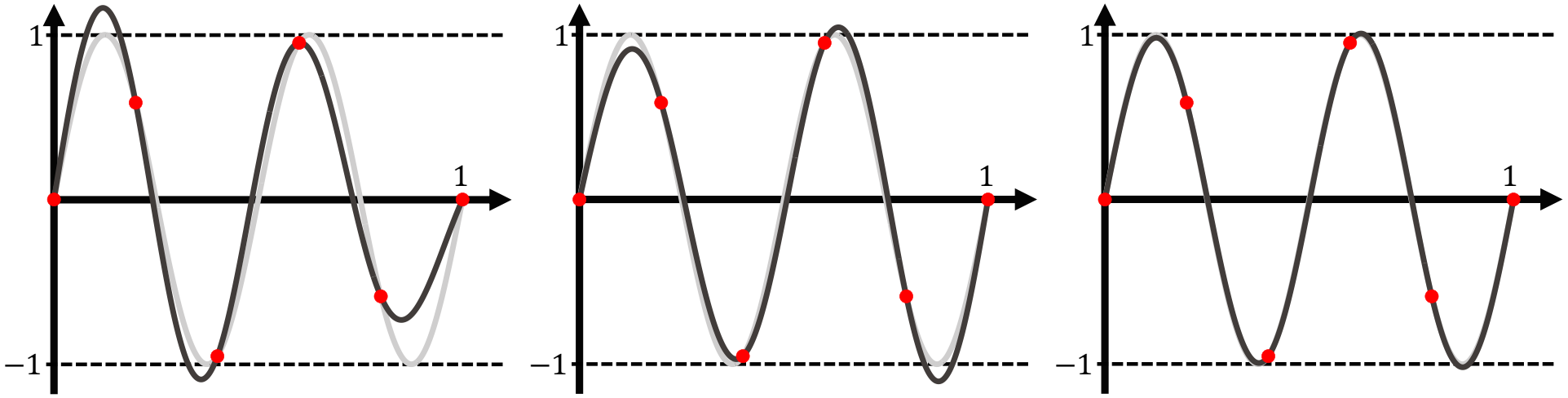
# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2\ Hz$ et $f_e = 5\ Hz$ (donc $T_e = 0.2$ sec ) :



# Illustration du théorème en pratique




Avec $N = 5$ Avec $N = 10$ Avec $N = 50$

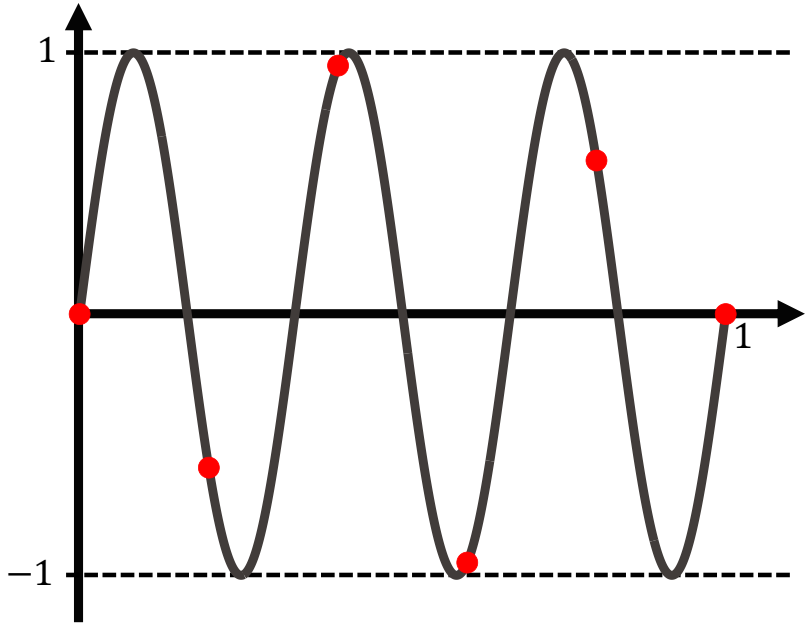
**Si $f_e > 2\,f$ , la reconstruction est bonne pour grand $N$.**

EPFL

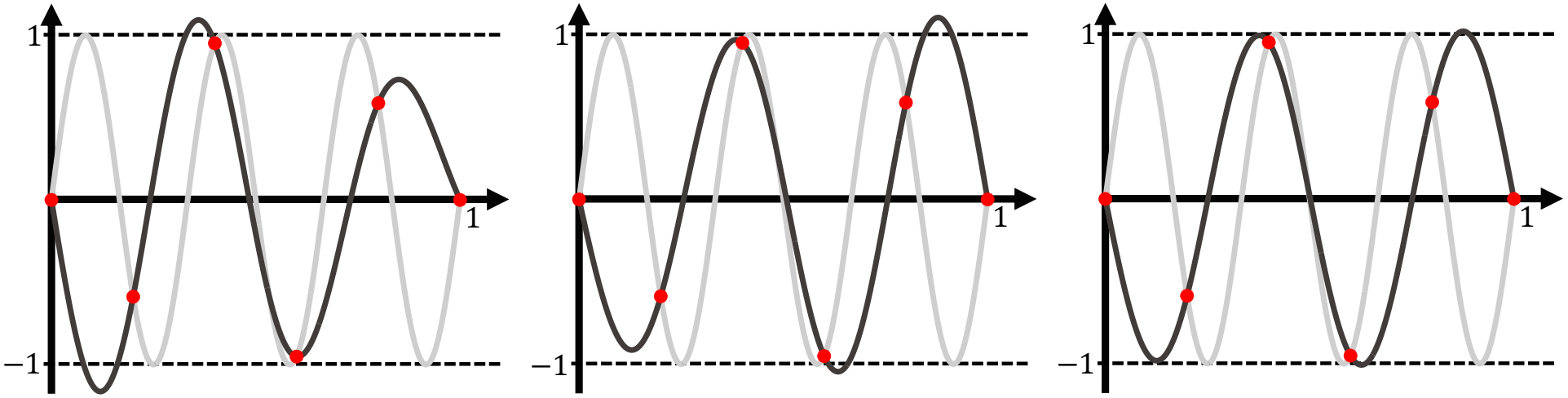
# Illustration du théorème en pratique

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 3\ Hz$ et $f_e = 5\ Hz$ (donc $T_e = 0.2$ sec ) :



# Illustration du théorème en pratique




Avec $N = 5$ Avec $N = 10$ Avec $N = 50$

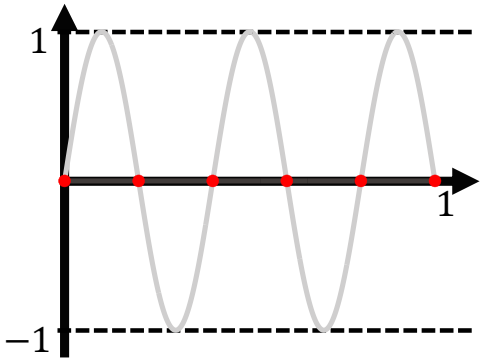
**Ici, par contre, $f_e < 2f$ : on a un problème...**

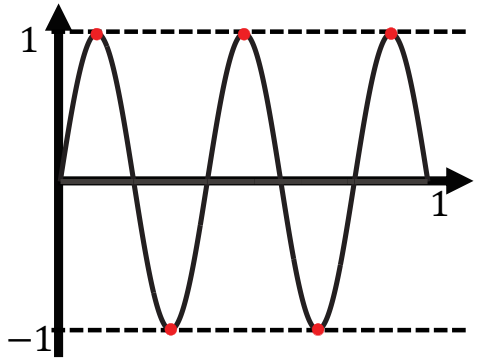
**Et si $f_e = 2f$ ?**

# Illustration du théorème en pratique : $f_e = 2f_{max}$

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi \cdot f \cdot mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2.5\ Hz$ et $f_e = 5\ Hz$ (donc $T_e = 0.2$ sec ) :



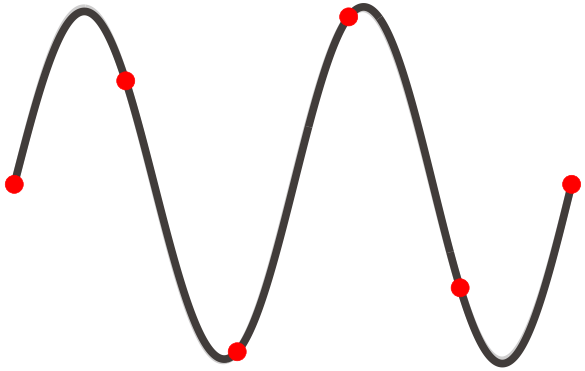

**Reconstruction nulle, parfaite, ou atténuée !**

**Ici aussi, on a un problème...**

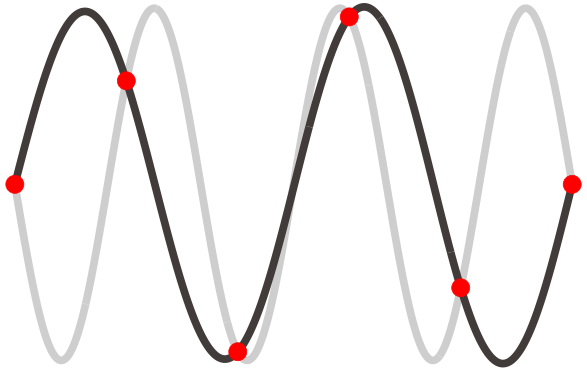
# Essayons de mieux comprendre cette illustration

**Rappel :** la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5\ Hz$.

- Quand $f = 2\ Hz$, la reconstruction est bonne.



- Quand $f = 3\ Hz$, la reconstruction est mauvaise.



- Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !
- La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite, mais pas le signal d'origine (en transparence)

EPFL

# Illustration : conclusion

**Rappel :** la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5\ Hz$.

- A partir des seules valeurs échantillonnées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de $f = 2\ Hz$ ou de $f = 3\ Hz$.
- Dans une telle situation, notre formule d'interpolation choisit la fréquence la plus basse, i.e., $f = 2\ Hz$.
- Donc, si on sait dès le départ que la fréquence $f$ de la sinusoïde d'origine est plus petite que $\frac{f_e}{2} = 2.5\ Hz$, alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- Si par contre la fréquence $f$ est plus grande que $\frac{f_e}{2} = 2.5\ Hz$, alors la formule d'interpolation choisit la mauvaise fréquence : $\tilde{f} = f_e - f$. C'est l'effet stroboscopique que nous avons vu dans une vidéo précédente.

EPFL

# Pourquoi $f_{max}$ dans le théorème ?

- Dans l'illustration précédente, on avait affaire à un signal $X(t)$ avec une seule fréquence $f$.
- On a vu dans ce cas que $f_e > 2f$ est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.

Et si maintenant le signal $X(t)$ contient **deux fréquences $f_1$ et $f_2$** ?

- Dans ce cas, il suffit que $f_e > 2f_1$ ***et*** $f_e > 2f_2$ pour que le signal soit bien reconstruit, i.e., que $f_e > 2\max\{f_1, f_2\}$.
- En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc à la condition

$$f_e > 2f_{max}.$$

# Enoncé du théorème d'échantillonnage

Soient :

- $(X(t), t \in \mathbb{R})$ un signal dont la bande passante (= la plus grande fréquence) vaut $f_{max}$
- $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné avec une période $T_e$ (et soit $f_e$ la fréquence correspondante : $f_e = 1/T_e$ )
- On pose encore $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$

Alors :

- Si $f_e > 2f_{max}$, alors $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si $X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors $f_e \geq 2f_{max}$

EPFL

# Un lemme utile pour la démonstration

**Lemme** : La bande passante du signal $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$.

**Démonstration du lemme :** Remarquez tout d'abord que

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 2\int_0^{1/2} \cos(2\pi t \cdot f) \cdot df$$

*i.e.*, le signal $\mathrm{sinc}(t)$ est une somme (infinie) de sinusoïdes de fréquences $f$ allant de $0$ à $\frac{1}{2}$.
Sa bande passante vaut donc $\frac{1}{2}$.

La bande passante signal $\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right) = \mathrm{sinc}(f_e t - m)$ vaut donc $\frac{f_e}{2}$.

Et la bande passante du signal $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$ est donc inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$.
QED

# Idée de la démonstration du théorème

Démontrons d'abord la **seconde implication** (plus facile) :

$$\text{Si } X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2f_{max}$$

- Si $X_I(t) = X(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, alors ils ont même bande passante (forcément : ce sont les mêmes signaux).

- Or d'après le lemme, la bande passante du signal $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$.

- La bande passante $f_{max}$ du signal $X(t)$ est donc également inférieure ou égale à $\frac{f_e}{2}$. QED

# Idée de la démonstration du théorème

Passons maintenant à la **première implication :**

$$\text{Si } f_e > 2f_{max}, \text{ alors } X_I(t) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- L'hypothèse et le lemme impliquent que les signaux $X(t)$ et $X_I(t)$ ont tous deux une bande passante plus petite (ou égale) à $f_e/2$.

- On a vu d'autre part que $X_I(nT_e) = X(nT_e)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
- On peut montrer le résultat suivant :

  Deux signaux de bande passante plus petite (ou égale) à $\frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$

  et qui coïncident aux points $nT_e$ , $n \in \mathbb{Z}$, coïncident en fait partout !

- En conclusion, sous l'hypothèse effectuée, on a bien $X_I(t) = X(t)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. «QED»

EPFL

# Aujourd’hui

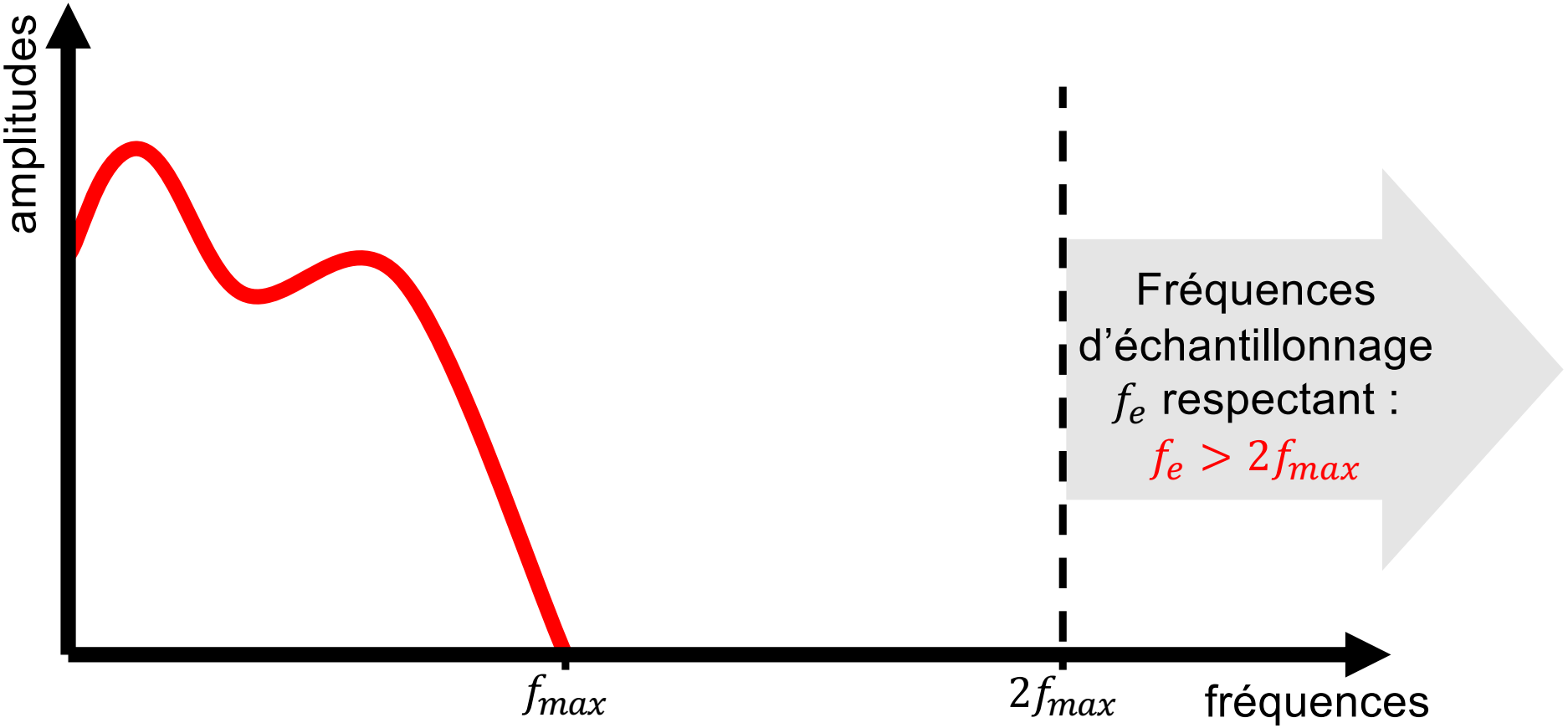
- Reconstruction de signaux
- Le théorème d’échantillonnage
- **Filtrer avant d’échantillonner**

# Sous-échantillonnage d'un signal

- Lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence $f_e < 2f_{max}$, apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé précédemment.
- On dit alors que le signal est **sous-échantillonné.**
- En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique !
- Une solution simple :

  **augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à satisfaire la condition $f_e > 2f_{max}$.**

# 1ère Solution : décomposition spectrale



# 1ère Solution : limitations

- Ceci dit, cette solution d'augmenter $f_e$ peut s'avérer très coûteuse, voire carrément impossible à réaliser en pratique, suivant l'appareillage de mesure dont on dispose.
- De plus, certains signaux contiennent un nombre infini de fréquences (comme la fonction $sinc$), et certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique, des fréquences très élevées).
- Pour ces signaux, $f_{max} = +\infty$ : de tels signaux sont donc **toujours sous-échantillonnés**, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage $f_e$.

Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas ?

# Effet stroboscopique : une autre solution

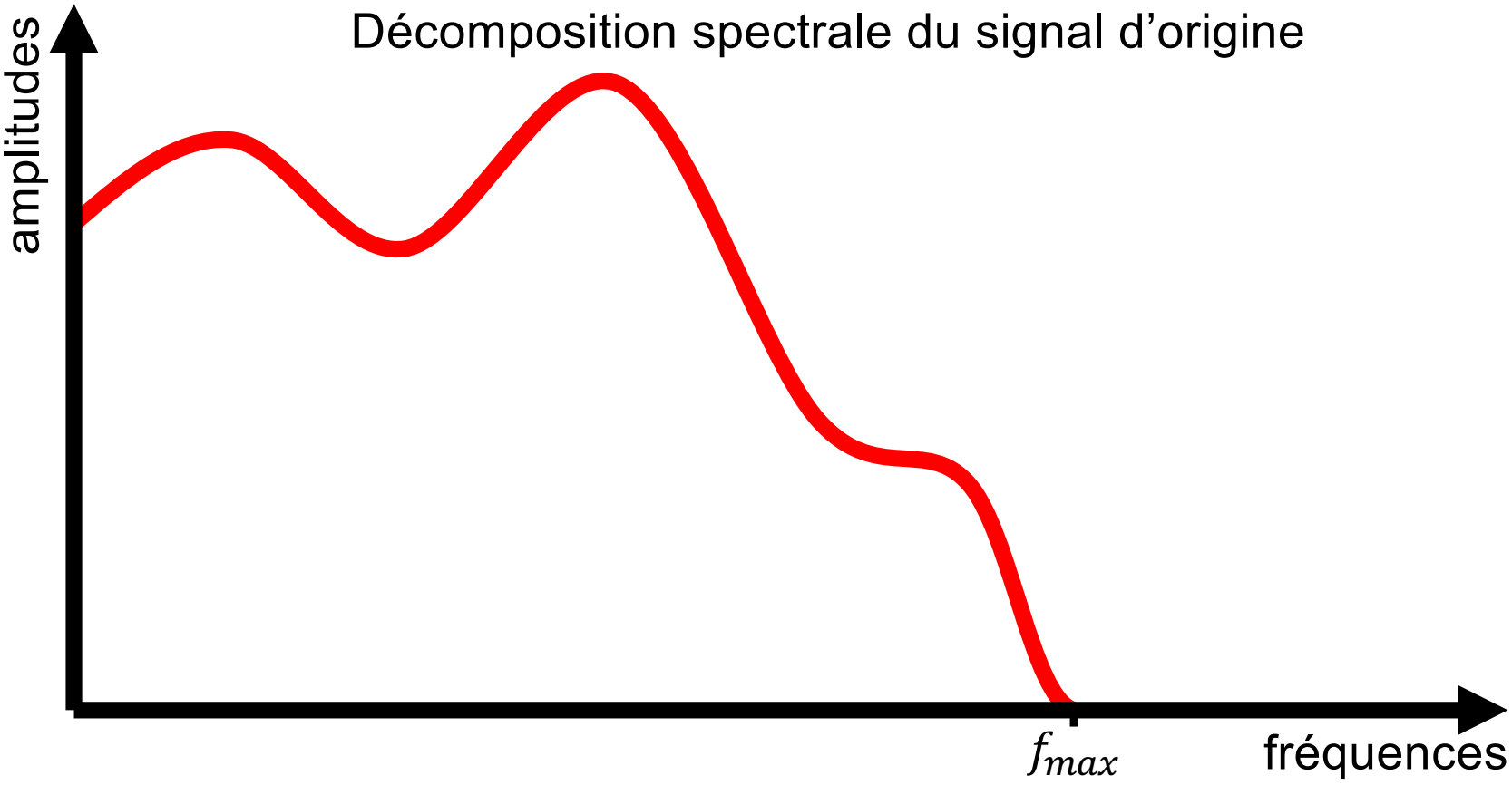
Une solution qui minimise les dégâts consiste à :

**filtrer le signal avant de l'échantillonner !**

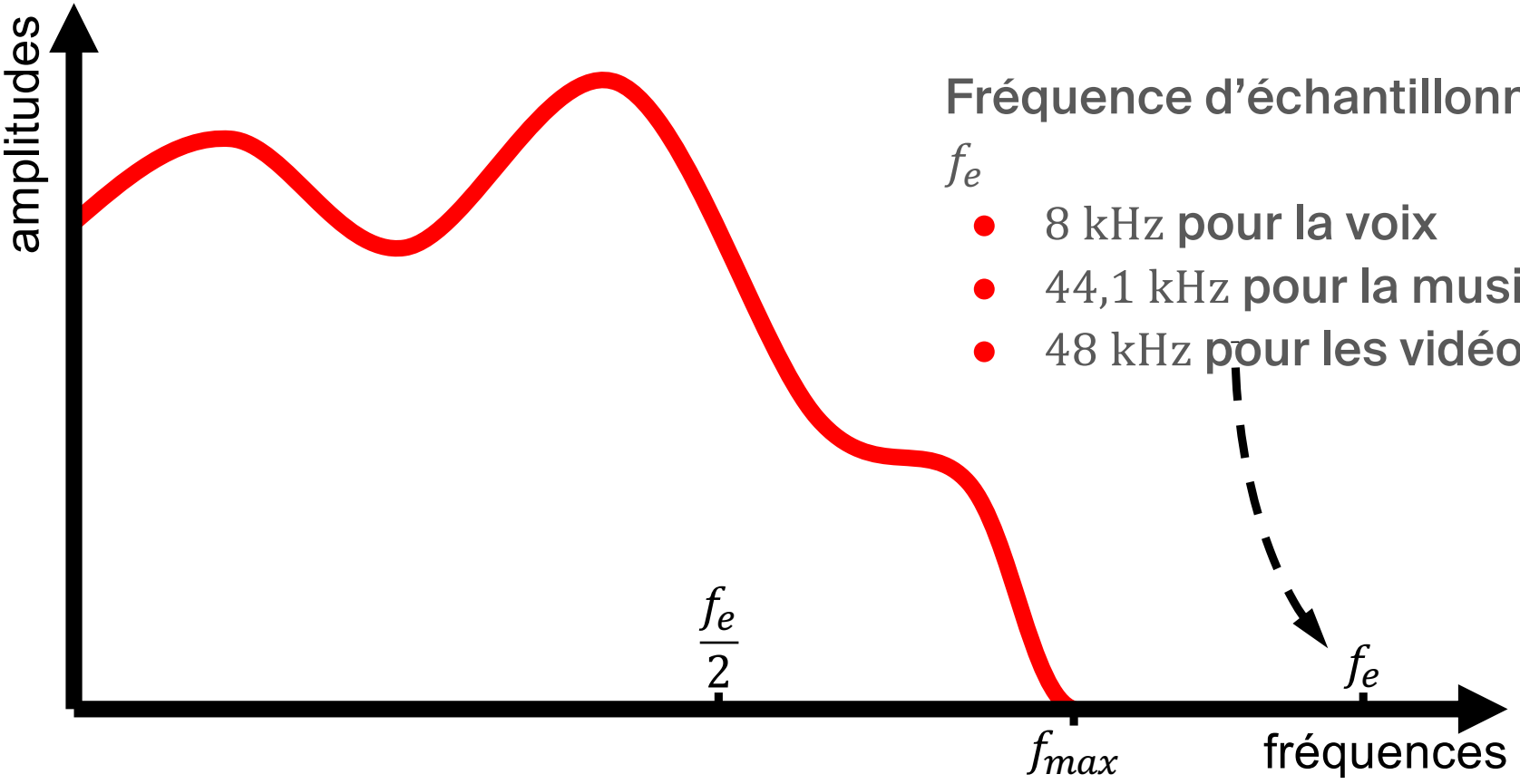
- On filtre le signal avec un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure $f_c$ est juste un peu plus petite que $\frac{f_e}{2}$.
- Puis on échantillonne le signal filtré à la fréquence $f_e$.
- Et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation.

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite; en particulier, on n'a pas d'effet stroboscopique.

# 2ème Solution : décomposition spectrale



# 2ème Solution : décomposition spectrale

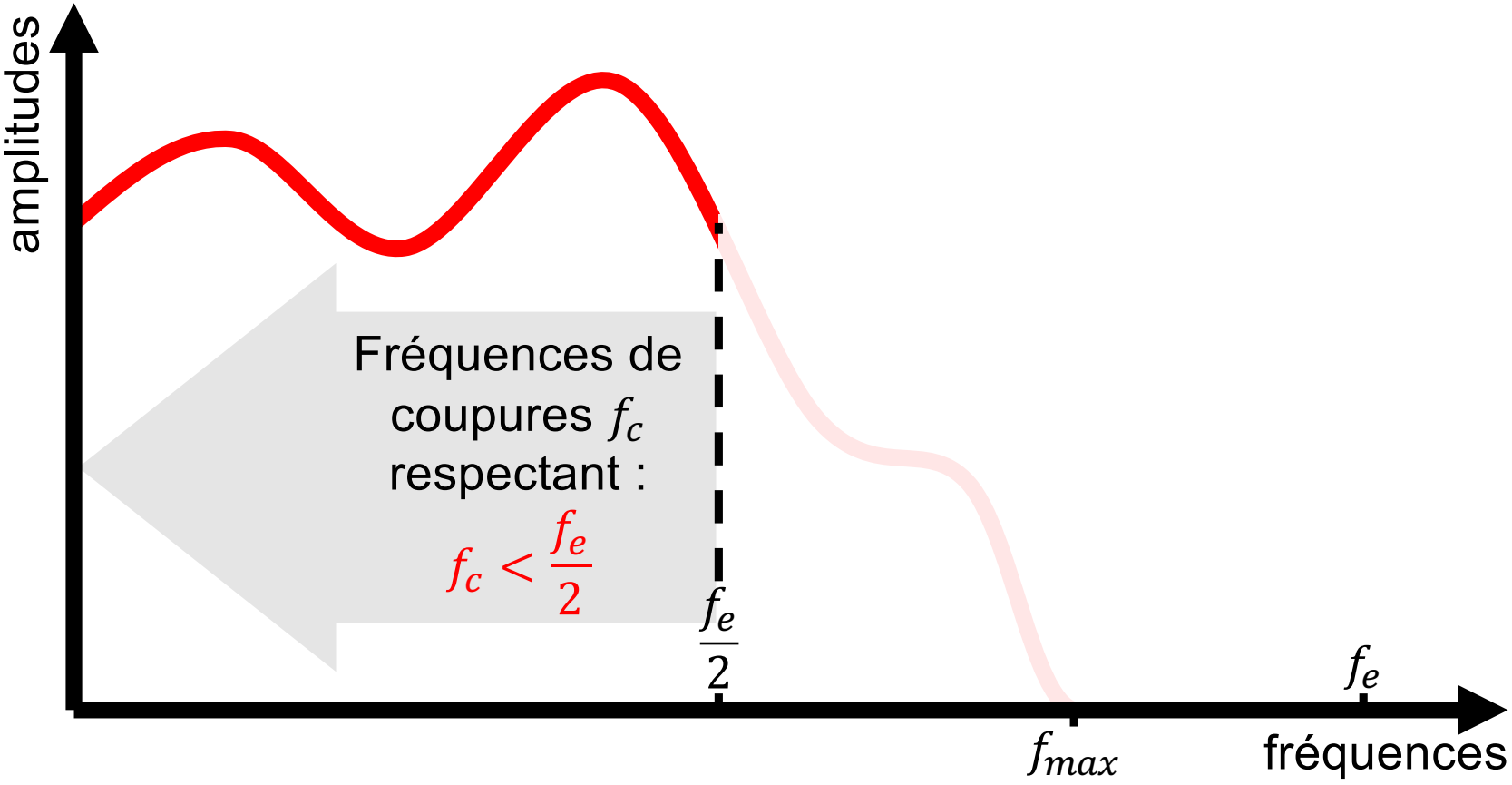



Fréquence d'échantillonnage

$f_e$

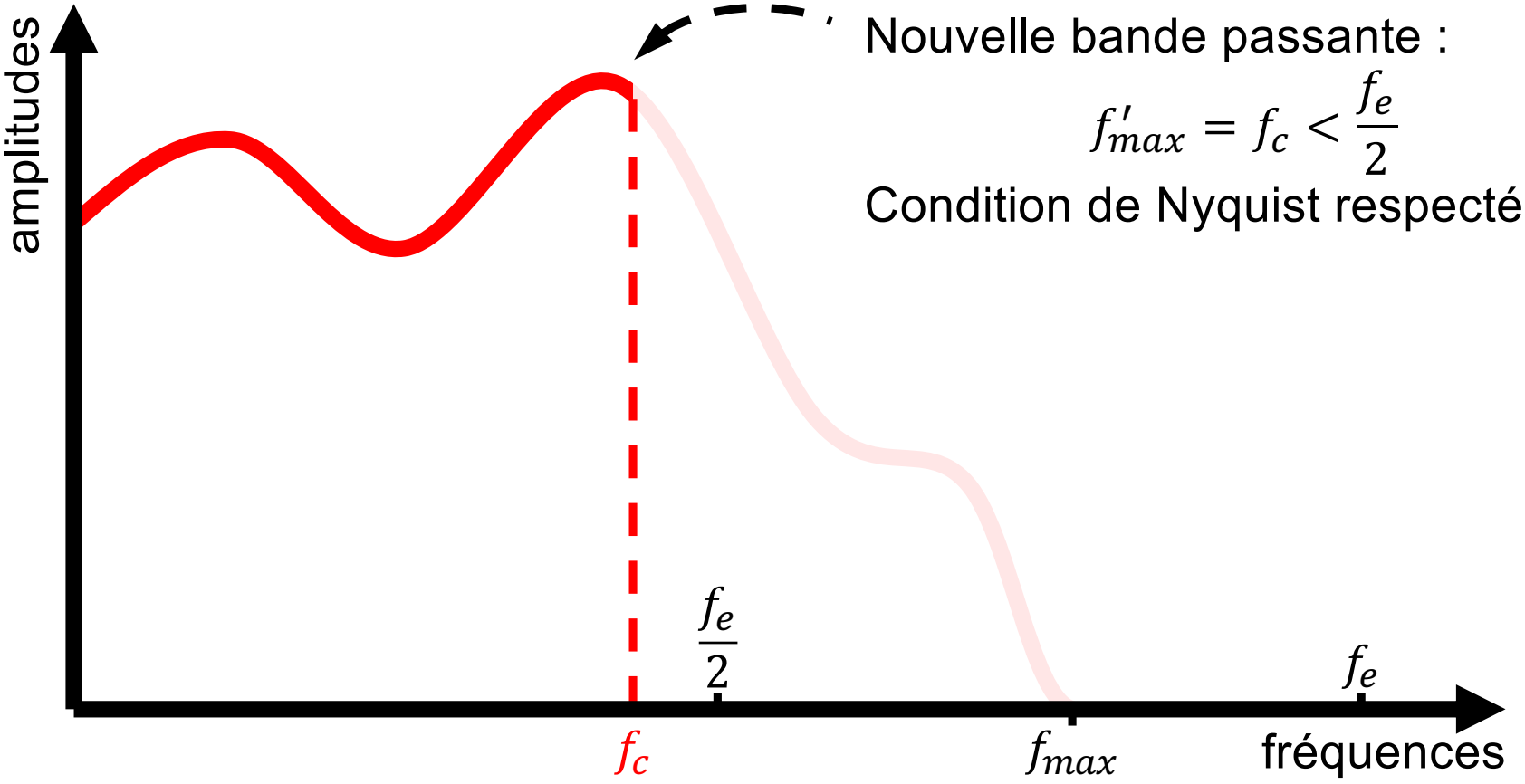
- 8 kHz pour la voix
- 44,1 kHz pour la musique
- 48 kHz pour les vidéos

# 2ème Solution : décomposition spectrale




EPFL

# 2ème Solution : décomposition spectrale

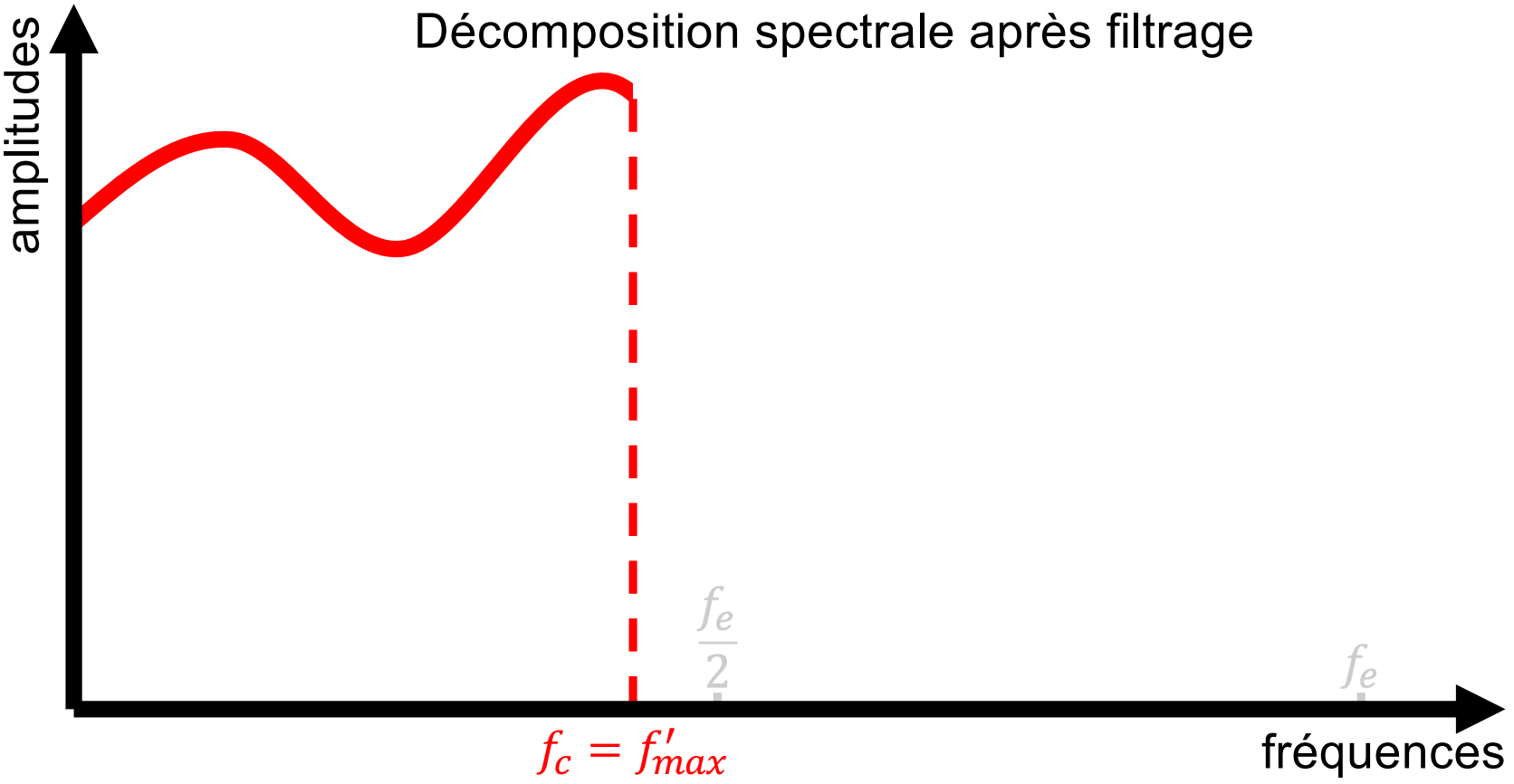



Nouvelle bande passante :

$$f'_{max} = f_c < \frac{f_e}{2}$$

Condition de Nyquist respectée ✅

# 2ème Solution : décomposition spectrale




EPFL

# Exemple sonore

Sur un support numérique, le son est échantillonné à une fréquence $f_e = 44.1\ \mathrm{kHz}$, car les fréquences au dessus de $22\ \mathrm{kHz}$ ne sont (en général) pas perçues par l'oreille humaine. Celles-ci sont donc filtrées avant l'échantillonnage, ce qui garantit que la condition de Nyquist soit respectée.

(©Robin Scheibler, 2013)

# Démonstration

Vous allez maintenant entendre trois extraits d'un morceau de musique Jazz :
("Our love is here to stay" de Georges Gerschwin, joué par Roland Kirk)

- Un premier extrait, où le son a été filtré à 22 kHz avant d'être échantillonné à 44.1 kHz.
- Un deuxième extrait, où le son a été filtré à 22 kHz, mais a ensuite été échantillonné à 8.82 kHz seulement.
- Et finalement, un troisième extrait, où le son a d'abord été filtré à 4.4 kHz, avant d'être échantillonné à 8.82 kHz.

# Résumé Semaine 11 – ICC-T

- **Réconstruction de signaux** (interpolation optimale)
  - Les segments ou polynômes peuvent être instables → on utilise la **sinc**

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

- **Théorème d'échantillonnage** (Nyquist–Shannon)
  - Condition de reconstruction :

$$f_e > 2f_{max}$$

  - Effet stroboscopique (repliement spectral) : Si $f_e < 2f_{max}$
    Chevauchement des spectres → perte d'information
- **Filtrer avant échantillonner** (anti-aliasing)
  - Filtre passe-bas idéal $f_c < {}^{f_e}/_2$ avant l'échantillonnage
  - Reconstruction parfaite ⇔ respect de $f_e > 2f_{max}$ + filtrage adéquat.

rafael.pires@epfl.ch

# Merci