Analyse avancée II – Corrigé de la série 11A

Échauffement.

On obtient les points stationnaires de la fonction f en résolvant le système

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_x(x,y) = 2x - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = \left(1, \tfrac{1}{2}\right).$$

Le seul point stationnaire de f est donc $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

et $\Lambda_1(x,y) = f_{xx}(x,y) = 2$, on a $\Lambda_2\left(1, \frac{1}{2}\right) > 0$ et $\Lambda_1\left(1, \frac{1}{2}\right) > 0$ et la fonction f atteint donc un minimum local au point $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ où elle vaut $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ (Fig. 1).

Exercice 1.

Pour les cas $i) - iv)$ on peut utiliser la matrice hessienne H en $(0,0)$ qui est diagonale. On a :

i) $\det H = 2^2 > 0$ et $H_{11} = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ le point $(0,0)$ est un minimum (en fait global);

ii) $\det H = 2 \cdot (-2) < 0 \;\Rightarrow\;$ il s'agit d'un point selle;

iii) $\det H = (-2) \cdot 2 < 0 \;\Rightarrow\;$ il s'agit d'un point selle;

iv) $\det H = (-2)^2 > 0$ et $H_{11} = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ le point $(0,0)$ est un maximum (en fait global).

Pour les cas $v) - viii)$ on ne peut pas utiliser la matrice hessienne parce que celle-ci est nulle.

v) Comme $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0,0)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, le point $(0,0)$ est le minimum global.

vi) Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 > 0 = f(0,0) > f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^4$, donc $(0,0)$ est un point selle.

vii) Aussi un point selle: $f(\varepsilon, 0) = -\varepsilon^4 < 0 = f(0,0) < f(0,\varepsilon) = \varepsilon^4$ pour tout $\varepsilon > 0$.

viii) $f(x,y) = -(x^4 + y^4) < 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, donc $(0,0)$ est le maximum global de f.

Exercice 2.

i) Comme la matrice A est symétrique, il existe une matrice orthogonale V de vecteurs propres de A telle que $A = VDV^T$, où D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A. On a

$$\det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 7 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Les vecteurs propres satisfont alors

$$A\boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \boldsymbol{v_1} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 6v_{11} - 2v_{21} = \lambda_1 v_{11} \\ -2v_{11} + 3v_{21} = \lambda_1 v_{21} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A\boldsymbol{v_2} = \lambda_2 \boldsymbol{v_2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 6v_{12} - 2v_{22} = \lambda_2 v_{12} \\ -2v_{12} + 3v_{22} = \lambda_2 v_{22} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour construire la matrice orthogonale V il faut normer les vecteurs propres. Comme $\|\boldsymbol{v_1}\| = \|\boldsymbol{v_2}\| = \sqrt{5}$, on a $V = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ et donc

$$A = VDV^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

ii) Le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de (x_0, y_0) est, en écrivant $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(d^2), \qquad d = \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Comme la matrice hessienne $H := H_f(x_0, y_0)$ est symétrique, on peut la diagonaliser comme $H = UDU^T$, où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et les colonnes de U sont les vecteurs propres normés de H. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} UDU^T \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(d^2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{h} & \bar{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{k} \end{pmatrix} + d^2 \cdot \varepsilon(x,y) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \bar{h}^2 + \lambda_2 \bar{k}^2\right) + o(d^2) \end{aligned}$$

où $\begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{k} \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Dans la suite, on va négliger l'erreur parce qu'on peut la rendre arbitrairement petit en considérant un voisinage adéquat.

- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, on a $\lambda_1 \bar{h}^2 + \lambda_2 \bar{k}^2 \geq 0$. Ainsi $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ pour tout (x,y) dans un voisinage de (x_0,y_0) et (x_0,y_0) est un minimum local.
- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, on a $\lambda_1 \bar{h}^2 + \lambda_2 \bar{k}^2 \leq 0$. Ainsi $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ pour tout (x,y) dans un voisinage de (x_0,y_0) et (x_0,y_0) est un maximum local.
- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ (par exemple, l'autre cas est très similaire), on a $\lambda_1 \bar{h}^2 \geq 0$ et $\lambda_2 \bar{k}^2 \leq 0$. Ainsi $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ si $\bar{k} = 0$ et $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ si $\bar{h} = 0$. Plus précisément, en définissant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,$$

  on peut dans tout voisinage de (x_0,y_0) trouver des points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) tels que $f(x_1,y_1) < f(x_0,y_0) < f(x_2,y_2)$. Ainsi (x_0,y_0) est un point selle (cf. définition du cours).

iii) L'unique point stationnaire de f est $(0,0)$ et on a $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ qui a les valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -4$. La matrice des vecteurs propres correspondants est

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x+y\\ x-y\end{pmatrix}.$$

Il suit que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(4\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2\right) = 2\left(\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

et à partir de cette expression, il est facile à voir que $(0,0)$ est un point selle de f (en fait, $f(x,y) = g(x+y, x-y)$ où $g(u,v) = u^2 - v^2$, voir cas *ii*) de l'Ex. 7).

Exercice 3.

i) Le système

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\sin(x) = 0 \\ f_y(x,y) = 6y = 0 \end{cases}$$

donne les point stationnaires $(x,y) = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix}-\cos(x) & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} = -6\cos(x)\,,$$

on a

$$\Lambda_2(k\pi,0) = \begin{cases} -6, & k \text{ pair} \\ 6, & k \text{ impair} \end{cases}$$

Les points $(k\pi, 0)$ avec k pair sont donc des points selle avec $f(k\pi,0) = 3$ tandis que pour k impair, l'égalité $\Lambda_1(k\pi,0) = -\cos(k\pi) = 1 > 0$ implique que f admet des minimums locaux aux points $(k\pi,0)$ avec $f(k\pi,0) = 1$ (Fig. 2).

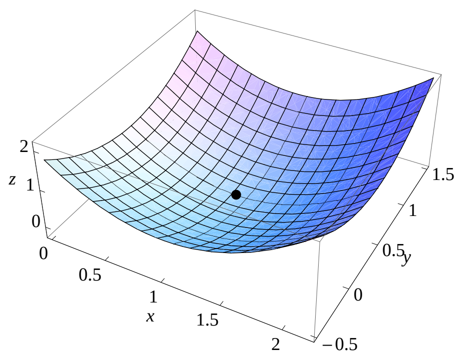

Fig. 1

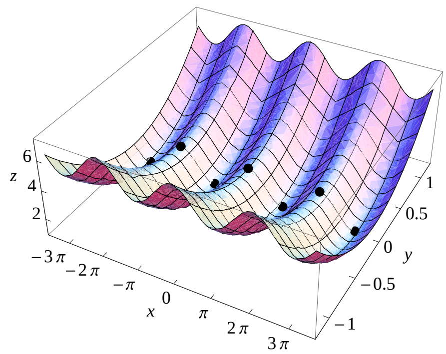

Fig. 2

ii) Comme

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 2x + 2y = 0 \\ f_y(x,y) = -3y^2 + 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 3(x^2+y^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad (x,y) = (0,0),$$

le seul point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix}6x+2 & 2\\ 2 & -6y+2\end{pmatrix} = -36xy + 12x - 12y\,,$$

on a $\Lambda_2(0,0) = 0$ ce qui ne permet pas de conclure sur la nature du point stationnaire. Mais comme $f(x,-x) = 2x^3$ et $f(0,0) = 0$, la fonction f prend dans tout voisinage de $(0,0)$ des valeurs positives et négatives; elle admet donc un point selle en $(0,0)$, cf. Fig. 3.

iii) On a

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6x + y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y(x-2y^2) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (0,0),$$

et donc le seul point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. On trouve ensuite

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} -6 & 2y \\ 2y & 2x - 12y^2 \end{pmatrix} = 68y^2 - 12x\,, \qquad \text{d'où} \quad \Lambda_2(0,0) = 0\,.$$

En isolant un carré parfait dans $f(x,y)$, on obtient

$$f(x,y) = -3\left(x - \frac{y^2}{6}\right)^2 - \frac{11}{12}y^4 \qquad \text{ou} \qquad f(x,y) = -\frac{11}{4}x^2 - \left(y^2 - \frac{x}{2}\right)^2,$$

ce qui implique $f(x,y) \leq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(0,0) = 0$, la fonction f admet un maximum local en $(0,0)$, cf. Fig. 4.

Remarque: Puisque $f(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; (x,y) = (0,0)$, le maximum de f en $(0,0)$ est absolu.

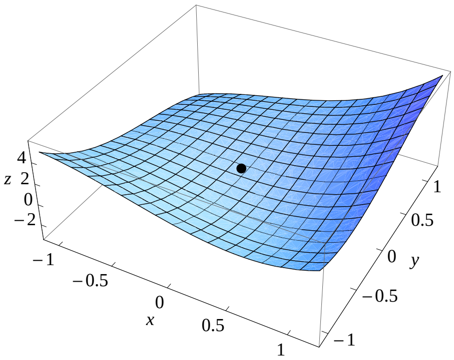

Fig. 3

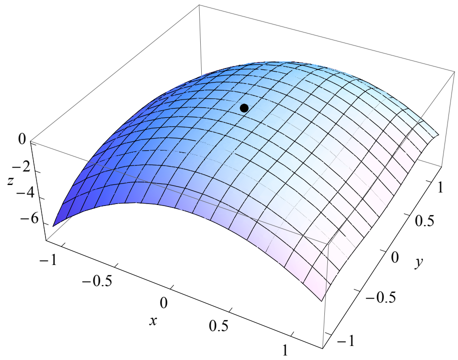

Fig. 4

Exercice 4.

i) On résout le système

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = & -4x & + & 4y & & & = 0 \\ f_y(x,y,z) = & 4x & - & 10y & + & 2z & = 0 \\ f_z(x,y,z) = & & & 2y & - & 2z & = 0 \end{cases}$$

pour obtenir le seul point stationnaire $(0,0,0)$. Ensuite on calcule le hessien et les mineurs principaux dominants de la matrice hessienne:

$$\Lambda_3(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \Lambda_1(x,y,z) = -4.$$

En $(0,0,0)$ on a

$$\Lambda_1(0,0,0) = -4 < 0, \qquad \Lambda_2(0,0,0) = 24 > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_3(0,0,0) = -32 < 0,$$

et donc la fonction f admet un maximum local en $(0,0,0)$ et $f(0,0,0) = 2$.

ii) Pour trouver les points stationnaire, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = & 4x - 3z^2 & = 0 \\ f_y(x,y,z) = & 3y^2 - 3 & = 0 \\ f_z(x,y,z) = & -6xz + 6z & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - 3z^2 = 0 \\ 3(y^2 - 1) = 0 \\ -6z(x-1) = 0 \end{cases}$$

Donc $y = \pm 1$ et soit $z = 0$ (ce qui implique $x = 0$), soit $x = 1$ (ce qui implique $z = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$). Les points stationnaires de f sont alors

$$(0,1,0), \quad (0,-1,0), \quad \left(1,1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1,-1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1,1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{et} \quad \left(1,-1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Ensuite on a

$$\Lambda_3(x,y,z) = \det H_f(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6z \\ 0 & 6y & 0 \\ -6z & 0 & -6(x-1) \end{pmatrix} = -72y\big(2(x-1) + 3z^2\big),$$

$$\Lambda_2(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 24y \quad \text{et} \quad \Lambda_1(x,y,z) = 4\,.$$

Evaluées aux points stationnaires ces expressions valent

$$\begin{aligned} \Lambda_3(0,1,0) &= 144 > 0, & \Lambda_2(0,1,0) &= 24 > 0 \\ \Lambda_3(0,-1,0) &= -144 < 0, & \Lambda_2(0,-1,0) &= -24 < 0 \\ \Lambda_3\left(1,1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -288 < 0, & \Lambda_2\left(1,1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 24 > 0 \\ \Lambda_3\left(1,-1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 288 > 0, & \Lambda_2\left(1,-1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -24 < 0 \\ \Lambda_3\left(1,1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -288 < 0, & \Lambda_2\left(1,1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 24 > 0 \\ \Lambda_3\left(1,-1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 288 > 0, & \Lambda_2\left(1,-1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -24 < 0 \end{aligned}$$

Comme $\Lambda_1 > 0$, f a un minimum local en $(0,1,0)$ où $f(0,1,0) = 2$, et tous les autres points stationnaires sont des points selle (voir schéma du cours).

Exercice 5.

i) Comme la fonction f admet des dérivées partielles partout à l'intérieur du domaine D, ses extremums absolus se trouvent parmi les points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D.

Points stationnaires à l'intérieur de D:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = & 2x & - & y & - & 1 = 0 \\ f_y(x,y) = & -x & + & 2y & - & 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (1,1).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_1(x,y) = 2 > 0\,,$$

le point $(1,1)$ est un minimum local de f. De plus on a $f(1,1) = -1$.

Sur le bord de D on a:

Notons d'abord que le bord de D est l'union des trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,0) : 0 \le x \le 3\} \cup \{(0,y) : 0 \le y \le 3\} \cup \{(x, 3-x) : 0 \le x \le 3\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, && 0 \le x \le 3, \\
f(0,y) &= y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, && 0 \le y \le 3, \\
f(x,3-x) &= 3(x^2 - 3x + 2) = 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right], && 0 \le x \le 3.
\end{aligned}$$

L'idée est maintenant de chercher les extremums de ces fonctions unidimensionnelles dans le domaine précisé qui se trouvent soit aux points stationnaires soit aux extrémités du domaine (cf. Analyse I). Notons d'abord $g(x) = f(x,0)$. Alors $g'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Puisque $g''(x) = 2 > 0$, g a un minimum local en $x = \frac{1}{2}$. De plus on a $g(0) = 0$ et $g(3) = 6$. On a donc

$$\max_{0 \le x \le 3} f(x,0) = f(3,0) = 6 \qquad \text{et} \qquad \min_{0 \le x \le 3} f(x,0) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

De même, on cherche les extremums des fonctions $h(y) = f(0,y)$ et $k(x) = f(x, 3-x)$. La fonction h a exactement le même comportement que g et pour k on a

$$\begin{aligned}
k'(x) &= 6\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3}{2}, && k\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4}, \\
k''(x) &= 6 > 0 \quad (\Rightarrow \text{ minimum local}), && k(0) = k(3) = 6,
\end{aligned}$$

si bien qu'on obtient

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \le y \le 3} f(0,y) = f(0,3) = 6, && \min_{0 \le y \le 3} f(0,y) = f\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}, \\
&\max_{0 \le x \le 3} f(x,3-x) = f(3,0) = f(0,3) = 6, && \min_{0 \le x \le 3} f(x,3-x) = f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que f admet un minimum absolu en $(1,1)$ de valeur $f(1,1) = -1$ et des maximums absolus en $(3,0)$ et en $(0,3)$ de valeur $f(3,0) = f(0,3) = 6$, voir Fig. 5.

ii) Comme f est de classe C^2 sur D, ses extremums absolus se trouvent soit en un point stationnaire à l'intérieur de D, soit sur le bord de D.

<u>Points stationnaires à l'intérieur de D:</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \ \ 4x - y - 6 = 0 \\ f_y(x,y) = -x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (2,2).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 15 > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_1(x,y) = 4 > 0,$$

le point $(2,2)$ est un minimum local de f. De plus on a $f(2,2) = -12$.

<u>Sur le bord de D on a:</u>

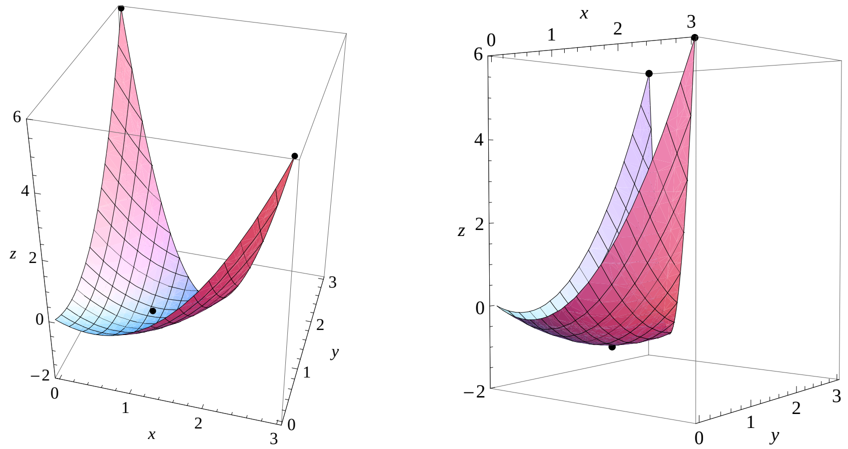

Fig. 5

Le bord de D est l'union des deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{(x,0) : -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}\right\} \cup \left\{(x, \sqrt{32-x^2}) : -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}\right\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$f(x,0) = 2x^2 - 6x = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}, \qquad -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2},$$

$$f(x, \sqrt{32-x^2}) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32-x^2}, \qquad -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}.$$

Sur la première partie du bord (le segment de l'axe x), f atteint son minimum en $x = \frac{3}{2}$ où $f\left(\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{9}{2}$ et son maximum en $x = -4\sqrt{2}$ où $f\left(-4\sqrt{2}, 0\right) = 8(8+3\sqrt{2})$. L'autre extrémité $x = 4\sqrt{2}$ n'est pas candidat pour le maximum global de f parce que $f(4\sqrt{2}) < f(-4\sqrt{2})$. Pour la deuxième partie (le demi-cercle), soit $g\colon [-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32-x^2}.$$

Alors g est dérivable sur $]-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}[$, où sa dérivée vaut

$$g'(x) = -6 - \sqrt{32-x^2} + \frac{x(x+6)}{\sqrt{32-x^2}} = \frac{-6\sqrt{32-x^2} - 32 + 2x^2 + 6x}{\sqrt{32-x^2}}.$$

Ainsi

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x - 16 = 3\sqrt{32-x^2} \quad \Rightarrow \quad (x^2+3x-16)^2 = 9(32-x^2)$$

$$\Rightarrow \quad x^4 + 6x^3 - 14x^2 - 96x - 32 = 0 \tag{1}$$

Par l'indication on sait que ce polynôme a des racines entières qui sont en fait $x_1 = 4$ et $x_2 = -4$ (trouvé en essayant). On a $g'(x_1) = 0$ et x_1 est donc un point stationnaire de g. (En fait, le polynôme (1) admet deux autres racines réelles mais celles-ci ainsi que x_2 ne sont pas des points stationnaires de g, ce sont des racines "artificielles" parce qu'on a pris le carré.)

La valeur de g en son point stationnaire est $g(4) = 0$. De plus, les points au bord de l'intervalle de définition de g sont aussi des candidats pour les extremums de g. On a $g(-4\sqrt{2}) = 64 + 24\sqrt{2} \approx 97.9$ et $g(4\sqrt{2}) = 64 - 24\sqrt{2} \approx 30.1$.

Ainsi le minimum global de f est atteint en $(2,2)$ et vaut $f(2,2) = -12$ et le maximum global est atteint en $(-4\sqrt{2}, 0)$ et vaut $f(-4\sqrt{2}, 0) = 8(8+3\sqrt{2})$.

Exercice 6.

Comme les dérivées partielles de f sont continues sur tout le domaine D, les extremums absolus sont atteints aux points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ ne s'annule jamais sur D, la fonction f n'admet aucun point stationnaire.
Puisque le domaine D est un parallélépipède rectangle parallèle aux axes, on peut déterminer le comportement de f sur le bord de D en examinant ses dérivées partielles. Pour $(x, y, z) \in D$ on a :

$\frac{\partial f}{\partial x} = z + 1 > 0$	$\Rightarrow$	f est croissante dans la direction x et donc maximal en $x = a$ et minimal en $x = 0$.
$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 < 0$	$\Rightarrow$	f est décroissante dans la direction y et donc maximal en $y = 0$ et minimal en $y = b$.
$\frac{\partial f}{\partial z} = x + 2 > 0$	$\Rightarrow$	f est croissante dans la direction z et donc maximal en $z = c$ et minimal en $z = 0$.

La fonction f a donc son maximum absolu en $(a, 0, c)$ et son minimum absolu en $(0, b, 0)$.
Afin de calculer les valeurs extrémales de f, on doit trouver son expression. A partir des dérivées partielles données, on obtient successivement

$$\begin{gathered}
\partial_y f(x,y,z) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = -y + g(x,z) \quad \Rightarrow \quad \partial_x f(x,y,z) = \partial_x g(x,z) = z+1 \\
\Rightarrow \quad g(x,z) = (z+1)x + h(z) \qquad \Rightarrow \qquad \partial_z f(x,y,z) = x + h'(z) = x + 2 \\
\Rightarrow \quad h(z) = 2z + C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad g(x,z) = (z+1)x + 2z + C \\
\Rightarrow \quad f(x,y,z) = -y + (z+1)x + 2z + C
\end{gathered}$$

La condition $f(0,0,0) = 3$ implique alors que $C = 3$ et $f(x,y,z) = (z+1)x - y + 2z + 3$. Ainsi le maximum absolu de f est $f(a,0,c) = a(c+1) + 2c + 3$ et son minimum absolu est $f(0,b,0) = 3 - b$.
Remarque: On aurait aussi pu calculer l'expression de f dès le départ mais l'approche prise ici est plus instructive.

Exercice 7.

Le gradient de g est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= 2\cos(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big) + \sin(\theta) \\
\frac{\partial g}{\partial \varphi} &= 2\sin(\theta)\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big)
\end{aligned}$$

Pour trouver les points stationnaires on distingue deux cas :

1) Si $\theta \in \{0, \pi\}$ on a $\sin(\theta) = 0$ et $\cos(\theta) \neq 0$, d'où $\sin(\varphi) = \cos(\varphi)$. Ainsi $\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{cases}$ ce qui mène aux points stationnaires

$$p_1 = (0, \tfrac{\pi}{4}), \quad p_2 = (0, \tfrac{5\pi}{4}), \quad p_3 = (\pi, \tfrac{\pi}{4}), \quad p_4 = (\pi, \tfrac{5\pi}{4})\,.$$

2) $\theta \in \,]0,\pi[\,$: Comme $\sin(\theta) \neq 0$ on a $\cos(\varphi) = -\sin(\varphi)$ et donc $\varphi = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases}$. La première équation devient alors

$$4\underbrace{\sin(\varphi)}_{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} + \tan(\theta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan(\theta) = \mp 2\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \begin{cases} \arctan(-2\sqrt{2}) + \pi \\ \arctan(2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Ainsi on a encore trouvé les deux points stationnaires

$$p_5 = \big(\arctan(-2\sqrt{2}) + \pi, \tfrac{3\pi}{4}\big) \quad \text{et} \quad p_6 = \big(\arctan(2\sqrt{2}), \tfrac{7\pi}{4}\big)\,.$$

Pour déterminer la nature de tous les points stationnaires trouvés on calcule la matrice hessienne de g

$$H_g(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big) & 2\cos(\theta)\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big) \\ 2\cos(\theta)\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big) & 2\sin(\theta)\big(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\big) \end{pmatrix}$$

et son déterminant

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\theta,\varphi) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\big(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\big) + 4\sin(\theta)^2\big(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\big)^2 \\ &\qquad\qquad - 4\cos(\theta)^2\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big)^2 \\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\big(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\big) + 4\sin(\theta)^2 - 4\cos(\theta)^2 - 8\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Pour tous les points du cas *1)* on a $\Lambda_2(p_i) = -8 < 0$ ($i = 1,\dots,4$), ce sont donc des points selle.
Comme

$$\tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2}{1 - \sin(x)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x)^2 = \frac{\tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}$$

et de manière similaire

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \tan(x)^2}\,,$$

on a pour les points du cas *2)*, p_5 et p_6,

$$\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \cos(\theta) = \mp\frac{1}{3}, \qquad \sin(\varphi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos(\varphi) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Ainsi on trouve $\Lambda_2(p_5) = \Lambda_2(p_6) = 8 > 0$ et comme $\Lambda_1(\theta,\varphi) = \cos(\theta) - 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big)$, on a $\Lambda_1(p_{5,6}) = \mp\frac{1}{3} \mp \frac{8}{3} = \mp 3$. La fonction g admet donc un maximum local en p_5 et un minimum local en p_6. Les directions $\mathbb{R}^3$ qui y correspondent sont

$$\boldsymbol{u}_{p_5} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{u}_{p_6} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

En comparant avec l'Ex. 3 de la Série 10, on voit que le sens du vecteur $\boldsymbol{u}_{p_5}$ qui maximise la pente g est celui du gradient de f au point concerné. Et le sens du vecteur $\boldsymbol{u}_{p_6}$ de pente minimale est celui de $-\nabla f$.

Exercice 8.

Soit d la distance entre le point $P=(x,y)$ et la droite $x+y=a$ $(a>0)$. Puisque la distance entre un point et une droite est mesurée dans la direction perpendiculaire à la droite, le point $(x,y)+d\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est sur la droite et vérifie donc

$$\left(x+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)+\left(y+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)=a \qquad \Rightarrow \qquad d=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-x-y).$$

Les distances de P aux droites $x=0$ et $y=0$ sont respectivement x et y. Par conséquent le produit des distances de P aux trois droites est donnée par la fonction

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,xy(a-x-y), \quad D(f)=\{(x,y): x,y\geq 0 \text{ et } x+y\leq a\}.$$

Comme on cherche P à l'intérieur du triangle ABC et que la fonction f admet des dérivées partielles en chaque point de $D(f)$, le maximum cherché est atteint en un point stationnaire de f à l'intérieur du domaine.

On résout donc le système

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(ay-2xy-y^2)=0 & (1)\\[2ex] f_y(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(ax-2xy-x^2)=0 & (2)\end{cases}$$

en calculant d'abord $\sqrt{2}\cdot\big((1)-(2)\big)$:

$$x^2-y^2-a(x-y)=(x-y)(x+y-a)=0 \quad \underset{x+y<a}{\Rightarrow} \quad x-y=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=y.$$

En insérant $x=y$ dans (1), on obtient $ax-3x^2=x(a-3x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=y=\frac{1}{3}a$ car on cherche un point à l'intérieur de $D(f)$ (i.e. $x>0$).

Il reste à vérifier que f atteint un maximum au point $\left(\frac{1}{3}\,a,\frac{1}{3}\,a\right)$. Le hessien de f est

$$\begin{aligned}\Lambda_2(x,y)=\det\begin{pmatrix} -\sqrt{2}y & \frac{a}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}(x+y)\\ \frac{a}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}(x+y) & -\sqrt{2}x\end{pmatrix} &= 2xy-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}(x+y)\right)^2\\ &=-2x^2-2y^2-2xy+2a(x+y)-\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

et donc $\Lambda_2\left(\frac{1}{3}\,a,\frac{1}{3}\,a\right)=\frac{1}{6}\,a^2>0$ et $\Lambda_1\left(\frac{1}{3}\,a,\frac{1}{3}\,a\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}\,a<0\,$.

La fonction f atteint donc son maximum au point $\left(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a\right)$ et on a $f\left(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a\right)=\frac{\sqrt{2}}{54}\,a^3$.