

Analyse avancée II – Série 11A

Échauffement. (Extremums)

Déterminer les points stationnaires de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - y + 1$ et étudier leur nature.

Exercice 1. (Points stationnaires)

Pour les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ données ci-dessous, étudier la nature du point stationnaire $(0, 0)$:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| i) $f(x, y) = x^2 + y^2$ | ii) $f(x, y) = x^2 - y^2$ | iii) $f(x, y) = -x^2 + y^2$ |
| iv) $f(x, y) = -x^2 - y^2$ | v) $f(x, y) = x^4 + y^4$ | vi) $f(x, y) = x^4 - y^4$ |
| vii) $f(x, y) = -x^4 + y^4$ | viii) $f(x, y) = -x^4 - y^4$ | |

Exercice 2. (Classification des points stationnaires)

- i) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
- ii) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , soit (x_0, y_0) un point stationnaire de f et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$. Etablir la nature de (x_0, y_0) à partir de chacune des trois conditions sur λ_1, λ_2 vues au cours.
- iii) Calculer les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ pour la fonction $f(x, y) = 4xy$ autour de son unique point stationnaire et en déduire sa nature.

Exercice 3. (Extremums, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

- i) $f(x, y) = 2 + 3y^2 + \cos(x)$
- ii) $f(x, y) = x^3 - y^3 + x^2 + 2xy + y^2$
- iii) $f(x, y) = -3x^2 + xy^2 - y^4$

Exercice 4. (Extremums, $\mathbb{R}^3$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

- i) $f(x, y, z) = -2x^2 - 5y^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 2$
- ii) $f(x, y, z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 4$

Exercice 5. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les extremums absolus de la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

- i) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$, où $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$
- ii) $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$, où $D = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 32\}$

Indication : le polynôme qui apparaîtra admet certaines racines entières.

Exercice 6. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^3$)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + 2.$$

Déterminer les extremums absolus de f sur le domaine

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}, \quad \text{où } a, b, c > 0,$$

sachant que $f(0, 0, 0) = 3$.

Exercice 7. (Pentes extrémales)

Soient la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$, le point $p_0 = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$, ainsi que le vecteur unitaire $\mathbf{u}$, donné en coordonnées sphériques (dans le référentiel local attaché en p_0) par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La dérivée directionnelle de f en p_0 suivant le vecteur $\mathbf{u}$ est donnée par la fonction $g : [0, \pi] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(\theta, \varphi) = 2 \sin(\theta) (\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) - \cos(\theta)$$

(cf. Ex. 3 de la Série 10). Trouver les extremums de g en calculant ses points stationnaires et calculer les vecteurs $\mathbf{u}$ associés. Comparer avec les résultats obtenus à la Série 10.

Exercice 8. (Dérivée (totale) et différentielle)

Soit V l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ équipé de la norme

$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|},$$

où $v \mapsto \|v\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ (par abus de notation nous utilisons la même notation pour la norme sur $\mathbb{R}^n$ et la norme matricielle sur V induite par cette norme). Soit la fonction $f : V \rightarrow V$ définie pour $X \in V$ par $f(X) = X^2$.

i) Montrer que f est différentiable en tout point $X_0 \in V$.

ii) Trouver la différentielle de f .

Exercice 9. (Norme d'une intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$)

Soient $I = [a, b]$, $a < b$, un intervalle fermé, $m \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Montrer que pour toute norme sur $\mathbb{R}^m$,

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt,$$

où par définition l'intégrale de f est le vecteur des intégrales des composantes de f .