Peter Wittwer

3 mai 2024

Analyse avancée II – Corrigé de la série 9B

Échauffement. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, par le théorème des accroissements finis (voir Analyse I), $\forall h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| \leq 1$, $\exists \theta \equiv \theta(h) \in \,]0,1[\,$, tel que

$$\begin{aligned}\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt \right| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x+\theta h,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x+\theta h,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| dt.\end{aligned}$$

La fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est uniformément continue sur $[x-1,x+1] \times [0,1]$ (voir le cours de lundi semaine 11), ce qui implique que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists \delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta \leq 1$, tel que $\forall h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq \delta$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x+\theta h,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre (par la définition de la limite $h \to 0$, voir Analyse I) que f est différentiable en x et que

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

La continuité de la fonction f' en x donné suit aussi de la continuité uniforme de la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sur $[x-1,x+1] \times [0,1]$ car, comme dans la borne précédente, on a que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists \delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta \leq 1$ tel que $y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leq \delta$ implique

$$\left| f'(x) - f'(y) \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(y,t) \right| dt \leq \varepsilon.$$

Exercice 1. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de dérivation sous l'intégrale donne

$$f'(x) = \sin\!\left(x\sqrt{1+x^2}\right) + \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\cos\!\left(x\sqrt{1+t^2}\right) dt$$

et en particulier, $f'(0) = 0$. En appliquant une deuxième fois la formule de dérivation sous l'intégrale on obtient

$$f''(x) = \cos\Big(x\sqrt{1+x^2}\Big) \cdot \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \sqrt{1+x^2}\,\cos\Big(x\,\sqrt{1+x^2}\,\Big) - \int_0^x (1+t^2)\,\sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\,\Big)\,dt$$

et donc en particulier, $f''(0) = 2$. Ainsi, f admet bien un minimum local en 0.

Exercice 2. (La fonction Gamma)

Nous commençons par donner quelques pistes concernant l'estimation d'intégrales. Comment peut-on montrer par exemple, que quelque soit $N \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_0^\infty t^N \mathrm{e}^{-t}\,dt$$

converge? Dans ce cas précis on peut intégrer N fois par parties pour trouver que l'intégrale vaut $N!$, mais le plus souvent il ne sera pas possible de calculer une intégrale explicitement et il faut se servir de la continuité et d'autres propriétés de la fonction pour démonter la convergence. Dans le cas présent on peut se convaincre que, donné N, il existe une constate $C > 0$ telle que

$$t^N \mathrm{e}^{-t} \leq C\mathrm{e}^{-t/2}.$$

Le choix de $\mathrm{e}^{-t/2}$ à droite est juste un choix possible, le but étant de borner la fonction donnée par une fonction simple à intégrer. En divisant par $\mathrm{e}^{-t/2}$ on voit que l'on obtient l'inégalité donnée en définissant C par

$$C = \sup_{t\geq 0} t^N \mathrm{e}^{-t/2}$$

(voir (Fig. 1)). Nous allons nous servir de ce genre d'estimation dans ce quit suit.

Pour tout $x \in \,]0, +\infty[$ l'intégrale qui définit $\Gamma(x)$ existe au sens d'une intégrale impropre sur $[0, +\infty[$ et la fonction Γ est donc bien définie.

i) Soit $g(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. On a que $g \in C^1\big(\,]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t}.$$

Pour montrer que $\Gamma \in C^1\big(\,]0, +\infty[\,, \mathbb{R}\big)$ il suffit de montrer que Γ est de classe C^1 dans un voisinage de tout point $x \in \,]0, +\infty[$. Soit donc $x \in \,]0, +\infty[$ et soit $I = [c, d]$, où $c, d \in \mathbb{R}$, $0 < c < x < d$. Pour $x \in I$, les intégrales

$$\int_0^\infty g(x,t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

convergent absolument et donc uniformément (voir la définition et la remarque du cours) car

$$\big|g(x,t)\big| \leq Ct^{c-1}e^{-t/2}, \qquad \text{où} \qquad C = \sup_{\substack{c\leq x\leq d\\ t\geq 0}} \frac{\big|g(x,t)\big|}{t^{c-1}e^{-t/2}} < \infty,$$

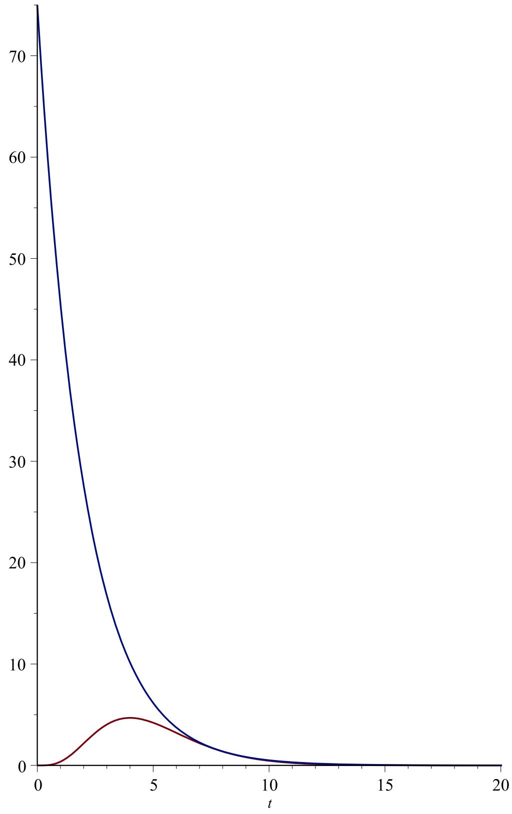

Figure 1: La fonction $t^4\mathrm{e}^{-t}$ est bornée par la fonction $C\mathrm{e}^{-t/2}$ avec $C = \frac{4096}{\mathrm{e}^4}$

et, pour $c' \in \mathbb{R}$, $0 < c' < c$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)(x,t)\right| \leq C' t^{c'-1} e^{-t/2}, \qquad \text{où} \qquad C' = \sup_{\substack{c' \leq x \leq d \\ t \geq 0}} \frac{\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|}{t^{c'-1}e^{-t/2}} < \infty,$$

et les fonctions $t^{c-1}e^{-t/2}$ et $t^{c'-1}e^{-t/2}$ sont positives et intégrables au sens des intégrales généralisées. On peut donc dériver sous l'intégrale et l'on obtient que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Remarque : pour être précis, vu que pour $x < 1$ l'intégrale est impropre en $t = 0$ et $t = +\infty$, on coupe l'intégrale en une intégrale entre 0 et 1 et une intégrale entre 1 et $+\infty$. La convergence uniforme en $t = 0$ est définie en termes de celle à l'infinie en effectuant le changement de coordonnées $t = 1/s$, ce qui revient à faire les vérifications indiquées.

ii) On a que $g \in C^\infty\big(]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$ et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \ln(t)^k\, t^{x-1} e^{-t},$$

ce qui permet de montrer par récurrence que $\Gamma \in C^\infty\big(]0,+\infty[,\mathbb{R}\big)$, car pour $c' \in \mathbb{R}$,

$0 < c' < c$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq C'(k) t^{c'-1} e^{-t/2}, \qquad \text{où} \qquad C'(k) = \sup_{\substack{c' \leq x \leq d \\ t \geq 0}} \frac{\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right|}{t^{c'-1}e^{-t/2}} < \infty,$$

et les fonctions $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}$ sont donc toutes uniformément intégrables en t. On peut donc dériver sous l'intégrale et l'on obtient que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k \, t^{x-1} e^{-t} dt.$$

iii) Pour $x > 0$, on obtient par intégration par partie (sur l'intervalle $[\varepsilon, R]$, puis passage à la limite $\varepsilon \to 0+$ et $R \to +\infty$) que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t = 0 + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t = x\Gamma(x) \, .$$

De plus $\Gamma(1) = 1$, ce qui implique par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n! \, .$

Exercice 3. (Intégrales généralisées, procédure de “cut-off”)

i) Pour $0 < \varepsilon < 1$ et $R > 1$, on obtient par intégration par partie que

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt,$$

ce qui implique que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ R \to +\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin(t)}{t} \, dt$$

existe, car $\forall t > 0$, $\cos(t) \geq 1 - \dfrac{1}{2} t^2$ (critère pour le reste pour les séries numériques alternées) et donc

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}\right\} \leq \frac{5}{2} \, \frac{1}{1+t^2},$$

(voir (Fig. 2), ce qui montre que

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt \leq \frac{5\pi}{4}.$$

ii) Soit $\forall t \neq 0$, $g(x,t) = e^{-tx} \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $g(x,0) = 1$. On a que $g \in C^\infty(]0,+\infty[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc $g \in C^\infty(]0,+\infty[\times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Puisque $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| < 1$, on a $\big|g(x,t)\big| \leq e^{-tx}$ et par conséquent pour $x \in \,]0,+\infty[$, $f(x)$ est bien définie. Pour montrer que f est de classe $C^1\big(]0,+\infty[\,, \mathbb{R}\big)$

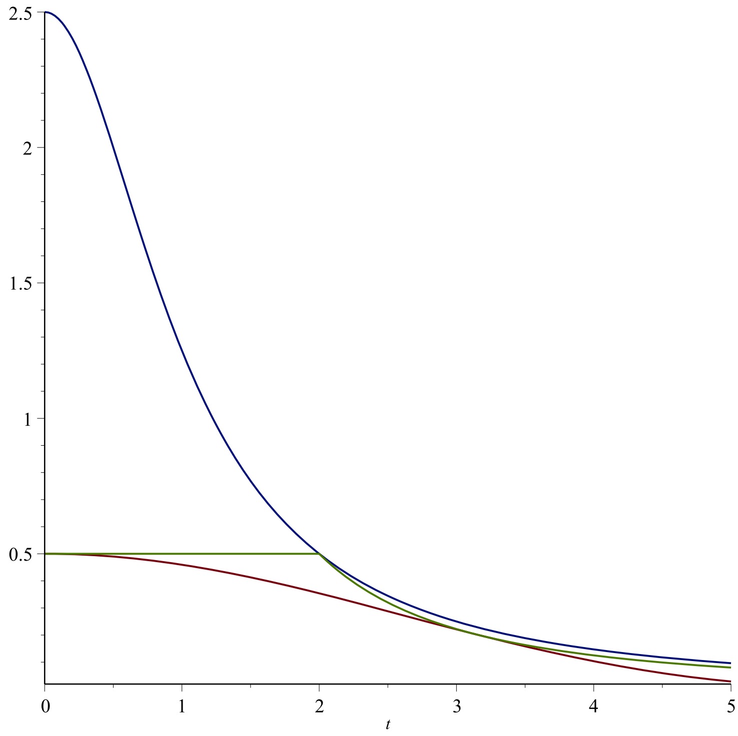

Figure 2: Les fonctions $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$, $\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}\right\}$ et $\frac{5}{2}\frac{1}{1+t^2}$

il faut montrer la convergence uniforme (en x) des intégrales de g et $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sur t . De nouveau l'idée est d'intégrer par partie. Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}_+$. Si $x > 1$, alors si $A \geq -\ln(\varepsilon)$,

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-A} \leq \varepsilon,$$

ce qui montrer que pour $x > 1$ l'intégrale est bien uniformément convergente. Pour le cas où $0 < x \leqslant 1$, nous allons effectuer deux intégrations par parties. Soit $A > 0$. Puisque toutes les limites en $+\infty$ des fonctions concernées sont nulles, nous avons

$$\begin{aligned}
I_A := \int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= e^{-Ax}\frac{\cos(A)}{A} - \int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - x\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-Ax}\frac{\cos(A)}{A} - \int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + xe^{-Ax}\frac{\sin(A)}{A} - x^2\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t} - x\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t, \\
&= e^{-Ax}\frac{\cos(A)}{A} - \int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + xe^{-Ax}\frac{\sin(A)}{A} - x^2 I_A - x\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

et donc, en isolant I_A, et puisque la valeurs absolue de toutes les fonctions cosinus, sinus et exponentielles présentes peuvent être majorées par 1, nous obtenons pour $A \geq \dfrac{4}{\varepsilon}$

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1+x}{A} + (1+x)\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) \leqslant \frac{4}{A} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que pour $0 < x \leq 1$ l'intégrale est bien uniformément convergente. En résumé, en choisissant $A \geq \max\left\{\frac{4}{\varepsilon}, -\ln(\varepsilon)\right\}$, ceci démontre la convergence uniforme de l'intégrale qui définit f pour tout $x \in]0, +\infty[$. On procédant de la même manière (mais en intégrant trois fois par partie pour $0 < x \leq 1$) on montre que la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est aussi uniformément intégrable ce qui montre que $f \in C^1\left(]0, +\infty[\right)$.

Finalement, pour montrer que $\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) \equiv I$, on utilise de nouveau une intégration par partie pour montrer que

$$I - f(x) = \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-tx}\right) \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-tx} - txe^{-tx}\right) \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt\,.$$

Pour tout $x > 0$ et $t \geq 0$ on a que $0 \leq 1 - e^{-tx} - txe^{-tx} \leq \min\left\{1, \frac{1}{2}t^2x^2\right\}$ ainsi que $0 \leq 1 - \cos(t) \leq 2$ et donc

$$\begin{aligned}
\left|I - f(x)\right| &= \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-tx} - txe^{-tx}\right) \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt \\
&= \int_0^{1/x} \left(1 - e^{-tx} - txe^{-tx}\right) \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt \\
&\qquad + \int_{1/x}^{+\infty} \left(1 - e^{-tx} - txe^{-tx}\right) \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt \\
&\leq \int_0^{1/x} x^2\, dt + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{2}{t^2}\, dt \leq 3x\,.
\end{aligned}$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $0 < x \leq \delta$ implique $\left|I - f(x)\right| \leq \varepsilon$, ce qui par définition veut dire que $\lim_{x \to 0+} f(x) = I$.

iii) Par le résultats du point *ii*) on peut dériver sous l'intégrale et on obtient que

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt.$$

En intégrant deux fois par partie, nous trouvons que $f'(x) = -1 - x^2 f'(x)$, c'est-à-dire $f'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$, et par conséquent $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $f(x) = -\arctan(x) + c$.

iv) D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz on a pour $x > 0$,

$$f(x)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} e^{-2xt}\, \mathrm{d}t\right) \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt\right) = \frac{1}{2x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt,$$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et donc, $f(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}$ et $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Nous avons donc montré qu'au sens d'une intégrale de Riemann généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$