

Analyse avancée II – Série 9B

Échauffement. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit g une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et soit $f(x) = \int_0^1 g(x, t) dt$. Montrer que f est de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt.$$

Exercice 1. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x \sin(x \sqrt{1+t^2}) dt.$$

Montrer que f admet un minimum local en $x = 0$.

Exercice 2. (La fonction Gamma)

Soit la fonction $\Gamma:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Montrer :

- i) $\Gamma \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt$.
- ii) $\Gamma \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt$.
- iii) $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ (par convention $0! = 1$).

Exercice 3. (Intégrales généralisées, procédure de “cut-off”)

Montrer par la procédure qui suit qu'au sens des intégrales généralisées

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

- i) Montrer (par intégration par partie) que l'intégrale converge.
- ii) Montrer que la fonction $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$, est de classe $C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et que $I = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$.
- iii) Calculer la fonction $f'(x)$ et montrer (par intégration par partie) que $f'(x) = -1 - x^2 f'(x)$.
- iv) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, de sorte que $I = - \int_0^{+\infty} f'(x) dx$.