

Analyse avancée II – Corrigé de la série 10A

Échauffement 1.

Soit $f(x, y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Puisque $\partial_x f(x, y) = 3x^2y + 2x$ et $\partial_y f(x, y) = x^3 + 2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$z = 3 + 5(x - 1) + 3(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3y - z = 5 .$$

Exercice 1.

Par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(x, y, z) = 0$ définit localement une fonction $z = f(x, y)$ de classe C^1 telle que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$. Comme f est différentiable car C^1 , l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est (voir § 4.2 du cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) ,$$

donc

$$(z - z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 . \quad (1)$$

En utilisant les relations entre les dérivées partielles de f et F données par le théorème des fonctions implicites, (1) s'écrit

$$\begin{aligned} (z - z_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 , \end{aligned}$$

où $\cdot$ dénote le produit scalaire. Comme cette dernière équation est vraie pour tout (x, y, z) proche de (x_0, y_0, z_0) , le gradient de F en (x_0, y_0, z_0) est orthogonal au plan tangent en ce point.

Remarque: Formellement le gradient ∇f d'une fonction f est un vecteur colonne. Mais pour alléger la notation dans les corrigés, on l'écrit comme vecteur ligne.

Exercice 2.

Soit $F(x, y, z) = xz^2 - 2x^2y + y^2z$. En évaluant F au point $(1, 1, z_0)$ on a

$$F(1, 1, z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0^2 - 2 + z_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = 1 \text{ ou } z_0 = -2 .$$

Selon le cours sur les fonctions implicites, l'équation du plan tangent à la surface $F(x, y, z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \text{où} \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Puisque

$$\nabla F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F) = (z^2 - 4xy, -2x^2 + 2yz, 2xz + y^2),$$

on a pour le point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

$$\nabla F(1, 1, 1) = (-3, 0, 3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3(x-1) + 0(y-1) + 3(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = 0.$$

Pour $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -2)$ on a

$$\nabla F(1, 1, -2) = (0, -6, -3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0(x-1) - 6(y-1) - 3(z+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y + z = 0.$$

Échauffement 2.

En appliquant directement la définition vue au cours on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos(\varphi), t \sin(\varphi)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 \cos(\varphi)^2 t \sin(\varphi)}{t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)) = \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Les figures ci-dessous montrent le graphe de f (Fig. 1) et celui de la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(0, 0)$ en fonction de l'angle φ qui détermine la direction autour de l'origine (Fig. 2).

Exercice 3.

Rappel: Pour un vecteur unitaire $\mathbf{e}$, la dérivée directionnelle d'une fonction f de classe C^1 au point p_0 suivant un vecteur $\mathbf{e}$ est donnée par $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \mathbf{e}$.

i) Observons qu'on a

$$f(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y), \quad \text{avec} \quad f_1(x, y) = (x - 2y)^2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

Ainsi on peut utiliser le résultat de l'Exercice 1, ii) de la Série 7 pour calculer $\nabla f(p_0)$. En effet, on a

$$f_1(p_0) = 1, \quad \nabla f_1(x, y) = 2(x - 2y) (1, -2)^T \quad \Rightarrow \quad \nabla f_1(p_0) = (-2, 4)^T,$$

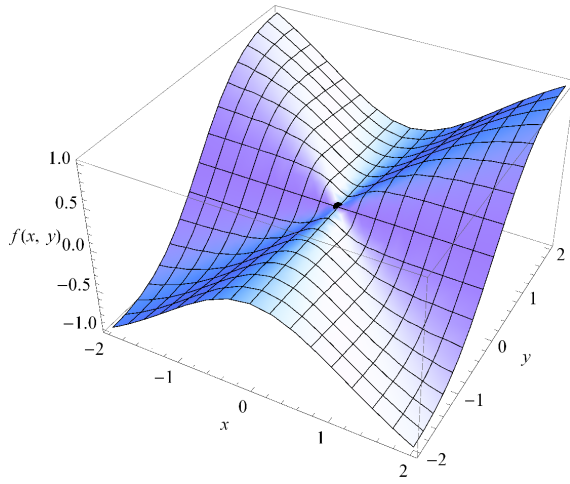


Fig. 1

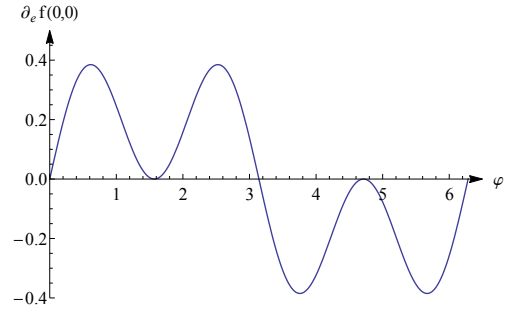


Fig. 2

$$f_2(p_0) = \ln(3), \quad \nabla f_2(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} (2x, 2y)^T \Rightarrow \nabla f_2(p_0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T,$$

et donc (noter que $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0) &= \left[f_2(p_0) \nabla f_1(p_0) + f_1(p_0) \nabla f_2(p_0) \right] \cdot \mathbf{e} \\ &= \left[\ln(3) (-2, 4)^T + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T \\ &= \frac{2(3\ln(3) + 1)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

ii) Pour la fonction g on va utiliser le résultat de l'Exercice 1, iii) de la Série 7 puisqu'on a

$$g(x, y) = \frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}, \quad \text{avec} \quad g_1(x, y) = e^{2x(y+1)} \quad \text{et} \quad g_2(x, y) = 3 + x^2 y^4.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} g_1(p_0) &= e^4, & \nabla g_1(x, y) &= e^{2x(y+1)} (2y+2, 2x)^T \Rightarrow \nabla g_1(p_0) = e^4 (4, 2)^T, \\ g_2(p_0) &= 4, & \nabla g_2(x, y) &= (2xy^4, 4x^2y^3)^T \Rightarrow \nabla g_2(p_0) = (2, 4)^T, \end{aligned}$$

pour obtenir finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{e}}(p_0) &= \left[\frac{1}{g_2(p_0)} \cdot \nabla g_1(p_0) - \frac{g_1(p_0)}{g_2(p_0)^2} \cdot \nabla g_2(p_0) \right] \cdot \mathbf{e} \\ &= \left[\frac{e^4}{4} (4, 2)^T - \frac{e^4}{16} (2, 4)^T \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T = \frac{11e^4}{8\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

On commence par étudier la continuité de f en $(0, 0)$. Comme on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0),$$

f n'est pas continue en $(0, 0)$. Ainsi f n'est pas différentiable en ce point et on doit appliquer la définition pour calculer la dérivée directionnelle. Soit $\mathbf{e} = (u, v)^T$ un vecteur unitaire. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu, 0 + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tut^2v^2}{t^2u^2 + t^4v^4} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{uv^2}{u^2 + t^2v^4} = \begin{cases} \frac{v^2}{u}, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'existence des dérivées directionnelles en un point dans toutes les directions n'est donc pas suffisante pour qu'une fonction soit continue et à fortiori différentiable en ce point!

Exercice 5.

- i) Pour une fonction f de classe C^1 , la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0)$ au point p_0 suivant le vecteur (unitaire) $\mathbf{e}$ est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \mathbf{e}.$$

La fonction f donnée est bien C^1 . Puisque

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T \quad \text{et} \quad \nabla f(1, -1, 2) = (-2, 2, -1)^T,$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(1, -1, 2) = (-2, 2, -1)^T \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T = -\frac{8}{3}.$$

- ii) La pente de f en p_0 dans le sens du vecteur unitaire $\mathbf{u}$ est donnée par la dérivée directionnelle suivant ce vecteur unitaire (voir § 7.1), c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(p_0) &= \nabla f(p_0) \cdot \mathbf{u} = (-2, 2, -1)^T \cdot (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))^T \\ &= 2 \sin(\theta) (\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) - \cos(\theta) =: g(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

où $g : [0, \pi] \times [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- iii) On sait du cours (§ 7.2.2) qu'en un point où f est différentiable, la pente de la tangente au graphe est maximale (minimale) dans le sens du gradient (opposée au gradient) et qu'elle est égale à (l'opposée de) la norme du gradient. Au point $p_0 = (1, -1, 2)$, la pente maximale (minimale) vaut donc

$$\|\nabla f(1, -1, 2)\| = 3 \quad (-\|\nabla f(1, -1, 2)\| = -3).$$

Les directions correspondantes sont $\pm \frac{\nabla f(1, -1, 2)}{\|\nabla f(1, -1, 2)\|} = \pm \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$. Pour trouver les angles (θ, φ) donnant lieu à ces directions, on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \frac{2}{3} \\ \pm \frac{2}{3} \\ \mp \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \theta = \arccos\left(\mp \frac{1}{3}\right) &\Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1 - \left(\mp \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\varphi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{argmax} g(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \frac{3\pi}{4}\right) \\ \operatorname{argmin} g(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \frac{7\pi}{4}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

La pente de f en p_0 est donc maximale pour les angles $(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \frac{3\pi}{4}\right)$ et minimale pour $(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \frac{7\pi}{4}\right)$.

Exercice 6.

Les développements limités d'ordre n pour une fonction de trois variables s'obtiennent de la formule donnée au cours.

Dans la suite on pose $p_0 := (x_0, y_0, z_0)$ pour simplifier la notation.

i) Le développement linéaire de la fonction $f(x, y, z)$ au voisinage de p_0 est

$$f(x, y, z) = f(p_0) + f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) + f_z(p_0)(z - z_0) + d \cdot \varepsilon(x, y, z),$$

où $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, et la notation $\varepsilon(x, y, z)$ signifie comme toujours que $\lim_{(x, y, z) \rightarrow p_0} \varepsilon(x, y, z) = 0$.

ii) Pour le développement limité d'ordre 2 on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(p_0) + f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) + f_z(p_0)(z - z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(p_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(p_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(p_0)(z - z_0)^2 \\ &\quad + f_{xy}(p_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{xz}(p_0)(x - x_0)(z - z_0) + f_{yz}(p_0)(y - y_0)(z - z_0) \\ &\quad + d^2\varepsilon(x, y, z), \end{aligned}$$

où d est définie comme ci-dessus, et $\lim_{(x, y, z) \rightarrow p_0} \varepsilon(x, y, z) = 0$.

Exercice 7.

i) Le polynôme de Taylor $p_2(x, y)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x, y)$ au voisinage de l'origine est donné par

$$p_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2.$$

Ici on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1, \\ f_x(x, y) &= 2xy + 2y - 5, & f_y(x, y) &= x^2 + 2x + 6y, \\ f_{xx}(x, y) &= 2y, & f_{xy}(x, y) &= 2x + 2, & f_{yy}(x, y) &= 6, \end{aligned}$$

d'où

$$f(0,0) = 1, \quad f_x(0,0) = -5, \quad f_y(0,0) = 0, \quad f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = 2, \quad f_{yy}(0,0) = 6,$$

et donc

$$p_2(x, y) = 1 + (-5) \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y^2 = 1 - 5x + 2xy + 3y^2.$$

ii) Comme on a vu à l'Exercice 4, ii), le polynôme de Taylor $p_2(x, y, z)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables autour de l'origine est donné par

$$\begin{aligned} p_2(x, y, z) = & f(0,0,0) + f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z + \\ & \frac{1}{2}f_{xx}(0,0,0)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0,0)y^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(0,0,0)z^2 + \\ & f_{xy}(0,0,0)xy + f_{xz}(0,0,0)xz + f_{yz}(0,0,0)yz \end{aligned}$$

Ici on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= e^x + y \sinh(z), \\ f_x(x, y, z) &= e^x, \quad f_y(x, y, z) = \sinh(z), \quad f_z(x, y, z) = y \cosh(z), \\ f_{xx}(x, y, z) &= e^x, \quad f_{yy}(x, y, z) = 0, \quad f_{zz}(x, y, z) = y \sinh(z), \\ f_{xy}(x, y, z) &= 0, \quad f_{xz}(x, y, z) = 0, \quad f_{yz}(x, y, z) = \cosh(z), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(0,0,0) &= 1, \quad f_x(0,0,0) = 1, \quad f_y(0,0,0) = 0, \quad f_z(0,0,0) = 0, \quad f_{xx}(0,0,0) = 1, \\ f_{yy}(0,0,0) &= 0, \quad f_{zz}(0,0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0,0) = 0 = f_{xz}(0,0,0), \quad f_{yz}(0,0,0) = 1, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} p_2(x, y, z) &= 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot z^2 + \\ & 0 \cdot xy + 0 \cdot xz + 1 \cdot yz \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + yz. \end{aligned}$$

iii) Le polynôme de Taylor $p_1(x, y)$ d'ordre 1 de $f(x, y)$ au voisinage de $(1, -2)$ est donné par

$$p_1(x, y) = f(1, -2) + f_x(1, -2)(x - 1) + f_y(1, -2)(y + 2).$$

Comme

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3xy + x^2 - y + 5x - 3, \\ f_x(x, y) &= 3y + 2x + 5, \quad f_y(x, y) = 3x - 1, \end{aligned}$$

et donc

$$f(1, -2) = -1, \quad f_x(1, -2) = 1, \quad f_y(1, -2) = 2.$$

Ainsi

$$p_1(x, y) = -1 + (x - 1) + 2(y + 2) = x + 2y + 2.$$

iv) On a

$$f(x, y) = (\cos(x))^{\frac{1}{2} + \sin(y)} = \exp\left(\left(\frac{1}{2} + \sin(y)\right) \ln(\cos(x))\right),$$

$$f_x(x, y) = -\left(\frac{1}{2} + \sin(y)\right) (\cos(x))^{\sin(y) - \frac{1}{2}} \sin(x),$$

$$f_y(x, y) = \ln(\cos(x)) (\cos(x))^{\frac{1}{2} + \sin(y)} \cos(y),$$

d'où

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad f_x\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_y\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \ln(2).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(2) \left(y - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{24} (\ln(2) + 4) - \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(2) y. \end{aligned}$$

Pour i), l'erreur $d^2 \cdot \varepsilon(x, y)$ doit satisfaire $\lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon(x, y) = 0$, où $d = \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ici on a

$$d^2 \cdot \varepsilon(x, y) = f(x, y) - p_2(x, y) = x^2 y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1 - (1 - 5x + 2xy + 3y^2) = x^2 y$$

et donc, en utilisant les coordonnées polaires $x = d \cos(\varphi)$, $y = d \sin(\varphi)$,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon(x, y) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{(d \cos(\varphi))^2 (d \sin(\varphi))}{d^2} = \lim_{d \rightarrow 0} d \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi) = 0,$$

puisque $|\cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)| \leq 1$ uniformément en $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Exercice 8.

i) Méthode 1: Les dérivées partielles de la fonction $f(x, y, z)$ sont

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 2z e^{2xz+y}, & f_y(x, y, z) &= e^{2xz+y}, & f_z(x, y, z) &= 2x e^{2xz+y} \\ f_{xx}(x, y, z) &= 4z^2 e^{2xz+y}, & f_{yy}(x, y, z) &= e^{2xz+y}, & f_z(x, y, z) &= 4x^2 e^{2xz+y} \\ f_{xy}(x, y, z) &= 2z e^{2xz+y}, & f_{xz}(x, y, z) &= (2 + 4xz) e^{2xz+y}, & f_{yz}(x, y, z) &= 2x e^{2xz+y} \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} f_x(0, 0, 0) &= 0, & f_y(0, 0, 0) &= 1, & f_z(0, 0, 0) &= 0 \\ f_{xx}(0, 0, 0) &= 0, & f_{yy}(0, 0, 0) &= 1, & f_z(0, 0, 0) &= 0 \\ f_{xy}(0, 0, 0) &= 0, & f_{xz}(0, 0, 0) &= 2, & f_{yz}(0, 0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme de Taylor $p_2(x, y, z)$ d'ordre 2 est

$$p_2(x, y, z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz.$$

Méthode 2: On a $f(x, y, z) = g(h(x, y, z))$ avec $g(u) = e^u$ et $h(x, y, z) = 2xz + y$. Puisque $h(0, 0, 0) = 0$, on doit utiliser le développement limité (DL) de g en $u = 0$, c'est-à-dire

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 \tilde{\varepsilon}(u),$$

avec $\lim_{u \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}(u) = 0$. On remplace $u = 2xz + y$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 1 + 2xz + y + \frac{(2xz + y)^2}{2} + (2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + 2x^2 z^2 + 2xyz + (2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + d^2 \varepsilon(x, y, z), \end{aligned}$$

avec $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et

$$\varepsilon(x, y, z) = \frac{2x^2 z^2 + 2xyz + (2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Les termes $2x^2 z^2$ et $2xyz$ ont été mis dans le reste car ils sont d'ordre supérieur à 2 (4 et 3 dans ce cas). On vérifie que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \varepsilon(x, y, z) = 0$. En utilisant les coordonnées sphériques on vérifie facilement que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \frac{2x^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \frac{2xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

et $|(2xz + y)^2 / (x^2 + y^2 + z^2)| < C$ pour tout (x, y, z) , avec $C > 0$ une constante. Il s'ensuit

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \left| \frac{(2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y)}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} C |\tilde{\varepsilon}(2xz + y)| = 0,$$

vu que $\lim_{u \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}(u) = 0$. On a donc bien trouvé $\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \varepsilon(x, y, z) = 0$ et donc

$$p_2(x, y, z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz.$$

ii) Méthode 1: Les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2 \cos(2x + y^2), & f_y(x, y) &= 2y \cos(2x + y^2), \\ f_{xx}(x, y) &= -4 \sin(2x + y^2), & f_{yy}(x, y) &= 2 \cos(2x + y^2) - 4y^2 \sin(2x + y^2), \\ f_{xy}(x, y) &= -4y \sin(2x + y^2) \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} f_x(1, 1) &= 2 \cos(3), & f_y(1, 1) &= 2 \cos(3), \\ f_{xx}(1, 1) &= -4 \sin(3), & f_{yy}(1, 1) &= 2 \cos(3) - 4 \sin(3), & f_{xy}(1, 1) &= -4 \sin(3). \end{aligned}$$

Par la formule du cours on a alors pour le polynôme de Taylor $p_2(x, y)$ d'ordre 2

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= \sin(3) + 2 \cos(3) (x - 1) + 2 \cos(3) (y - 1) + \frac{1}{2}(-4 \sin(3)) (x - 1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(2 \cos(3) - 4 \sin(3)) (y - 1)^2 + (-4 \sin(3)) (x - 1)(y - 1) \\ &= \sin(3) + 2 \cos(3) (x - 1) + 2 \cos(3) (y - 1) - 2 \sin(3) (x - 1)^2 \\ &\quad + (\cos(3) - 2 \sin(3)) (y - 1)^2 - 4 \sin(3) (x - 1)(y - 1) \end{aligned}$$

Méthode 2: On a $f(x, y) = g(l(x, y))$ avec $g(u) = \sin(u)$ et $l(x, y) = 2x + y^2$. Puisque $l(1, 1) = 3$, on doit utiliser le DL de g en $u = 3$, c'est-à-dire

$$\sin(u) = \sin(3) + \cos(3)(u - 3) - \frac{\sin(3)}{2}(u - 3)^2 + (u - 3)^2 \tilde{\varepsilon}(u)$$

avec $\lim_{u \rightarrow 3} \tilde{\varepsilon}(u) = 0$.

Comme on cherche le DL dans un point (x_0, y_0) non-nul, on doit explicitement écrire $x = x_0 + h = 1 + h$ et $y = y_0 + k = 1 + k$ avant de remplacer u :

$$u = l(x, y) = l(1 + h, 1 + k) = 2(1 + h) + (1 + k)^2 = 3 + 2h + 2k + k^2.$$

Avec ceci on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(3) + \cos(3)(2h + 2k + k^2) - \frac{\sin(3)}{2}(2h + 2k + k^2)^2 + (2h + 2k + k^2)^2 \tilde{\varepsilon}(l(x, y)) \\ &= \sin(3) + 2 \cos(3) h + 2 \cos(3) k + \cos(3) k^2 - \frac{\sin(3)}{2}(4h^2 + 8hk + 4k^2) + d^2 \varepsilon(x, y) \\ &= \sin(3) + 2 \cos(3) h + 2 \cos(3) k - 2 \sin(3) h^2 + (\cos(3) - 2 \sin(3)) k^2 \\ &\quad - 4 \sin(3) h k + d^2 \varepsilon(x, y), \end{aligned}$$

où $d = \sqrt{h^2 + k^2}$ et ε est défini de manière similaire à l'exercice précédent, c'est à dire qu'il contient $\tilde{\varepsilon}$ et les termes d'ordre supérieur.

Ce résultat correspond bien à celui obtenu par la méthode 1.

Exercice 9. Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

$$\square \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\square \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$$

$$\square \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

On calcule la dérivée partielle concernée. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Remarque: Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-5y^4(x^4 + y^4) - 4y^3(x^5 - y^5)}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{-y^8 - 5y^4x^4 - 4y^3x^5}{(x^4 + y^4)^2}$$

et il est facile à montrer (en passant en coordonnées polaires par exemple) que la limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

n'existe pas.