7.2. Le cas d'une fonction différentiable

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, f différentiable en $(x_0,y_0) \in D$ et soit $\underline{v} = (v_1, v_2)^T$, $\underline{v} \neq 0$. Soit

$$g(t) = f(\underbrace{x_0 + t\cdot v_1\,,\ y_0 + t\,v_2}_{\equiv}) = (f \circ h)(t)$$

$$h(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t\cdot v_1 \\ y_0 + t\cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Puisque f est différentiable en (x_0,y_0) on a (dérivée en chaîne)

multiplication des matrices

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) = g'(0) = \underbrace{f'(\underbrace{h(0)}_{=(x_0,y_0)})}_{\left[\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \middle|\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ \right]} \cdot \underbrace{h'(0)}_{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}$$

$$= \left\langle \nabla f(x_0,y_0)\,,\ \underline{v} \right\rangle$$

voir § 5.1
isomorphisme des espaces vectoriels

Définition bis (cas où f est différentiable)
Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D ouvert, f différentiable en $\underline{x}_0 \in D$, et soit $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) := \left\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)\, v_i$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

Remarque: cette définition est équivalente à la définition avec la limite sous l'hypothèse que f soit différentiable.

Remarque: si f est différentiable on obtient aucune nouvelle information sur f

Remarque: (cas f différentiable)
Soit $\underline{e}$ un vecteur unité et supposons que $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$

Alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$ est maximal si $\underline{e}$ et $\nabla f(\underline{x}_0)$ sont colinéaires c'est-à-dire pour

$$\underline{e} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

car dans ce cas on a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0) = \left\langle \nabla f(\underline{x}_0), \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} = \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

$\leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \underbrace{\|\underline{e}\|}_{=1}$ Cauchy-Schwarz

donc maximal pour des vecteurs colinéaires !

Exemples (fonctions de classe C^1)

1) $f(x,y) = e^{x\cdot y}$, $(x_0,y_0) = (1,0)$, $\underline{v} = (1,1)^T$

i) $\left.\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = (e^{x\cdot y}\cdot y,\ e^{x\cdot y}\cdot x)^T \\ \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,0) = \left\langle (0,1)^T, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 1 \end{array}\right\}$ Définition bis

ii) $g(t) = f(1+t, 0+t)$

$$\left.\begin{array}{l} = e^{(1+t)\cdot t} = e^{t+t^2} \\ g'(0) = e^{t+t^2}(1+2t)\Big|_{t=0} = 1 \end{array}\right\}$$ Définition originale calculée avec g.

2) $f(x,y,z) = e^{x\cdot y\cdot z}$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,0)$

$$\underline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

i) $\nabla f(x,y,z) = (e^{xyz}yz,\ e^{xyz}xz,\ e^{xyz}xy)^T$

$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(1,1,0) = \left\langle (0,0,1)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ii) $g(t) = e^{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}t)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{3}}t)\cdot(\overset{\text{zéro}}{0}+\frac{1}{\sqrt{3}}t)} = \ldots =$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t + \underbrace{t\cdot\varepsilon(t)}_{=\,o(t)}} = 1 + \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}\,t + t\cdot\varepsilon(t)$$

$\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

le mieux est d'utiliser les développements limité

"composition des développements limités"

$$e^X = 1 + X + \underbrace{X\cdot\varepsilon(X)}_{=\,o(X)}$$

$\lim_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0$

unicité du développement limité

$$= g(0) + \boxed{g'(0)}\cdot t + \underbrace{t\cdot\varepsilon(t)}_{=\,o(t)}$$

Donc $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(1,1,0)$.

8. Approximation de Taylor, développements limités

8.1. Développements limités d'ordre un et deux ($n=2$)

Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, f de classe $C^1(D)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$. Alors f possède un développement limité d'ordre un dans un voisinage de (x_0,y_0) :

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{\overset{\shortparallel}{p_1(x,y)}} + d\cdot\varepsilon(x,y)$$

où $d = \left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0.$

Le polynôme $p_1(x,y)$ est appelé le polynôme de Taylor d'ordre un de f en (x_0,y_0). Ce polynôme approxime f linéairement dans un voisinage de (x_0,y_0).

Si f est de classe $C^2(D)$, alors f possède un développement limité d'ordre deux dans un voisinage de (x_0,y_0) :

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)}_{\overset{\shortparallel}{p_2(x,y)}} + d^2\varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

$$= f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\underbrace{\qquad + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \mathrm{Hess}(f)(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= p_2(x,y)}$$

où (rappel, voir la section 4.5.4)

$$\mathrm{Hess}(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

est la matrice hessienne de f en (x_0,y_0). Ici, la matrice hessienne est symétrique, car on a supposé f de classe C^2 (voir la remarque de la section 4.5.4). Le polynôme $p_2(x,y)$ est le polynôme de Taylor d'ordre deux de f en (x_0,y_0). Il approxime f d'une manière quadratique dans un voisinage de (x_0,y_0)

<u>Exemple:</u> $f(x,y) = \sin(2x+y) + 3\cdot\cos(x+y)$

$$(x_0,y_0) = (0,0) \qquad \text{(à titre d'exemple)}$$

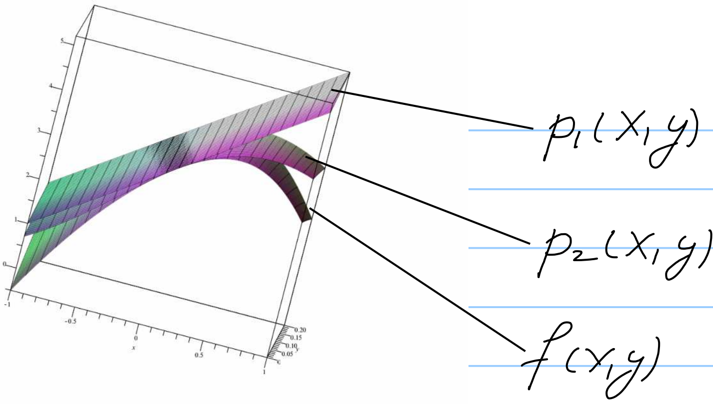
$f(0,0) = 3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -3$

$$p_2(x,y) = 3 + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -3x-3y \\ -3x-3y \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$= 3 + 2x + y - \frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{3}{2}y^2$$



Deuxième méthode de calcul (composition des développements limités)

Puisque $2x+y\big|_{(0,0)} = 0 =: z_1$ et

$$x+y\big|_{(0,0)} = 0 =: z_2$$

on peut calculer $p_2(x,y)$ par la composition des développements limités de $\sin(z)$ en $z = z_1 = 0$ et de $\cos(z)$ en $z = z_2 = 0$ avec (les développements limités de) $2x+y$ et $x+y$ (voir Analyse I pour cette technique). On a:

$$\sin(z) = z + z^2\,\varepsilon(z) \qquad \text{avec } \lim_{z\to 0}\varepsilon(z) = 0$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + z^2\varepsilon(z) \qquad \text{avec } \lim_{z\to 0}\varepsilon(z) = 0$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x+y) + \boxed{(2x+y)^2\,\varepsilon(2x+y)}^{(1)} \\ &\quad + 3\left(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + \boxed{(x+y)^2\,\varepsilon(x+y)}^{(2)}\right) \\ &= 3 + 2x + y - \frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{3}{2}y^2 + \underbrace{d^2\varepsilon(x,y)}_{(1)+(2)\ \text{voir la remarque}} \end{aligned}$$

Remarque concernant les restes
(voir la proposition 2.6)

$$(|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|x||y| \geqslant 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad 2|x||y| \leqslant x^2+y^2 = d^2 \quad , \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Ceci implique que $(x+y)^2\varepsilon(x+y) = d^2\varepsilon(x,y)$ et que $(2x+y)\,\varepsilon(2x+y) = d^2\varepsilon(x,y)$ car on a

$$(x+y)^2 \leqslant x^2+y^2+2|x||y| \leqslant 2\cdot d^2$$

et

$$(2x+y)^2 \leqslant 4x^2+y^2+4|x||y| \leqslant 4(x^2+y^2)+4|x||y| \leqslant 6\,d^2$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x+y) = 0$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(2x+y) = 0$.

8.2. Développements limités d'ordre N

Rappel: Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert, f N fois dérivable sur I, $x_0 \in I$. Alors

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{N!}f^{(N)}(x_0)(x-x_0)^N + \\ + (x-x_0)^N\,\varepsilon(x) \end{aligned}\right\} (*)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Démonstration:

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}{(x-x_0)^N} =$$

$$\underset{\substack{N-1 \text{ fois}\\ \text{B.H.}}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(x_0) - f^{(N)}(x_0)(x-x_0)}{N!\,(x-x_0)} = 0$$

car $f^{(N-1)}$ dérivable

Avec $h = x - x_0 \iff x = x_0 + h$ on obtient pour $(*)$

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \dots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_0)\, h^N + |h|^N \varepsilon(x_0+h)}$$

ou encore avec l'application linéaire

$$\frac{d}{dx} : \begin{array}{ccc} C^k(I) & \longrightarrow & C^{k-1}(I) \\ f & \longmapsto & \frac{d}{dx} f = f' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & f' \\ C^k(I) & & C^{k-1}(I) \end{array}$$

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \left(\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right)^{\ell} f \right)(x_0) + |h|^N \varepsilon(x_0+h)}$$

<u>terme $\ell=0$:</u> $\frac{1}{0!}\Big(\underbrace{\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right)^{0}}_{\text{application identité par convention}} f\Big)(x_0) = f(x_0)$ (zéro)

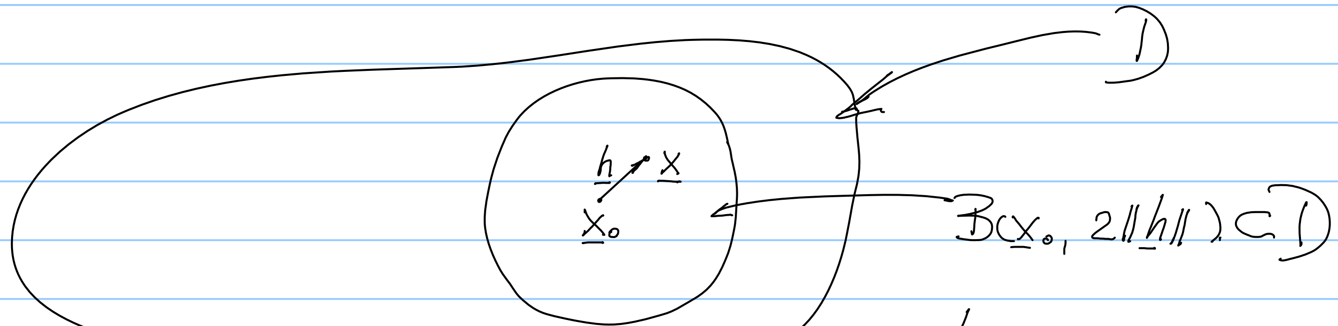
<u>terme $\ell=1$:</u> $\frac{1}{1!}\left(\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right) f \right)(x_0) = h \cdot f'(x_0)$

<u>terme $\ell=2$:</u> $\frac{1}{2!}\left(\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right)^2 f \right)(x_0) = \frac{1}{2}\left(\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right)\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right) f \right)(x_0)$

$$= \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{d}{dx} f' \right)(x_0) = h^2 f''(x_0)$$

etc.

<u>Généralisation à $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^N(D)$</u>



$\underline{h} = \underline{x} - \underline{x}_0$

On définit la fonction $g \in C^N(]-2,2[, \mathbb{R})$ par.

$$g(t) = f(\underline{x}_0 + t\,\underline{h}) \qquad (f: D \to \mathbb{R})$$

$$g'(t) = f'(\underline{x}_0 + t\,\underline{h}) \cdot \underline{h}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0 + t\,\underline{h})\, h_j \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}\right)$$

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)'(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{h}) \cdot \underline{h}\right) h_i$$

$$\vdots \qquad = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0 + t\,\underline{h})\, h_i h_j$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = g(1) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} g^{(\ell)}(0) + \|\underline{h}\|^N \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) \qquad \lrcorner$$

Théorème soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert f de classe $C^N(D)$, $x_0 \in D$. Alors f possède un développement limité d'ordre N dans un voisinage de $\underline{x}_0$:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \left(\langle \underline{h}, \nabla \rangle^{\ell} f\right)(\underline{x}_0) + d^N \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})$$

où $d = \|\underline{h}\|$ et $\lim\limits_{\underline{h} \to 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0$

Exemple: ($n = 2$, coordonnées cartesiens, développement limité de $f(x,y)$ en (x_0, y_0), $\underline{h} = (h, k)^T$ et $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^T$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} \left(\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\ell} f\right)(x_0, y_0) + d^N \varepsilon(x_0 + h, y_0 + h)$$

où $d = \sqrt{h^2 + k^2}$

Rappel : formule du binôme (voir Analyse I)

$$(a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^{\ell-m} b^m \quad \text{(on suppose que } a\cdot b = b\cdot a\text{)}$$

$$\binom{\ell}{m} = \frac{\ell!}{m!\,(\ell-m)!} = \frac{\ell(\ell-1)\cdot\ldots\cdot(\ell-m+1)}{m!}$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \ldots$$

Pour $N=3$ on obtient donc (car $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}$) :

$$\begin{aligned}
f(\underbrace{x_0+h}_{=x}, \underbrace{y_0+k}_{=y}) &= f(x_0,y_0) + \left(\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right)(x_0,y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right)(x_0,y_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\right)(x_0,y_0) \\
&\quad + d^3\varepsilon(x_0+h, y_0+k) \\
&= \underbrace{\begin{aligned} & f(x_0,y_0) + h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right) \\
&+ \frac{1}{6}\Big(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0) + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0) \\
&\qquad + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0) + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)\Big)\end{aligned}}_{=:\,p_3(x,y)} \\
&\quad + d^3\varepsilon(\underbrace{x_0+h}_{=x}, \underbrace{y_0+k}_{=y})
\end{aligned}$$

etc.