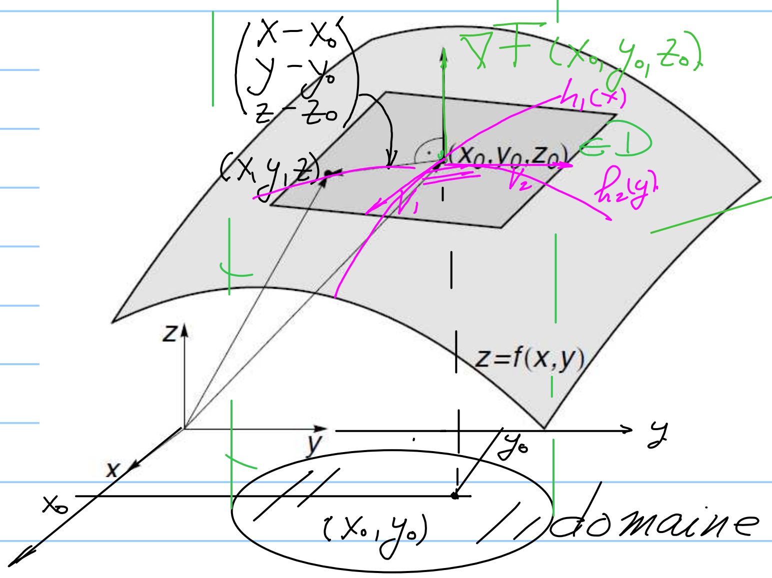
6.2.2. L'équation du plan tangent, version implicite

Donné $f(x,y)$ avec $f(x_0,y_0) = z_0$, le plan tangent est donné par l'équation (voir 4.5.2 et 4.8) :

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \quad (*)$$



domaine de f

$D \subset \mathbb{R}^3$ le domaine de F :

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ F(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \end{cases}$$

ici $D(f) \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} v_1 = \left(1,\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^T \\ v_2 = \left(0,\ 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^T \end{cases}$$

voir 4.5.2, ces deux vecteurs engendrent le plan tangent

$v_1 = h_1'(x_0)$ où $h_1(x) = (x, y_0, f(x,y_0))^T$

$v_2 = h_2'(y_0)$ où $h_2(y) = (x_0, y, f(x_0,y))^T$

$$(*) \iff 1\cdot(z-z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

$$\iff \left\langle \left(\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{=\ \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}},\ \underbrace{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{=\ \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}},\ 1 \right)^T, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

produit scalaire

$$\iff \left(\text{en multipliant avec } \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0\right)$$

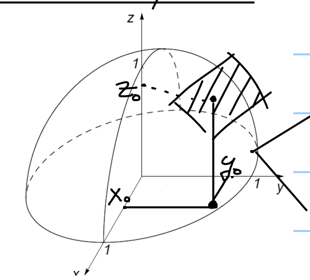
$$\left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)^T}_{\equiv\ (\nabla F)(x_0,y_0,z_0)},\ \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

A noter que $\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0,z_0),\ v_1 \right\rangle = 0$

$$\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0,z_0),\ v_2 \right\rangle = 0$$

Conclusion: $(\nabla F)(x_0,y_0,z_0)$ est orthogonal au plan tangent au graphe de f ($=$ surface de niveau de F de niveau zéro) en (x_0,y_0,z_0)

Exemple: $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$



$F(x,y,z)=0$ surface de la sphère de rayon 1.

$\Longleftrightarrow$

$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ "hémisphère nord"

Soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2<1$ et $z_0=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

On a $F(x_0, y_0, z_0)=0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)=2z_0\neq 0$

L'équation du plan tangent à la surface de niveau zéro de F en (x_0,y_0,z_0) est:

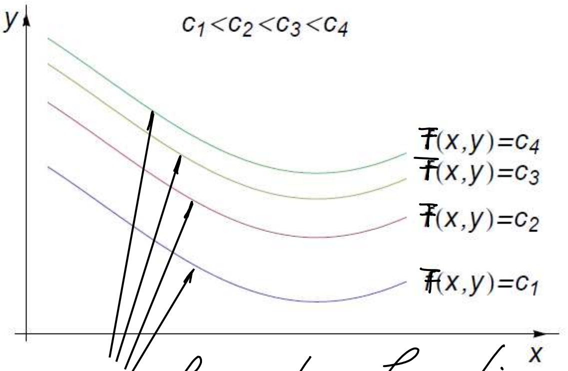
$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad (*)$$

et ce plan est aussi le plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y)$ en $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$. A noter que $(*)$ est bien défini même si $z_0=0$. Dans ce cas on obtient l'équation d'un plan qui est vertical.

6.3. "Lignes" de niveau

($n=2$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geq 2$)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1



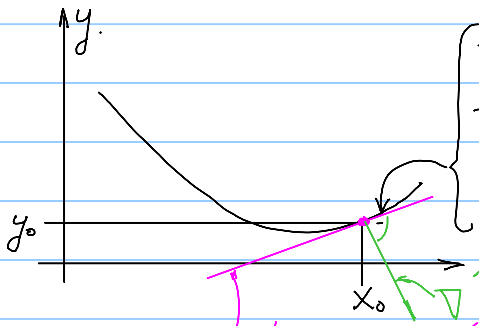
$\Leftrightarrow F_4(x,y)=0$ où $F_4(x,y)=F(x,y)-c_4$

$\vdots$

$\Leftrightarrow F_1(x,y)=0$ où $F_1(x,y)=F(x,y)-c_1$

$\Leftrightarrow$ graphes de fonctions f_i telles que $F_i(x, f_i(x))=0$

On a donc le schéma suivant:



$$\begin{cases} F(x,y) = c = F(x_0,y_0) \Leftrightarrow \\ F_c(x,y)=0 \text{ où } F_c(x,y)=F(x,y)-c \Leftrightarrow \\ \text{graphe de } f_c(x) \text{ où } F_c(x, f_c(x))=0 \end{cases}$$

$\nabla F_c(x_0,y_0) = \nabla F(x_0,y_0)$ (supposé $\neq 0$)

tangente au graphe de f_c en $(x_0, y_0 = f_c(x_0))$

Equation de la tangente en (x_0,y_0):

$$y = y_0 + \underbrace{f_c'(x_0)}_{\displaystyle = -\frac{\frac{\partial F_c}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F_c}{\partial y}(x_0,y_0)}} (x-x_0) \qquad (*)$$

$$-\frac{\frac{\partial F_c}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F_c}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

car $F_c(x,y) = F(x,y) - c$

ou, en écriture implicite (en supposant $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$):

$$\Leftrightarrow \quad (y-y_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} (x-x_0) = 0$$

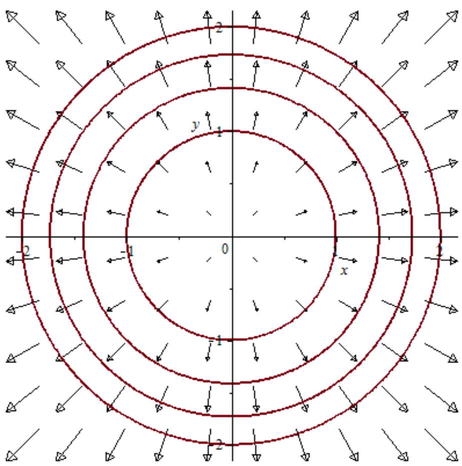
et en multipliant avec $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

$$\boxed{\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow (*).}$$

<u>Conclusion:</u> $(\nabla F)(x_0,y_0)$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau de F passant par le point (x_0,y_0), c.-à-d. la ligne de niveau de F de niveau $c = F(x_0,y_0)$

<u>Remarque:</u> si $(\nabla F)(x_0,y_0) \neq 0$ alors ou bien $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites

<u>Exemple:</u>



$F(x,y) = x^2+y^2.$

pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a.

$$\nabla F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est un vecteur orthogonal à la tangente au cercle donné par $F(x,y) = c = F(x_0,y_0)$.

6.4 Théorème (des fonctions implicites)

Soient des ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ et $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$, $(x,y) \longmapsto F(x,y)$ une fonction de classe C^1. Supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in U \times V$ tel que

$$\boxed{F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq 0.}$$

Notation : $\forall x \in U$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) := F_2'(y)$, où $F_2 : V \to \mathbb{R}^m$, $y \mapsto F(x,y)$

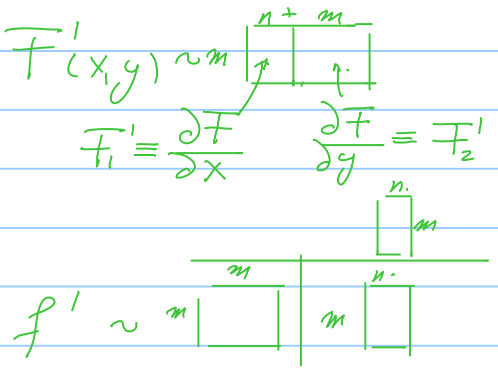
Alors :

i) il existe des voisinages $\tilde{\tilde{U}} \subset U$ de x_0 et $\tilde{V} \subset V$ de y_0 et une fonction $f : \tilde{\tilde{U}} \longrightarrow \tilde{V}$ tel que

$$\boxed{\forall x, y \in \tilde{\tilde{U}} \times \tilde{V} \quad \big(F(x,y) = 0 \iff y = f(x) \big)}$$

ii) la fonction f est de classe C^1 et on a

$$\boxed{f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \qquad (**)}$$

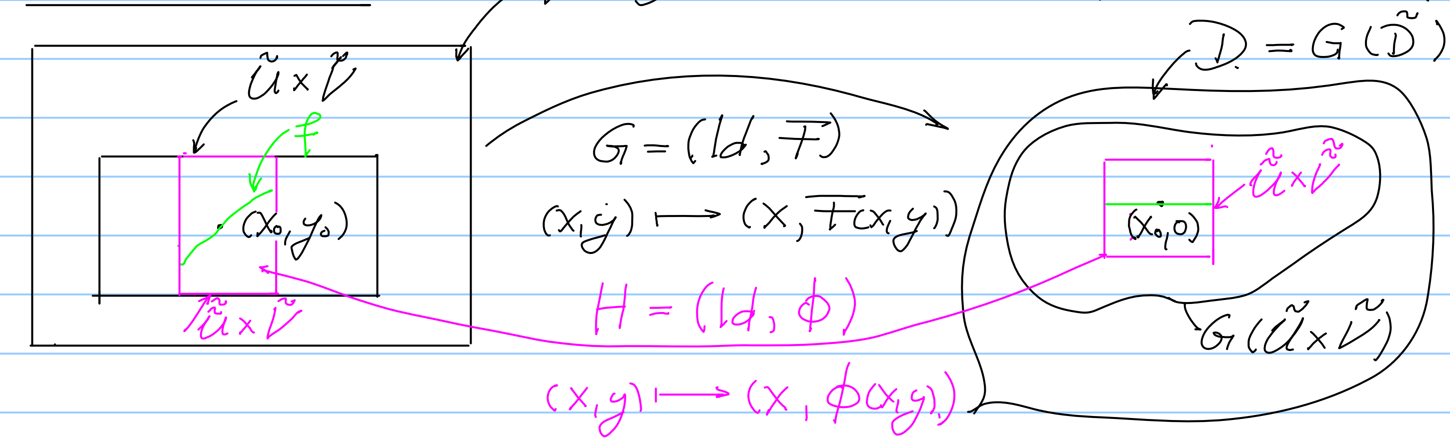


$\forall y \in V$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) := F_1'(x)$, où $F_1 : U \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto F(x,y)$

$f : \tilde{\tilde{U}} \longrightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{U}} \subset \mathbb{R}^n$.

$f' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Démonstration $\quad U \times V = \tilde{D}$ du théorème d'inversion



On définit la fonction

$$G : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$
$$(x,y) \longmapsto (x, F(x,y)).$$

et applique le théorème de l'inversion locale. La fonction G est de classe C^1 et

$$G'(x_0,y_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}\right)$$

avec $\det(G'(x_0,y_0)) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq 0$, et

on suppose que $\tilde{\mathcal{U}} \times \tilde{\mathcal{V}}$ soit tel que G y soit injective (sinon réduire la taille des ouverts). On a

$$G(x_0,y_0) = (x_0, F(x_0,y_0)) = (x_0, 0)$$

et il existe donc une fonction réciproque $H = G^{-1}$ définie dans un voisinage $\tilde{\tilde{\mathcal{U}}} \times \tilde{\tilde{\mathcal{V}}}$ de $(x_0, 0)$ telle que

$$\forall (x,y) \in \tilde{\tilde{\mathcal{U}}} \times \tilde{\tilde{\mathcal{V}}} \qquad (G \circ H)(x,y) = (x,y) \qquad (*).$$

et H est de classe C^1. H doit être de la forme (identité sur les x) $H(x,y) = (x, \phi(x,y))$ pour une certaine fonction $\phi : \tilde{\tilde{\mathcal{U}}} \times \tilde{\tilde{\mathcal{V}}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{V}}$ avec $\phi(x_0, 0) = y_0$ et $(*)$ devient

$$\forall (x,y) \in \tilde{\tilde{\mathcal{U}}} \times \tilde{\tilde{\mathcal{V}}} \qquad (x, F(x, \phi(x,y))) = (x,y).$$

Soit $f : \tilde{\tilde{\mathcal{U}}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{V}}$, $f(x) = \phi(x,0)$. Alors $f(x_0) = y_0$ et $\forall x \in \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}$ $F(x, f(x)) = 0$ ($\Rightarrow$ $(**)$ en dérivant), et donné $x \in \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}$ $y = f(x)$ est l'unique $y \in \tilde{\mathcal{V}}$ tel que $F(x,y) = 0$ $\square$

7. La dérivée directionnelle

7.1. Définitions

Définition Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$
$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. Soit
$\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$ et $\underline{x}_0 \in D$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle unilaterale (ou dérivée directionnelle au sens de Dini) de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$, et le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

Remarque: soit $\underline{e} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \underline{v}$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(\underline{x}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$$

Démonstration:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ (t > 0)}} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \overset{t = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot s}{=} \|\underline{v}\| \cdot \lim_{\substack{s \to 0 \\ (s > 0)}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{e} \cdot s) - f(\underline{x}_0)}{s}$$

Remarque: pour $n=1$ la dérivée directionnelle unilatérale pour $\underline{e}=(1)$ est égale à la dérivée à droite et pour $\underline{e}=(-1)$ à moins la dérivée à gauche (vérifier !)

Remarque: pour $\underline{v}=\underline{e}=(0,..,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{position } i}}{1},0...0)^T$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$$

Remarque: si $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$ existe, alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$

Proposition: soit $g(t):=f(\underline{x}_0+t\underline{v})$. Alors.

$$\left.\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)\\ g'(0+) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) \end{aligned}\right\}(*)$$

dérivée à droite en $t=0$.

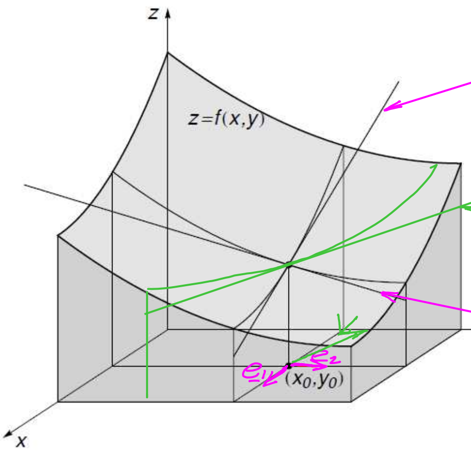
Démonstration:

$$g'(0):=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}$$

$$g'(0+):=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}$$

Remarque: $(*)$ est une (bonne) manière de calculer la dérivée directionnelle (unilatérale)

Attention ! f n'est pas forcément différentiable en (x_0, y_0) (voir les exemples plus loin).



pente $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

pente $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)$, où $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$

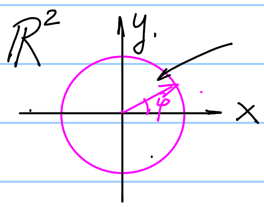
pente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Exemple 1

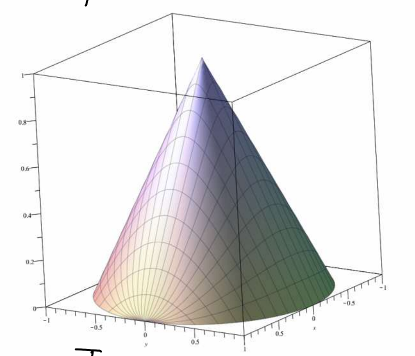
Soit $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in D = B(0,1)$

disque ouvert de rayon 1 centré en 0 (voir 2.3)

$\mathbb{R}^2$



$D = B(0,1)$



Soit $(x_0, y_0) = (0,0)$, et

$\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ (φ arbitraire mais fixe)

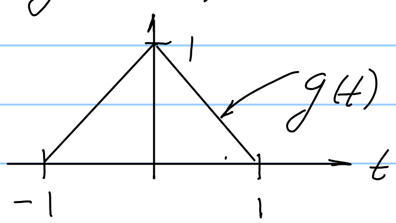
i) en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cos(\varphi), 0+t\sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-|t|-1}{t} \text{ n'existe pas.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(0+t\cos(\varphi), 0+t\sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1-t-1}{t} = -1.$$

ii) avec la fonction $g(t)$

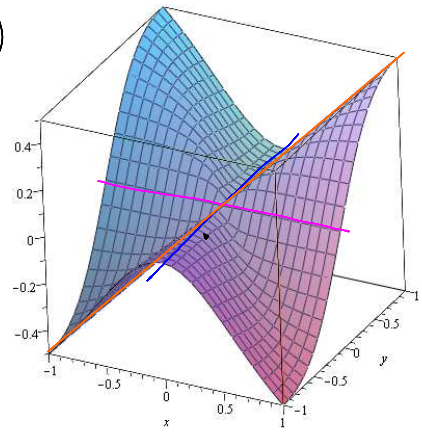
$$g(t) = f(0+t\cdot\cos(\varphi), 0+t\cdot\sin(\varphi)) = 1-|t|$$



$g'(0+) = -1$

$g'(0)$ n'existe pas

Exemple 2 (voir aussi 4.4 et 4.8)



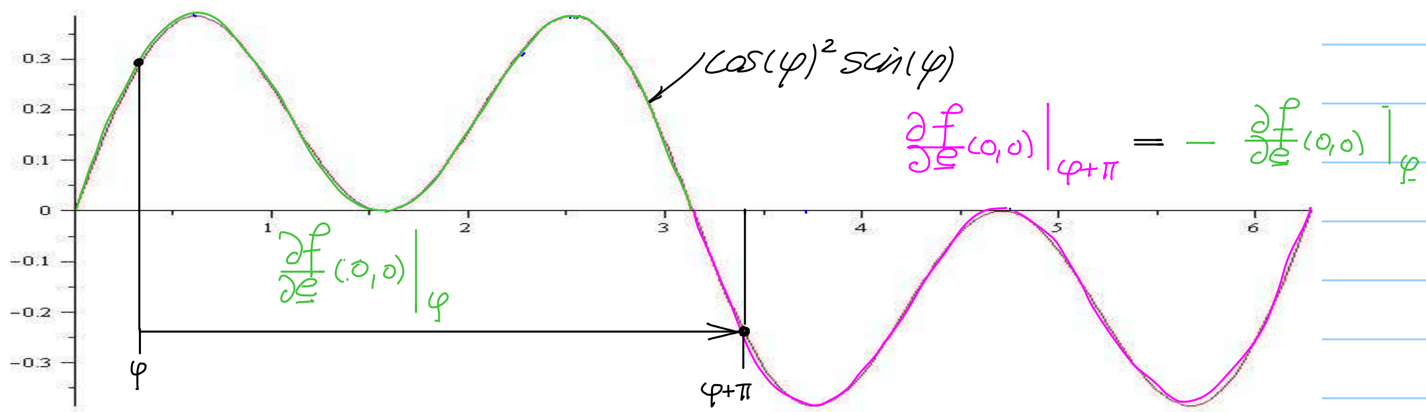
Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit $(x_0,y_0) = (0,0)$ et $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{t^2 \cos(\varphi)^2 t \cdot \sin(\varphi)}{t^2} - 0}{t} = \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi)$$



Remarque: si la dérivée directionnelle existe pour tout vecteur $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ on a nécessairement

$$\boxed{\forall \varphi \in [0,\pi[\quad \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)\Big|_{\varphi+\pi} = -\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)\Big|_{\varphi}}$$

Pour résumer l'exemple (voir aussi 4.4 et 4.8)

La fonction de l'exemple 2 est continue en $(0,0)$ et les dérivées partielles en $(0,0)$ existent. En fait la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur $\underline{v} \neq 0$, mais la fonction f n'est quand-même pas différentiable en $(0,0)$, elle n'admet pas de plan tangent en $(0,0)$.