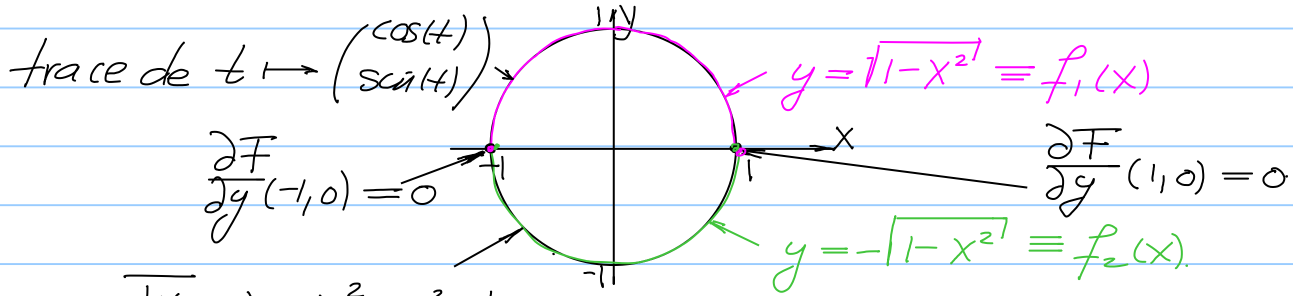
6. Théorème des fonctions implicites

6.1. Introduction, théorèmes, exemples



$F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

<u>cercle</u>: • ligne de niveau 0 de $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y) = x^2+y^2-1$
• union des graphes de $f_1, f_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
• trace de $g : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto g(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

f_1 et f_2 sont continues sur $[-1,1]$ et dérivables sur $]-1,1[$.

<u>Question</u>: comment définir f_1 et f_2 si on ne peut pas isoler y dans l'équation $F(x,y) = 0$?

<u>Théorème des fonctions implicites</u>: soit $D \subset \mathbb{R}^2$, ouvert, et $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto F(x,y)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\boxed{F(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0}$$

pour un $(x_0,y_0) \in D$. Alors l'équation $F(x,y) = 0$ définit localement (c.-à-d. pour x proche de x_0) une fonction $f(x)$ de classe C^1 telle que

$$\boxed{f(x_0) = y_0, \quad F(x, f(x)) = 0}$$

De plus

$$\boxed{f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}} \qquad (*)$$

Démonstration de $(*)$:

On a que $F(x, f(x)) = 0$ pour x proche de x_0, et donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f'(x) = 0$$

De $(*)$ on trouve en particulier pour $x = x_0$ en utilisant que $f(x_0) = y_0$

$$f'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \qquad (**)$$

Remarque: $(**)$ explique aussi la condition

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Démonstration du théorèm : voir la demonstration du théorème général plus loin.

Dérivées d'ordre supérieur

De $(*)$ on trouve, pour F de classe C^2:

$$f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x))\cdot f'(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

$$+ \boxed{\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right)^2}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,f(x))\cdot f'(x)\right)$$

$\| \; -f'(x)$ par $(*)$.

et donc en particulier

$$\boxed{f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot f'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot f'(x_0)^2}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}}$$

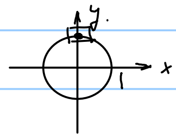
avec $f'(x_0)$ donné par $(**)$. On peut donc calculer $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ (et puis, pour F de classe C^k, récursivement $f^{(\ell)}(x_0)$, $\ell = 3, \dots, k$, et donc le développement limité de f en x_0), sans avoir besoin d'une expression explicite pour f.

Remarque: si $f'(x_0) = 0$ $\left(\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \text{ par } (**)\right)$ on a simplement

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \qquad (***)$$

Exemples

1) $F(x,y) = x^2+y^2-1$



soit $(x_0, y_0) = (0,1)$ (à titre d'exemple)

on a $F(0,1) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2y\Big|_{(0,1)} = 2 \neq 0$

par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que

$$1 = y_0 = f(x_0) = f(0) \quad \text{et} \quad F(x, f(x)) = 0 \, ,$$

au moins pour $|x - x_0| = |x|$ suffisamment petit. En fait $f(x) = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $|x| < 1$.
De plus on a par (**)

$$f'(0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = - \frac{2x}{2y}\Big|_{(0,1)} = - \frac{2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = 0$$

et donc, par (***)

$$f''(0) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = - \frac{2}{2y}\Big|_{(0,1)} = -1$$

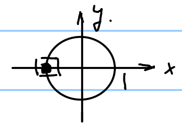
A comparer avec le calcul direct: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \quad , \quad f''(0) = -1$$

2) $F(x,y) = x^2+y^2-1$



soit $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ (à titre d'exemple)

on a $F(-1,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 2y\Big|_{(-1,0)} = 0$

On ne peut donc pas appliquer le théorème. Par contre $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,0) = 2x\Big|_{(-1,0)} = -2 \neq 0$, et par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que $-1 = x_0 = f(y_0) = f(0)$ et $F(f(y), y) = 0$ au moins pour $|y-y_0| = |y|$ suffisamment petit. En fait $f(y) = -\sqrt{1-y^2}$ pour $|y|<1$.

3) $F(x,y) = x^3 + xy + y^3 - 3$ sur $\mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) = (1,1)$ (à titre d'exemple)

on a $F(1,1) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = (x+3y^2)\Big|_{(1,1)} = 4 \neq 0$.

et il existe donc une fonction f telle que $f(1) = 1$ et $F(x, f(x)) = 0$ au moins pour x proche de $x_0 = 1$. De plus

$$f'(x) = -\frac{3x^2+f(x)}{x+3f(x)^2}$$

et en particulier $f'(1) = -\frac{3+1}{1+3\cdot 1^2} = -1$;

et puis

$$f''(x) = -\frac{6x + 2\cdot f'(x) + 6 f(x) f'(x)^2}{x + 3 f(x)^2}$$

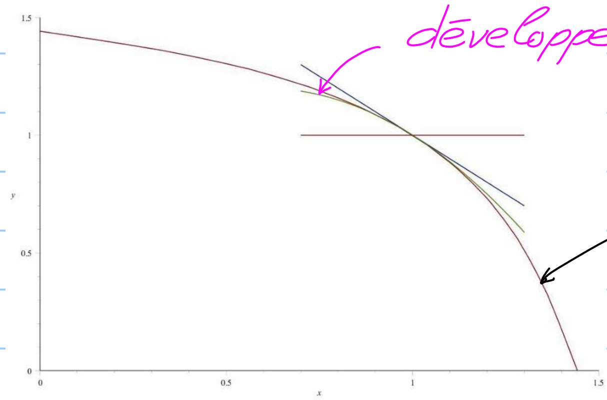
et donc

$$f''(1) = -\frac{6 + 2(-1) + 6\cdot 1\cdot(-1)^2}{4} = -\frac{5}{2}$$

et on a donc le développement limité d'ordre deux

$$f(x) = 1 - (x-1) - \frac{5}{4}(x-1)^2 + \dots$$

développement ordre deux.



$F(x,y) = 0$

Théorème (version $\mathbb{R}^3$) Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, $F: D \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto F(x,y,z)$, une fonction de classe C^1 telle que

$$\boxed{F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0}$$

pour un $(x_0, y_0, z_0) \in D$. L'équation $F(x,y,z) = 0$ définit alors localement une fonction de classe C^1, telle que

$$\boxed{z_0 = f(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad F(x, y, f(x,y)) = 0}$$

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x,y))} \qquad (*_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x,y))} \qquad (*_2)$$

Explication de $(*_1)$ et $(*_2)$:

De $F(x,y,f(x,y)) = 0$ on trouve par dérivation en chaîne par rapport à x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y)) + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

$\Rightarrow (*_1)$ en isolant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Par dérivation en chaîne par rapport à y on trouve:

$$0 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

$\Rightarrow (*_2)$ en isolant $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Remarque: comme déjà pour $n=2$, chacune des variables peut jouer le rôle de la variable dépendante, et souvent on identifie le nom de la fonction définie implicitement avec le nom de la variable (notation courte). Ainsi on a, si $F(x_0, y_0, z_0)=0$, dans des voisinages adéquats:

$$F(x, y, z(x,y)) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$$F(x, y(x,z), z) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

$$F(x(y,z), y, z) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

et pour chaque cas on obtient pour $(*_1)$, $(*_2)$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \boxed{\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

d'où (règle du triple produit):

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.}$$

$(\ )$: notation historique utilisée en thermodynamique.

6.2. Equation du plan tangent, bis (voir aussi 4.5.2 et 4.8)

6.2.1. Représentation de "surfaces"

($n=3$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geq 2$).

Soit $F(x,y,z)$ de classe C^1 dans $D \subset \mathbb{R}^3$, D ouvert telle que

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

pour un $(x_0, y_0, z_0) \in D$ (c.-à-d. les conditions du théorème des fonctions implicites sont satisfaites). Il existe alors une fonction $f(x,y)$ de classe C^1 définie dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) telle que $f(x_0, y_0) = z_0$ et telle que

$$\boxed{F(x,y,z) = 0 \quad \text{ssi} \quad z = f(x,y)}$$

L'ensemble de niveau zéro de la fonction F qui contient le point (x_0, y_0, z_0) est donc proche de (x_0, y_0, z_0) une surface, et cette surface est le graphe d'une fonction f. On a donc deux manières équivalentes de représenter une surface proche du point (x_0, y_0, z_0) (appartenant à cette surface) :

i) par $\boxed{F(x,y,z) = 0}$, si $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

ii) par le graphe $\boxed{z = f(x,y)}$, si $f(x_0, y_0) = z_0$

car i) $\Rightarrow$ ii) par le théorème des fonctions implicites
ii) $\Rightarrow$ i) car donné $f(x,y)$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ on peut choisir $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.