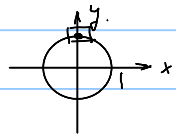
Exemples

1) $F(x,y) = x^2+y^2-1$



soit $(x_0, y_0) = (0,1)$ (à titre d'exemple)

on a $F(0,1) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2y\big|_{(0,1)} = 2 \neq 0$

par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que

$1 = y_0 = f(x_0) = f(0)$ et $F(x, f(x)) = 0$,

au moins pour $|x - x_0| = |x|$ suffisamment petit. En fait $f(x) = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $|x| < 1$. De plus on a par (**)

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -\frac{2x}{2y}\bigg|_{(0,1)} = -\frac{2\cdot 0}{2\cdot 1} = 0$$

et donc, par (***)

$$f''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -\frac{2}{2y}\bigg|_{(0,1)} = -1$$

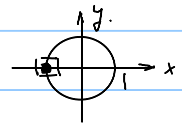
A comparer avec le calcul direct: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \quad , \quad f''(0) = -1$$

2) $F(x,y) = x^2+y^2-1$



soit $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ (à titre d'exemple)

on a $F(-1,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 2y\Big|_{(-1,0)} = 0$

On ne peut donc pas appliquer le théorème. Par contre $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,0) = 2x\Big|_{(-1,0)} = -2 \neq 0$, et par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction f telle que $-1 = x_0 = f(y_0) = f(0)$ et $F(f(y),y) = 0$ au moins pour $|y-y_0| = |y|$ suffisamment petit. En fait $f(y) = -\sqrt{1-y^2}$ pour $|y|<1$.

3) $F(x,y) = x^3 + xy + y^3 - 3$ sur $\mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$ (à titre d'exemple)

on a $F(1,1) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = (x+3y^2)\Big|_{(1,1)} = 4 \neq 0$.

et il existe donc une fonction f telle que $f(1) = 1$ et $F(x, f(x)) = 0$ au moins pour x proche de $x_0 = 1$. De plus

$$f'(x) = -\frac{3x^2+f(x)}{x+3f(x)^2}$$

et en particulier $f'(1) = -\frac{3+1}{1+3\cdot 1^2} = -1$;

et puis

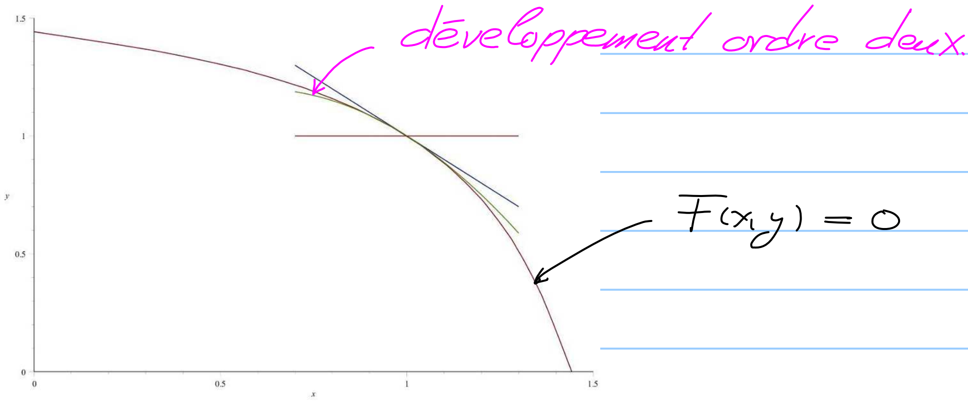
$$f''(x) = -\frac{6x + 2\cdot f'(x) + 6 f(x) f'(x)^2}{x + 3 f(x)^2}$$

et donc

$$f''(1) = -\frac{6 + 2(-1) + 6\cdot 1\cdot(-1)^2}{4} = -\frac{5}{2}$$

et on a donc le développement limité d'ordre deux

$$f(x) = 1 - (x-1) - \frac{5}{4}(x-1)^2 + \dots$$



Théorème (version $\mathbb{R}^3$) Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, $F : D \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto F(x,y,z)$, une fonction de classe C^1 telle que

$$\boxed{F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0}$$

pour un $(x_0, y_0, z_0) \in D$. L'équation $F(x,y,z) = 0$ définit alors localement une fonction de classe C^1, telle que

$$\boxed{z_0 = f(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad F(x, y, f(x,y)) = 0}$$

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x,y))} \qquad (*_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x,y))} \qquad (*_2)$$

Explication de $(*_1)$ et $(*_2)$:

De $F(x,y,f(x,y)) = 0$ on trouve par dérivation en chaîne par rapport à x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y)) + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

$\Rightarrow (*_1)$ en isolant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Par dérivation en chaîne par rapport à y on trouve:

$$0 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

$\Rightarrow (*_2)$ en isolant $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Remarque: comme déjà pour $n=2$, chacune des variables peut jouer le rôle de la variable dépendante, et souvent on identifie le nom de la fonction définie implicitement avec le nom de la variable (notation courte). Ainsi on a, si $F(x_0, y_0, z_0)=0$, dans des voisinages adéquats:

$$F(x, y, z(x,y)) = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$$F(x, y(x,z), z) = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

$$F(x(y,z), y, z) = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

et pour chaque cas on obtient pour $(*_1)$, $(*_2)$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \qquad \boxed{\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

d'où (règle du triple produit):

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.}$$

$(\ )$: notation historique utilisée en thermodynamique.

6.2. Equation du plan tangent, bis (voir aussi 4.5.2 et 4.8)

6.2.1. Représentation de "surfaces"

($n=3$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geq 2$).

Soit $F(x,y,z)$ de classe C^1 dans $D \subset \mathbb{R}^3$, D ouvert telle que

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

pour un $(x_0, y_0, z_0) \in D$ (c.-à-d. les conditions du théorème des fonctions implicites sont satisfaites). Il existe alors une fonction $f(x,y)$ de classe C^1 définie dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) telle que $f(x_0, y_0) = z_0$ et telle que

$$\boxed{F(x,y,z) = 0 \quad \text{ssi} \quad z = f(x,y)}$$

L'ensemble de niveau zéro de la fonction F qui contient le point (x_0, y_0, z_0) est donc proche de (x_0, y_0, z_0) une surface, et cette surface est le graphe d'une fonction f. On a donc deux manières équivalentes de représenter une surface proche du point (x_0, y_0, z_0) (appartenant à cette surface) :

i) par $\boxed{F(x,y,z) = 0}$, si $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

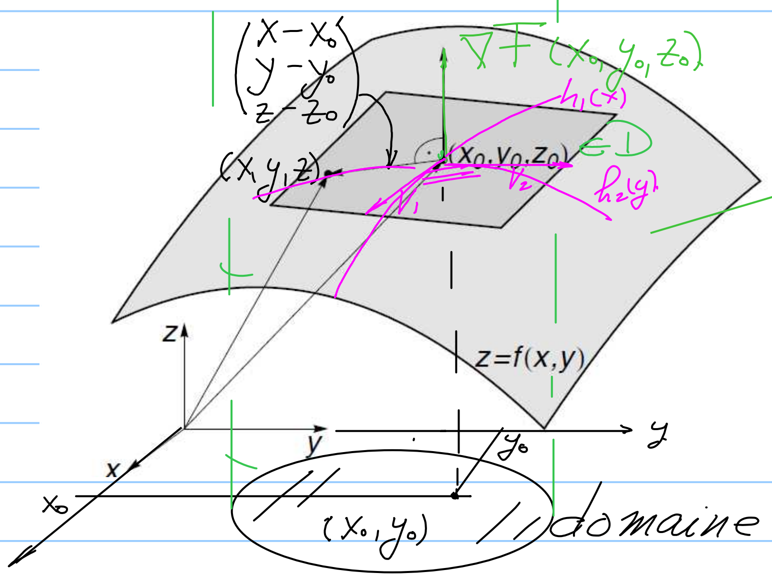
ii) par le graphe $\boxed{z = f(x,y)}$, si $f(x_0, y_0) = z_0$

car i) $\Rightarrow$ ii) par le théorème des fonctions implicites
ii) $\Rightarrow$ i) car donné $f(x,y)$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ on peut choisir $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

6.2.2. L'équation du plan tangent, version implicite

Donné $f(x,y)$ avec $f(x_0,y_0)=z_0$, le plan tangent est donné par l'équation (voir 4.5.2 et 4.8) :

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \quad (*)$$



domaine de f

$D \subset \mathbb{R}^3$ le domaine de F :

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \qquad \text{ici } D(f)\times\mathbb{R} \\ F(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = \left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^T \\ V_2 = \left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^T \end{cases}$$

voir 4.5.2, ces deux vecteurs engendrent le plan tangent

$V_1 = h_1'(x_0)$ ou $h_1(x) = (x, y_0, f(x,y_0))^T$

$V_2 = h_2'(y_0)$ ou $h_2(y) = (x_0, y, f(x_0,y))^T$

$$(*) \iff 1\cdot(z-z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

$$\iff \left\langle \Bigg(\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{= \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}}, \underbrace{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{= \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}}, 1 \Bigg)^T, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

produit scalaire

$$\iff \left(\text{en multipliant avec } \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0\right)$$

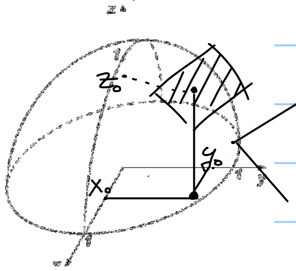
$$\left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,,\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)^T}_{\equiv\ (\nabla F)(x_0,y_0,z_0)},\ \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

A noter que $\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0,z_0)\,,\ v_1 \right\rangle = 0$

$$\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0,z_0)\,,\ v_2 \right\rangle = 0$$

<u>Conclusion:</u> $(\nabla F)(x_0,y_0,z_0)$ est orthogonal au plan tangent au graphe de f (= surface de niveau de F de niveau zéro) en (x_0,y_0,z_0)

<u>Exemple:</u> $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$



$F(x,y,z) = 0$ surface de la sphère de rayon 1.

$\Longleftrightarrow$

$z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ "hémisphère nord"

Soit (x_0, y_0) tel que $x_0^2+y_0^2<1$ et $z_0 = \sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

On a $F(x_0\ y_0,\ z_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0\ y_0\ z_0) = 2z_0 \neq 0$

L'équation du plan tangent à la surface de niveau zéro de F en (x_0,y_0,z_0) est:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad (*)$$

et ce plan est aussi le plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y)$ en $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0,y_0))$. A noter que $(*)$ est bien défini même si $z_0 = 0$. Dans ce cas on obtient l'équation d'un plan qui est vertical.