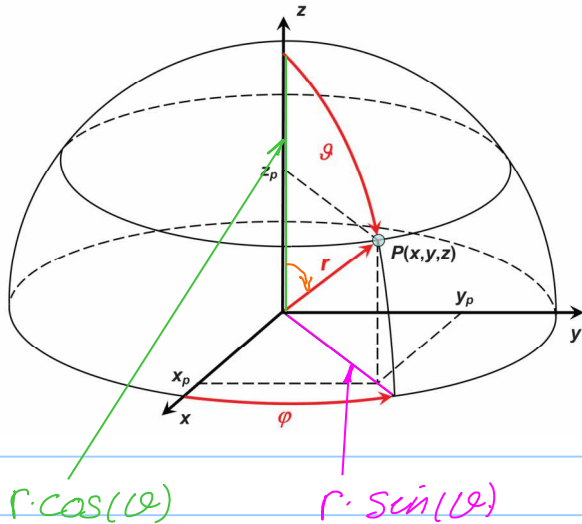


5.4.6 le laplacien en coordonnées sphériques (voir série 9A)

Definition des coordonnées sphériques



$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\theta)$$

r, θ, φ les coordonnées sphériques

$$G : [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ surjective}$$

$$\underbrace{[0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[}_{=: \tilde{D}, \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$J_G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J_G(r, \theta, \varphi) = \text{"développer la dernière ligne"}$$

$$= r \cdot \sin(\theta) \sin(\theta)^2 \cdot r + \cos(\theta) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$= r^2 \cdot \sin(\theta)$$

apprendre par cœur

5.4.7. Démonstration du théorème de l'inversion locale

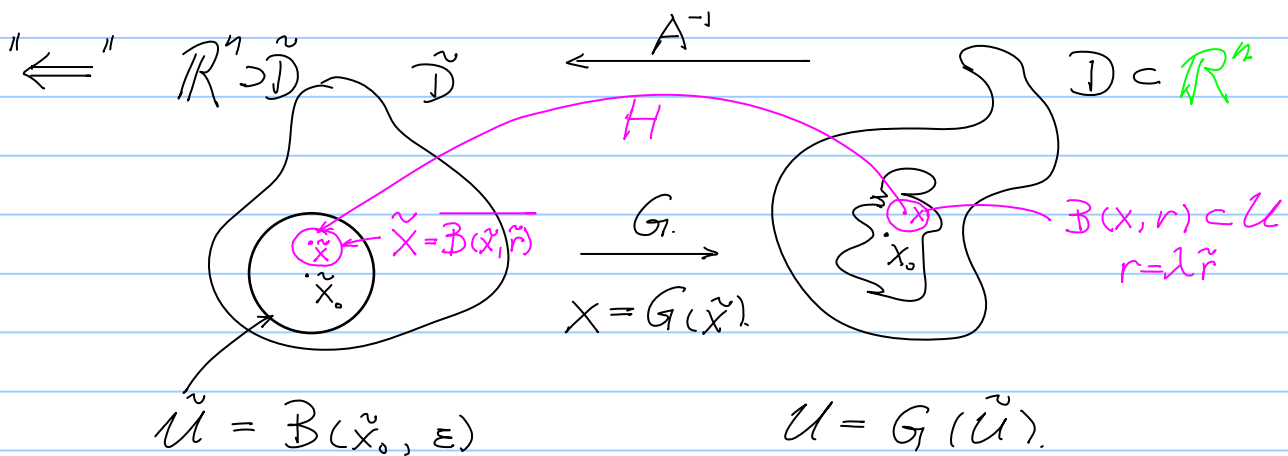
Théorème: Si $G: \tilde{D} \rightarrow D$, $\tilde{D}, D \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, est bijective avec G et $H = G^{-1}$ de classe C^1 , alors $\det(J_G) \neq 0$ en tout point de $\tilde{D}$. $C^1(\tilde{D}, \mathbb{R}^n)$

Réciproquement, si G est de classe C^1 et si, pour un point $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$, $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$, il existe un voisinage $\tilde{U}$ de $\tilde{x}_0$ et un voisinage U de $x_0 = G(\tilde{x}_0)$, tels que $G: \tilde{U} \rightarrow U$ soit bijective, avec $H = G^{-1}$ de classe C^1 .

" $\Rightarrow$ " en tout $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$ on a, pour $x_0 = G(\tilde{x}_0)$,

$$J_G(\tilde{x}_0) \cdot J_H(x_0) = J_{\text{id}}.$$

$J_G(\tilde{x}_0)$ est donc inversible et $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$



i) G est injective sur $\tilde{U}$ ($H = G^{-1}$ existe)

ii) U est un ensemble ouvert

iii) $H = G^{-1}$ est différentiable

iv) J_H est continue

i) soit $A := J_G(\tilde{x}_0) = G'(\tilde{x}_0)$

donné $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $\varphi: \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} + A^{-1}(x - G(\tilde{x}))$$

alors $x = G(\tilde{x}) \iff \varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$

on a. $\varphi'(\tilde{x}) = 1 - A^{-1}G'(\tilde{x}) = A^{-1}(A - G'(\tilde{x}))$

on choisit ε tel que $\forall \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{B}(\tilde{x}_0, \varepsilon)$

$$\|\varphi'(\tilde{x})\| \leq \|A^{-1}\| \|A - G'(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

norme matricielle
(voir la série 8B)

G' est continue
donc $\lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}_0} G'(\tilde{x}) = A$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad (\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{\mathcal{U}})$$

$$\|\varphi(\tilde{x}_1) - \varphi(\tilde{x}_2)\| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|$$

théorème des
accroissements finis
et (*).

Donc si $\tilde{x}_1 = \varphi(\tilde{x}_1)$ et $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_2)$ alors $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$
pour le même $x \in \mathbb{R}^n$

ii). $\lambda := \frac{1}{2 \|A^{-1}\|}$. $x \in \mathcal{U}$, $\tilde{x} = H(x) \iff x = G(\tilde{x})$

on choisit $\tilde{r}$ t.q. $\overline{\mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{r})} = \tilde{X} \subset \tilde{\mathcal{U}}$

montrons que $\forall \xi \in \mathcal{B}(x, \lambda r)$ il existe
 $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{\xi} = \varphi(\tilde{\xi})$ où

$$\varphi(\tilde{\xi}) := \tilde{\xi} + A^{-1}(\xi - G(\tilde{\xi}))$$

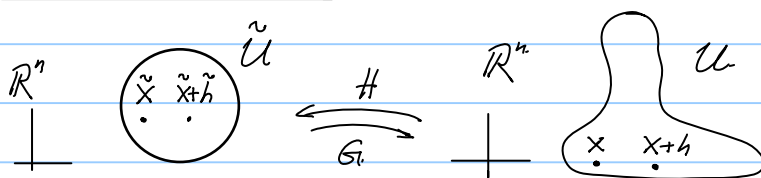
on a $\|\varphi(\tilde{x}) - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\tilde{x} - G(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2\lambda} \tilde{r} \leq \frac{1}{2} \tilde{r}$, ainsi
 le centre de la boule $\tilde{x}$ ne bouge pas trop

que $\forall \tilde{\varepsilon} \in \tilde{X}$, $\|\varphi(\tilde{\varepsilon}) - \tilde{x}\| \leq \|\varphi(\tilde{x}) - \tilde{x}\| + \|\varphi(\tilde{\varepsilon}) - \varphi(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2} \tilde{r} + \frac{1}{2} \tilde{r} = \tilde{r}$ (on reste dans la boule $\tilde{X}$)

Donc $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ une contraction et il existe donc $\tilde{\varepsilon} \in \tilde{X}$ t.q. $\tilde{\varepsilon} = G(\tilde{\varepsilon})$.

Donc $B(x, \lambda \tilde{r}) \subset U$ (donc U ouvert)

iii) Méthode A



$x \in \mathbb{R}^n$
 $x = G(\tilde{x})$
 $x+h = G(\tilde{x}+\tilde{h})$

$$\textcircled{1} \cdot \varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} + A^{-1}(x - G(\tilde{x}))$$

$$\textcircled{2} \cdot \varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) = \tilde{x}+\tilde{h} + A^{-1}(x - G(\tilde{x}+\tilde{h}))$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})\| = \|\tilde{h} - A^{-1}h\| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{h}\|$$

$$\|\tilde{h}\| \leq \|A^{-1}\| \|h\|$$

$$\Rightarrow \|\tilde{h}\| \leq 2\|A^{-1}\| \|h\| = \frac{1}{\lambda} \|h\| \quad (**)$$

$$\text{Soit } T = (G'(\tilde{x}))^{-1} = (G'(H(x)))^{-1}$$

$\Rightarrow$ iV)
 continue si H
 continue ce qui
 sera le cas avec
 H différentiable.

$$H(x+h) - H(x) - Th = \tilde{h} - T\tilde{h} =$$

existe par (*)

voir série 9A

$$= -T(G(\tilde{x}+\tilde{h}) - G(\tilde{x}) - G'(\tilde{x})\tilde{h}) \quad \text{et donc}$$

$$\frac{\|H(x+h) - H(x) - Th\|}{\|h\|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \frac{\|G(\tilde{x}+\tilde{h}) - G(\tilde{x}) - G'(\tilde{x})\tilde{h}\|}{\|\tilde{h}\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

car $\tilde{h} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ par (**), et G est différentiable.

5.5. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre

(Application de la dérivée en chaîne)

Proposition: Soit

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

$$\begin{aligned} a, b &\in C^1(\mathbb{R}) \\ f &\in C^1(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Alors

$$\left. \begin{aligned} F'(t) &= f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t) \\ &+ \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Remarque: dans le cas particulier où $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, $b(t) \equiv b \in \mathbb{R}$ sont des fonctions constantes on obtient de (**):

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad (*)$$

↑ "dérivée sous l'intégrale"

Idee de la démonstration de (*) (voir série 9B)

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x, t+h) dx - \int_a^b f(x, t) dx \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x, t+h) - f(x, t)) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx. \end{aligned}$$

$$\stackrel{?}{=} \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

oui pour $a, b \in \mathbb{R}$ ($a, b \neq \pm\infty$) et pour $\frac{\partial f}{\partial t}$ une fonction continue, car dans ce cas on a $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) - \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \right| < \varepsilon$$

pour tout t donné et h suffisamment petit avec h indépendant de $x \in [a, b]$.

Démonstration de (**)

On pose $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(a, b, t) = \int_a^b f(x, t) dx$

$$= - \int_b^a f(x, t) dx$$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial b}(a, b, t) = f(b, t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a, b, t) = -f(a, t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(a, b, t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad \text{par (*)}$$

et donc, puisque $F(t) = g(\underbrace{a(t), b(t), t}_{h(t)}) = g \circ h(t)$

on obtient:

$$h(t) \equiv (a(t), b(t), t)^T$$

$$F'(t) = g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial a}(a(t), b(t), t) \quad \frac{\partial g}{\partial b}(a(t), b(t), t) \quad \frac{\partial g}{\partial t}(a(t), b(t), t) \right) \cdot \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

= "formule du théorème"

Généralisation aux intégrales généralisées

Proposition: soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, I un intervalle ouvert, $f \in C'([a, \infty[\times I)$

$$\overline{F}(t) = \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \quad \text{et} \quad \int_b^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

uniformement convergents. Alors, $\overline{F} \in C'(I)$
et

$$\overline{F}'(t) = \int_b^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Remarque: uniformément convergent veut dire, que
 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B_0 \geq b$, tel que $\forall B \geq B_0$,
 $\forall t \in I$:

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x, t) dx \right| \leq \varepsilon$$

On découpe l'intégrale " $\int_b^{+\infty} = \int_b^B + \int_B^{+\infty}$ " et applique le théorème précédent sur $[b, B]$. Sur $[B, +\infty[$ les intégrales sont petites par hypothèse

Exemples

$$1) \overline{F}(t) = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\sin(t \cdot x)}{x}}_{= f(x, t)} dx, \quad \overline{F}'\left(\frac{1}{4}\right) = ?$$

$= f(x, t)$ de classe $C'(\mathbb{R}^2)$, à vérifier!
(avec $f(0, t) = t$)

$$\begin{aligned} \overline{F}'(t) &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(tx) \cdot x}{x} dx = \left[\frac{1}{t} \sin(tx) \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{t} \sin(\pi \cdot t) \end{aligned}$$

$$\overline{F}'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2) \quad F(t) = \int_0^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x} dx, \quad F'(\frac{1}{4}) = ?$$

$$F'(t) = \frac{1}{t^2} \sin(t \cdot t^2) \cdot (2t) + \left[\frac{1}{t} \sin(tx) \right]_{x=0}^{x=t^2} \\ = \frac{2}{t} \sin(t^3) + \frac{1}{t} \sin(t^3) = \frac{3}{t} \sin(t^3)$$

$$F'(\frac{1}{4}) = 12 \cdot \sin(\frac{1}{64})$$

$$3) \quad F:]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} dx \quad \leftarrow f(x,t) \text{ du théorème.}$$

$$\left[:= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-tx} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_{x=0}^{x=R} = \right.$$

$$\left. \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} e^{-tR} \right) = \frac{1}{t}. \text{ (voir Analyse I)} \right]$$

$\forall t \in]1, \infty[, x \in [0, \infty[, 0 \leq e^{-tx} \leq e^{-x},$
et donc, $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \int_B^\infty e^{-tx} dx \right| \leq \int_B^\infty e^{-x} dx = e^{-B} \leq \varepsilon$$

si $B \geq B_0 = \max\{0, -\ln(\varepsilon)\}$, et similaire pour $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = e^{-tx}(-x)$. Les deux intégrales sont donc uniformément convergentes et on obtient:

$$F'(t) = \int_0^\infty e^{-tx} (-x) dx \quad \left[= \dots = -\frac{1}{t^2} \right].$$