

Analyse avancée II – Corrigé de la série 9A

Echauffement.

i) On a la fonction $G: \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ avec

$$G(\rho, \theta, \varphi) = (G_1(\rho, \theta, \varphi), G_2(\rho, \theta, \varphi), G_3(\rho, \theta, \varphi)),$$

où

$$x = G_1(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi),$$

$$y = G_2(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi),$$

$$z = G_3(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\theta).$$

Cette fonction est surjective mais pas injective.

ii) On vérifie par un calcul direct que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Ainsi les points (x, y, z) sont bien sur la sphère de rayon ρ .

iii) On restreint $G(\rho, \theta, \varphi)$ à l'ensemble ouvert $\tilde{D} = \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. Sur cet ensemble G est injective et

$$G: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

est bijective. La matrice jacobienne de G est

$$\begin{aligned} J_G(\rho, \theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial G_3}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

iv) On vérifie que $\det(J_G)$ est

$$\begin{aligned} \det(J_G) &= \rho^2 (\sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + \sin^3 \theta \cos^2 \varphi) \\ &= \rho^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Exercice 1.

On se contente de vérifier la formule proposée plutôt que la retrouver parce que les calculs sont moins longs. On remarque d'abord que la formule donnée est équivalente à

$$\rho^2 \Delta F = 2\rho \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

et donc on va exprimer les éléments qui apparaissent à droite de (1) en fonction des dérivées partielles de F par rapport à x , y et z . Comme $\bar{F} = F \circ G$ avec G comme à l'Exercice 5, il faut dériver en chaîne. Pour simplifier on utilise la notation courte pour les composantes de $J_G(\rho, \theta, \varphi)$, c.-à-d. on écrit $\frac{\partial x}{\partial \rho}$ pour $\frac{\partial G_1}{\partial \rho}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ pour $\frac{\partial G_2}{\partial \theta}$ etc.

Pour ρ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial x} \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y} \sin(\theta) \sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial z} \cos(\theta) \\ \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \cos(\theta) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \sin(\theta) \cos(\varphi) + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \sin(\theta) \sin(\varphi) + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \cos(\theta) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sin(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cos(\theta)^2 + \\ &\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} 2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi).\end{aligned}$$

De même pour θ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x} \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y} \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial z} \rho \sin(\theta) \\ \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos(\theta) \right) \cdot \rho \cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cos(\theta) \right) \cdot \rho \sin(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \sin(\theta) \right) \cdot \rho \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \cos(\theta) - \frac{\partial F}{\partial x} \sin(\theta) \right] \rho \cos(\varphi) + \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \cos(\theta) - \frac{\partial F}{\partial y} \sin(\theta) \right] \rho \sin(\varphi) \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \sin(\theta) + \frac{\partial F}{\partial z} \cos(\theta) \right] \rho \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \rho \sin(\theta) - \frac{\partial F}{\partial z} \rho \cos(\theta) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \rho^2 \sin(\theta)^2 + \\ &\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} 2 \rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} 2 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} 2 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial z} \rho \cos(\theta)\end{aligned}$$

et pour φ :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2} &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin(\varphi) \right) \cdot \rho \sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cos(\varphi) \right) \cdot \rho \sin(\theta) \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial x} \cos(\varphi) \right] \rho \sin(\theta) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \sin(\varphi) \right] \rho \sin(\theta) \\
&= -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \rho^2 \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} 2\rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\
&\quad - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Maintenant on peut remplacer les termes obtenues dans la partie droite de (1) qui est rappelée ci-dessous :

$$2\rho \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2} . \quad (2)$$

Pour ne pas perdre la vue d'ensemble en regroupant les coefficients de chaque dérivée partielle de F , on fait un tableau qu'on remplit au fur et à mesure en évaluant les termes dans (2).

Terme	Coefficient	Résultat
$\frac{\partial F}{\partial x}$	$2\rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \rho \frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)} \cos(\varphi) - \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \rho \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}$	$= 0^*$
$\frac{\partial F}{\partial y}$	$2\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) + \rho \frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)} \sin(\varphi) - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) - \rho \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}$	$= 0^*$
$\frac{\partial F}{\partial z}$	$2\rho \cos(\theta) - \rho \cos(\theta) - \rho \cos(\theta)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \rho^2 \sin(\varphi)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\rho^2 \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \rho^2 \cos(\varphi)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$	$\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$	$2\rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 2\rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - 2\rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$	$2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) - 2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$	$2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi) - 2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi)$	$= 0$

*Pour simplifier les termes avec les fractions il faut mettre en évidence $\rho \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}$ respectivement $\rho \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}$.

Puisqu'on a obtenu que (2) est égal à $\rho^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \rho^2 \Delta F$, on a bien démontré la formule pour le laplacien de F .

Exercice 2.

i) De la définition

$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|},$$

on obtient pour $v \neq 0$ par la définition du sup que

$$\|A\| \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|},$$

ce qui implique pour $v \neq 0$ que $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$. Pour $v = 0$ l'inégalité est trivialement satisfaite. Ceci montre la proposition pour $k = 1$. Pour $k > 1$ on procède par induction en utilisant que $A^k v = A(A^{k-1}v)$ et que par conséquence $\|A^k v\| \leq \|A\|\|A^{k-1}v\|$. Si on divise pour $v \neq 0$ par $\|v\|$ on obtient l'inégalité sur les normes en prenant le sup.

ii) On a $\|ABv\| = \|A(Bv)\| \leq \|A\| \|Bv\| \leq \|A\| \|B\| \|v\|$ et si on divise pour $v \neq 0$ par $\|v\|$ on obtient l'inégalité sur les normes en prenant le sup.

iii) La suite des sommes partielles est de Cauchy: soit $\varepsilon > 0$ et N_0 tel que $\frac{\|X\|^{N_0}}{1 - \|X\|} \leq \varepsilon$. Alors pour tout $N \geq M \geq N_0$ on a

$$\left\| \sum_{k=M}^N X^k \right\| \leq \|X\|^M \sum_{k=0}^{N-M} \|X\|^k \leq \|X\|^{N_0} \frac{1}{1 - \|X\|} \leq \varepsilon$$

Pour voir que la limite vaut $(1 - X)^{-1}$, on multiplie les sommes partielles par $1 - X$. On a $(1 - X) \sum_{k=0}^N X^k = 1 - X^{N+1}$ et donc que

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| (1 - X) \left(\sum_{k=0}^N X^k \right) - 1 \right\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|X\|^{N+1} = 0.$$

iv) On pose $X = (A - B)A^{-1}$ et par hypothèse $\|X\| < 1$. Ceci montre l'hypothèse, car

$$B^{-1} = (A - (A - B))^{-1} = A^{-1} (1 - (A - B)A^{-1})^{-1} = A^{-1} (1 - X)^{-1}.$$

Exercice 3.

Voir le document manuscrit sur Moodle.

Exercice 4.

Les fonctions F données sont des intégrales dépendant d'un paramètre de la forme

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx.$$

Si les fonctions f , a et b sont de classe C^1 , la dérivée de F est (cf. cours)

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(b(t), t) \cdot b'(t) - f(a(t), t) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \quad (3)$$

- i) On a $f(x, t) = \frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)} \in C^1([2, 3[\times]1, \infty[)$, $a(t) = 2$ et $b(t) = 3$ avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$.
Puisque les bornes sont constantes, le membre de droite de (3) consiste uniquement de l'intégrale et on a

$$F'(t) = \int_2^3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)} \right) dx = \int_2^3 \frac{x^t \ln(x)}{\ln(x)} dx = \int_2^3 x^t dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_2^3 = \frac{3^{t+1} - 2^{t+1}}{t+1}.$$

- ii) On a $f(x, t) = \ln(x^2 + t^2) \in C^1([1, \infty[\times]1, \infty[)$, $a(t) = t$ et $b(t) = t^2$ avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$.
Les bornes dépendent de t . On a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d(t^2)}{dt} \cdot \ln((t^2)^2 + t^2) - \frac{d(t)}{dt} \cdot \ln(t^2 + t^2) + \int_t^{t^2} \frac{\partial}{\partial t} (\ln(x^2 + t^2)) dx \\ &= 2t \ln(t^2(t^2 + 1)) - \ln(2t^2) + \int_t^{t^2} \frac{2t}{x^2 + t^2} dx. \end{aligned}$$

Puisque $2t \int_t^{t^2} \frac{1}{x^2 + t^2} dx = \left[\frac{2t}{t} \arctan\left(\frac{x}{t}\right) \right]_t^{t^2} = 2 \arctan(t) - \frac{\pi}{2}$, on a finalement

$$F'(t) = 2t \ln(t^2(t^2 + 1)) - \ln(2t^2) + 2 \arctan(t) - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5.

Ces fonctions sont de nouveau de la forme (3).

- i) Ici on a $f(x, t) = \frac{\sin(\cos(tx))}{x} \in C^1([0, \infty[\times]0, \infty[)$, $a(t) = \sqrt{t}$ et $b(t) = \frac{1}{t}$ avec $a, b \in C^1([0, \infty[)$. Ainsi

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\sin(\cos(t\frac{1}{t}))}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) - \frac{\sin(\cos(t\sqrt{t}))}{\sqrt{t}} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) + \int_{\sqrt{t}}^{1/t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(\cos(tx))}{x} \right) dx \\ &= -\frac{\sin(\cos(1))}{t} - \frac{\sin(\cos(t^{3/2}))}{2t} + \int_{\sqrt{t}}^{1/t} \cos(\cos(tx)) (-\sin(tx)) dx \\ &= -\frac{\sin(\cos(1))}{t} - \frac{\sin(\cos(t^{3/2}))}{2t} + \left[\frac{\sin(\cos(tx))}{t} \right]_{\sqrt{t}}^{1/t} = -\frac{3 \sin(\cos(t^{3/2}))}{2t}. \end{aligned}$$

- ii) Pour $f(x, t) = \frac{e^{tx^3}}{x} \in C^1([0, \infty[\times]0, \infty[)$, $a(t) = 1$ et $b(t) = \sqrt[3]{t}$ avec $a, b \in C^1([0, \infty[)$,
seulement la borne supérieure dépend de t si bien que le terme en $f(a(t), t)$ n'apparaît pas.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{e^{tx^3}}{x} \Big|_{x=\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt[3]{t}) + \int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{tx^3}}{x} \right) dx \\ &= \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{1}{3} t^{-2/3} + \int_1^{\sqrt[3]{t}} x^2 e^{tx^3} dx = \frac{1}{3} \frac{e^{t^2}}{t} + \left[\frac{1}{3t} e^{tx^3} \right]_1^{\sqrt[3]{t}} \\ &= \frac{1}{3t} (e^{t^2} - e^t) + \frac{1}{3} \frac{e^{t^2}}{t} = \frac{1}{3t} (2e^{t^2} - e^t), \end{aligned}$$

et donc $F'(1) = \frac{1}{3}e$. En fait, puisque pour $t = 1$ l'intégrale s'anule on a pas besoin de calculer ce terme et on a directement $F'(1) = \frac{1}{3} \frac{e^{t^2}}{t} \Big|_{t=1} = \frac{1}{3}e$.

Exercice 6.

- i) Comme on veut utiliser le théorème des fonctions implicites, il faut vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites. On commence par calculer les dérivées partielles de F . On a

$$F_x = \partial_x F = 6x^2 - 2xy^4 + 3 \quad \text{et} \quad F_y = \partial_y F = -4x^2y^3 + 6y^2,$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe C^1 . Comme on veut trouver une fonction définie au voisinage de 0, on pose $x_0 = 0$. L'équation $F(0, y_0) = 2y_0^3 - 2 = 0$ implique alors que $y_0 = 1$. De plus $F_y(0, 1) = 6 \neq 0$.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit que l'équation $F(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = 1$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = \frac{6x^2 - 2xf(x)^4 + 3}{4x^2f(x)^3 - 6f(x)^2}$$

et ainsi $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Le graphe de la fonction f se trouve à la Fig. 1.

- ii) Les dérivées partielles de F sont

$$F_x = e^y + ye^x \quad \text{et} \quad F_y = e^x + xe^y,$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe C^1 . On a de nouveau $x_0 = 0$ et $F(0, y_0) = y_0 + 2 = 0 \Rightarrow y_0 = -2$. Comme en plus, $F_y(0, -2) = 1 \neq 0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Ainsi il existe une fonction $y = f(x)$ définie implicitement par l'équation $F(x, y) = 0$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = -2$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{e^{f(x)} + f(x)e^x}{e^x + xe^{f(x)}},$$

et ainsi $f'(0) = 2 - \frac{1}{e^2} \approx 1.865$. Pour le graphe de f , voir Fig. 2.

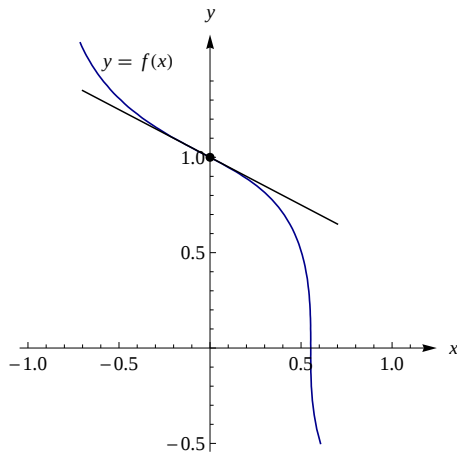


Figure 1

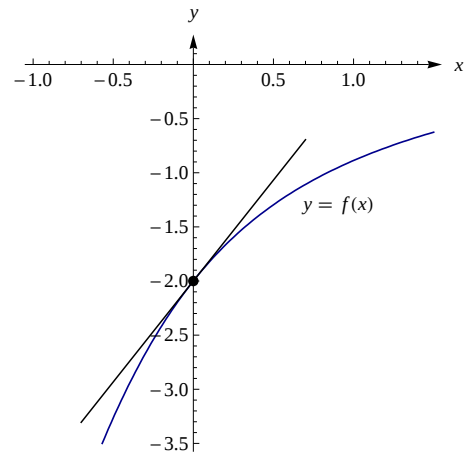


Figure 2

Exercice 7.

Q1 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f(x, y, g(x, y)) = 11.$$

Sachant que $g(1, 3) = -2$, on a

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0$

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{12}{5}$

☒ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{9}{2}$

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 11$

En dérivant l'équation $f(x, y, g(x, y)) = 11$ par rapport à x on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

et donc, puisque $g(1, 3) = -2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, -2) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, -2) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, -2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, -2)} = \left[-\frac{-9yx^2}{6z^2 - 6y} \right]_{(x,y,z)=(1,3,-2)} \\ &= -\frac{-27}{24 - 18} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$