Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 9A

Échauffement. (Coordonnées sphériques)

i) Donner la fonction de changement de coordonnées G des coordonnées sphériques.

ii) Vérifier que $(x, y, z) = G(\rho, \theta, \varphi)$ se trouve sur la sphère de rayon ρ pour tout θ et φ.

iii) Calculer la matrice jacobienne J_G de G.

iv) Calculer le jacobien $\det(J_G)$ de G.

Exercice 1. (Laplacien en coordonnées sphériques)

Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Vérifier que le laplacien de F s'exprime comme suit en coordonnées sphériques :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2}\right],$$

où $\bar{F}(\rho, \theta, \varphi) = (F \circ G)(\rho, \theta, \varphi)$ avec G de l'échauffement.

Exercice 2. (Normes matricielles)

Soit V l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ équipé de la norme

$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|},$$

où $v \mapsto \|v\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ (par abus de notation nous utilisons la même notation pour la norme sur R^n et la norme matricielle sur V induite par cette norme). Démontrer les propositions suivantes :

i) Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $A \in V$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $\|A^k v\| \leq \|A\|^k \|v\|$, ainsi que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

ii) Pour toutes matrices $A, B \in V$ on a $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

iii) Pour toute matrice $X \in V$ telle que $\|X\| < 1$ on a $(1 - X)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$, où par convention $X^0 = 1$ (matrice identité) et $\sum_{k=0}^{\infty} X^k := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} X^k$.

iv) Soit $A \in V$ une matrice inversible et $B \in V$ une matrice telle que $\|A^{-1}\|\,\|B - A\| < 1$. Alors B est inversible.

Ex. 3 - 7 au verso.

Exercice 3. (Théorème du point fixe)

Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction définie sur B telle que

i) $\varphi(B) \subset B$.

ii) $\forall x, y \in B \ \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \dfrac{1}{2}\|x - y\|$.

Montrer que pour tout choix de $x_0 \in B$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \varphi(x_{n-1})$ est de Cauchy et que ces suites convergent toutes vers l'unique solution dans B de l'équation $x = \varphi(x)$.

Exercice 4. (Dérivées d'intégrales avec paramètre)

Pour les fonctions $F\colon]1, \infty[\to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer la dérivée $F'(t)$.

i) $F(t) = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)}\, dx$ *ii)* $F(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \ln(x^2 + t^2)\, dx$

Exercice 5. (Dérivées d'intégrales avec paramètre)

i) Soit la fonction $F\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{1/t} \frac{\sin(\cos(tx))}{x}\, dx$. Calculer la dérivée $F'(t)$.

ii) Soit la fonction $F\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{e^{tx^3}}{x}\, dx$. Calculer $F'(1)$.

Exercice 6. (Fonctions implicites)

Vérifier que l'équation $F(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 et calculer la dérivée $f'(0)$.

i) $F(x, y) = 2x^3 - x^2y^4 + 2y^3 + 3x - 2$

ii) $F(x, y) = xe^y + ye^x + 2$

Exercice 7. (QCM : fonctions implicites)

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f\big(x, y, g(x, y)\big) = 11\,.$$

Sachant que $g(1, 3) = -2$, on a

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{12}{5}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{9}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 11$