

## Analyse avancée II – Corrigé de la série 8B

### Échauffement. (Limite d'une fonction et continuité)

i) Définition de la limite en un point :

(a) Définition avec les suites

Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  admet  $\ell \in \mathbb{R}^m$  comme limite en  $x^* \in \mathbb{R}^n$  lorsque  $x$  tend vers  $x^*$ , si pour toute suite  $(x_k)_{k \geq 0}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$ , qui converge vers  $x^*$ , la suite  $(y_k)_{k \geq 0}$ ,  $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$ , converge vers  $\ell$ .

(b) Définition avec  $\varepsilon$  et  $\delta$

Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  admet  $\ell \in \mathbb{R}^m$  comme limite en  $x^* \in \mathbb{R}^n$  lorsque  $x$  tend vers  $x^*$ , si  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \|x - x^*\| \leq \delta$  implique  $\|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$ .

Montrons maintenant l'équivalence des deux définitions.

(a) Limite selon  $\varepsilon$  et  $\delta \Rightarrow$  limite selon la définition avec les suites

Supposons l'existence d'une limite selon la définition avec  $\varepsilon$  et  $\delta$ . Soit une suite quelconque  $(x_k)_{k \geq 0}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$  qui converge vers  $x^*$ . Alors, par la définition de la convergence d'une suite, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall k \geq k_0$ ,  $0 < \|x_k - x^*\| \leq \delta$ . Donc, par la définition de la limite par  $\varepsilon$  et  $\delta$ ,  $\forall k \geq k_0$ ,  $\|f(x_k) - \ell\| \leq \varepsilon$ , ce qui par la définition de la convergence d'une suite veut dire que la suite  $(y_k)_{k \geq 0}$ ,  $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$ , converge vers  $\ell$ .

(b) Limite selon la définition avec les suites  $\Rightarrow$  limite selon  $\varepsilon$  et  $\delta$

Raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'une fonction  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  admette  $\ell \in \mathbb{R}^m$  comme limite en  $x^* \in \mathbb{R}^n$  lorsque  $x$  tend vers  $x^*$  selon la définition avec les suites, mais que  $\ell$  n'est pas la limite de  $f$  en  $x^* \in \mathbb{R}^n$  selon la définition avec  $\varepsilon$  et  $\delta$ . Alors,  $\exists \varepsilon > 0$ , tel que  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists x \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $0 < \|x - x^*\| \leq \delta$  et  $\|f(x) - \ell\| > \varepsilon$  (voir la série 1B pour la négation d'une implication logique). En particulier donc,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists x_k \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $0 < \|x_k - x^*\| \leq \delta_k \equiv \frac{1}{k}$  et  $\|f(x_k) - \ell\| > \varepsilon$ . La suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  converge donc, par la définition de la convergence d'une suite, vers  $x^*$ , et donc  $(y_k)_{k \geq 0}$ ,  $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$  converge vers  $\ell$ , en contradiction avec  $\|f(x_k) - \ell\| > \varepsilon$ . En conclusion,  $f$  admet  $\ell$  comme limite selon la définition avec  $\varepsilon$  et  $\delta$ .

ii) Les définitions de la continuité en un point sont identiques aux définitions de la limite, mais avec  $\ell \in \mathbb{R}^m$  remplacé par  $f(x^*) \in \mathbb{R}^m$ .

### Exercice 1. (Inégalité de Young et de Hölder et équivalence de normes)

i) Inégalité de Young

Soit  $1 < p < +\infty$  et  $q$  est tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On doit montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ . D'abord, si  $a = 0$  ou  $b = 0$  (donc aussi si  $a = b = 0$ ), l'inégalité est

triviale. Supposons donc que  $a > 0$  et  $b > 0$  et soit  $g(s) = -\ln(s)$ . On a pour tout  $s \in ]0, +\infty[$  que  $g''(s) = \frac{1}{s^2} > 0$ . Ainsi, la fonction  $g$  est convexe sur  $]0, +\infty[$ . Puisque  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a donc pour  $1 < p < +\infty$  que

$$g\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leq \frac{1}{p}g(a^p) + \frac{1}{q}g(b^q)$$

et de suite que

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

La fonction  $\ln$  étant strictement croissante, ceci n'est possible que si

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

ii) Inégalité de Hölder

Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , et soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire euclidien. On doit montrer que pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

(a) Si  $p = 1$  et  $q = +\infty$ , on a, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right) \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

(b) Soit maintenant  $p \in ]1, +\infty[$  et  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , c'est-à-dire  $q = \frac{p}{p-1}$ . Si  $x = 0$  ou  $y = 0$ , l'inégalité est triviale. On peut donc supposer que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ . On a, pour  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| = \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \cdot \frac{1}{\lambda} |y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \lambda^p |x_i|^p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q} \frac{1}{\lambda^q} |y_i|^q = \frac{1}{p} \lambda^p \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\lambda^q} \|y\|_q^q. \end{aligned}$$

Si on pose  $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$  on obtient, puisque  $p - \frac{p}{q} = q - \frac{q}{p} = 1$ ,

$$\lambda^p \|x\|_p^p = \|x\|_p^{-p/q} \|y\|_q \|x\|_p^p = \|x\|_p \|y\|_q,$$

et

$$\frac{1}{\lambda^q} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q^{-q/p} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Ainsi,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{p} \|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q} \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q.$$

iii)  $\|\cdot\|_p$  est une norme pour  $p \geq 1$  mais n'est pas une norme pour  $0 < p < 1$

On va montrer que pour  $p \geq 1$  l'inégalité triangulaire est satisfaite mais pas pour  $p < 1$ . Les autres propriétés d'une norme sont satisfaites pour tous les  $p$ .

(a) Soit  $p \geq 1$  et soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hölder  $\langle a, b \rangle \leq \|a\|_p \|b\|_q$  avec

$$\begin{aligned} a &= (|x_1|, \dots, |x_n|) \\ b &= (|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} &= \langle a, b \rangle \leq \|a\|_p \|b\|_q \\ &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Rappelant que, puisque  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} (p-1)$  et  $(p-1)q = p$ , de sorte que

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1}.$$

On obtient de la même manière que

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1},$$

et on a donc

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}.$$

De cette inégalité on obtient l'inégalité triangulaire recherchée, en divisant à gauche et à droite par  $\|x + y\|_p^{p-1}$  si  $\|x + y\|_p \neq 0$ . Si  $\|x + y\|_p = 0$ , l'inégalité triangulaire est trivialement satisfaite. Les autres propriétés d'une norme sont immédiates.

(b) Soit  $p < 1$  et soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , où  $x = (1, 0, \dots, 0)$  et  $y = (0, \dots, 0, 1)$ . On a  $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ , mais  $\|x + y\|_p = 2^{1/p} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$ , ce qui montre que l'inégalité triangulaire n'est pas toujours satisfaite, et  $\|\cdot\|_p$  n'est donc pas une norme.

iv) Inégalités

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et posons  $|x| := (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ . Soit  $p > 1$  et  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors,

(a) En posant  $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$  on obtient

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \langle |x|, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q = n^{1/q} \|x\|_p$$

(b) On a

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$$

(c) On a

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Montrons maintenant que les normes  $\|\cdot\|_p$  sont toutes équivalentes. En effet, soient  $p, r \in [1, +\infty]$  et soit  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\|_r \leq n^{1/r} \|x\|_\infty \leq n^{1/r} \|x\|_1 \leq n^{1/r} n^{1/q} \|x\|_p \leq n^{1/r+1/q} \|x\|_p,$$

et de la même manière on trouve que

$$\|x\|_p \leq n^{1/p+1/s} \|x\|_r,$$

où  $s$  est tel que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ .

## Exercice 2. (Normes sur applications linéaires)

i) Par la linéarité de  $L$  et de la norme on a

$$\|L\|_{p,q} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_q}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_p=1}} \|Lx\|_q,$$

et donc  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  et  $\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ,  $\|\lambda L\|_{p,q} = |\lambda| \|L\|_{p,q}$ . Par l'inégalité triangulaire pour la norme  $\|\cdot\|_q$  on a  $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ,  $\|L_1 + L_2\|_{p,q} \leq \|L_1\|_{p,q} + \|L_2\|_{p,q}$  et finalement  $\|L\|_{p,q} = 0 \Rightarrow L = 0$ , car sinon il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Lx \neq 0$  et donc  $\|Lx\|_q \neq 0$ .

ii) Par rapport aux bases de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  on a pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad i = 1, \dots, m,$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |(Lx)_i| &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \right) |x_j| \leq \left( \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\|L\|_{1,1} \leq \sup_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$ . De plus, puisque  $\|Lx^j\| = \|A_j\|_1$  pour  $x^j = (0 \dots 0, x_j = 1, 0 \dots 0)$ , on a aussi  $\|L\|_{1,1} \geq \sup_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$ , ce qui montre l'égalité.

iii) Par rapport aux bases de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  on a pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad i = 1, \dots, m$$

et donc

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq m} |(Lx)_i| &= \sup_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq m} \left( \left( \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \\ &= \left( \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) \left( \sup_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\|L\|_{\infty,\infty} \leq \sup_{1 \leq i \leq m} \|A_i\|_1$ . De plus, pour le bon choix des vecteurs  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  de norme  $\|x\|_\infty = 1$  de la forme  $x = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$  on a

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|A_i\|_1, \quad i = 1, \dots, m,$$

et on a donc aussi que  $\|L\|_{\infty,\infty} \geq \sup_{1 \leq i \leq m} \|A_i\|_1$ , ce qui montre l'égalité.

iv) Par rapport aux bases de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  on a pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|Lx\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^T A x \rangle$$

avec  $\langle \rangle$  le produit scalaire Euclidien et  $A^T$  la matrice transposée de  $A$ . La matrice  $A^T A$  étant réel symétrique, il existe une matrice orthogonale  $O$  telle que  $O^T A^T A O = D$ , avec  $D$  la matrice diagonale qui contient les valeurs propres  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j = 1 \dots n$  de la matrice  $A^T A$ . Par conséquence

$$\begin{aligned} \|L\|_{2,2} &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=1}} \|Lx\|_2 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=1}} \sqrt{\langle x, A^T A x \rangle} \\ &= \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sqrt{\langle y, Dy \rangle} = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2} = \sqrt{\sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2} \\ &\leq \sqrt{\left( \sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \right) \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sum_{j=1}^n y_j^2} = \sqrt{\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j}. \end{aligned}$$

D'autres part pour  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur propre normalisé de la plus grande valeur propre  $\lambda$  de  $A^T A$  on a

$$\sqrt{\langle x, A^T A x \rangle} = \sqrt{\lambda}$$

et donc  $\|L\|_{2,2} \geq \sqrt{\lambda}$ , ce qui montre l'égalité.