Analyse avancée II – Corrigé de la série 8B

Échauffement. (Limite d'une fonction et continuité)

i) Définition de la limite en un point :

(a) Définition avec les suites
Une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet $\ell \in \mathbb{R}^m$ comme limite en $x^* \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers x^*, si pour toute suite $(x_k)_{k\geq 0}$, $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$, qui converge vers x^*, la suite $(y_k)_{k\geq 0}$, $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$, converge vers ℓ.

(b) Définition avec ε et δ
Une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet $\ell \in \mathbb{R}^m$ comme limite en $x^* \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers x^*, si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|x - x^*\| \leq \delta$ implique $\big\|f(x) - \ell\big\| \leq \varepsilon$.

Montrons maintenant l'équivalence des deux définitions.

(a) Limite selon ε et $\delta \Rightarrow$ limite selon la définition avec les suites
Supposons l'existence d'une limite selon la définition avec ε et δ. Soit une suite quelconque $(x_k)_{k\geq 0}$, $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$ qui converge vers x^*. Alors, par la définition de la convergence d'une suite, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \geq k_0$, $0 < \|x_k - x^*\| \leq \delta$. Donc, par la définition de la limite par ε et δ, $\forall k \geq k_0$, $\big\|f(x_k) - \ell\big\| \leq \varepsilon$, ce qui par la définition de la convergence d'une suite veut dire que la suite $(y_k)_{k\geq 0}$, $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$, converge vers ℓ.

(b) Limite selon la définition avec les suites $\Rightarrow$ limite selon ε et δ
Raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admette $\ell \in \mathbb{R}^m$ comme limite en $x^* \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers x^* selon la définition avec les suites, mais que ℓ n'est pas la limite de f en $x^* \in \mathbb{R}^n$ selon la définition avec ε et δ. Alors, $\exists \varepsilon > 0$, tel que $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}^n$, tel que $0 < \|x - x^*\| \leq \delta$ et $\big\|f(x) - \ell\big\| > \varepsilon$ (voir la série 1B pour la négation d'une implication logique). En particulier donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_k \in \mathbb{R}^n$, tel que $0 < \|x_k - x^*\| \leq \delta_k \equiv \dfrac{1}{k}$ et $\big\|f(x_k) - \ell\big\| > \varepsilon$. La suite $(x_k)_{k\geq 1}$ converge donc, par la définition de la convergence d'une suite, vers x^*, et donc $(y_k)_{k\geq 0}$, $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$ converge vers ℓ, en contradiction avec $\big\|f\,(x_k) - \ell\big\| > \varepsilon$. En conclusion, f admet ℓ comme limite selon la définition avec ε et δ.

ii) Les définitions de la continuité en un point sont identiques aux définitions de la limite, mais avec $\ell \in \mathbb{R}^m$ remplacé par $f(x^*) \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 1. (Inégalité de Young et de Hölder et équivalence de normes)

i) Inégalité de Young
Soit $1 < p < +\infty$ et q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On doit montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. D'abord, si $a = 0$ ou $b = 0$ (donc aussi si $a = b = 0$), l'inégalité est

triviale. Supposons donc que $a > 0$ et $b > 0$ et soit $g(s) = -\ln(s)$. On a pour tout $s \in]0, +\infty[$ que $g''(s) = \dfrac{1}{s^2} > 0$. Ainsi, la fonction g est convexe sur $]0, +\infty[$. Puisque $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a donc pour $1 < p < +\infty$ que

$$g\left(\frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q\right) \leqslant \frac{1}{p}\,g(a^p) + \frac{1}{q}\,g(b^q)$$

et de suite que

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

La fonction ln étant strictement croissante, ceci n'est possible que si

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

ii) Inégalité de Hölder

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, et soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire euclidien. On doit montrer que pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q .$$

(a) Si $p = 1$ et $q = +\infty$, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\langle x, y\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\right) \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_\infty \|y\|_1 .$$

(b) Soit maintenant $p \in]1, +\infty[$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, c'est-à-dire $q = \dfrac{p}{p-1}$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est triviale. On peut donc supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned}\left|\langle x, y\rangle\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda\,|x_i| \cdot \frac{1}{\lambda}\,|y_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p}\lambda^p\,|x_i|^p + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q}\frac{1}{\lambda^q}|y_i|^q = \frac{1}{p}\lambda^p \|x\|_p^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\lambda^q}\|y\|_q^q .\end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$ on obtient, puisque $p - \dfrac{p}{q} = q - \dfrac{q}{p} = 1$,

$$\lambda^p \|x\|_p^p = \|x\|_p^{-p/q} \|y\|_q \|x\|_p^p = \|x\|_p \|y\|_q ,$$

et

$$\frac{1}{\lambda^q}\|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q^{-q/p} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q .$$

Ainsi,

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \frac{1}{p}\|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q}\|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q .$$

iii) $\| \ \|_p$ est une norme pour $p \geq 1$ mais n'est pas une norme pour $0 < p < 1$

On va montrer que pour $p \geq 1$ l'inégalité triangulaire est satisfaite mais pas pour $p < 1$. Les autres propriétés d'une norme sont satisfaites pour tous les p.

(a) Soit $p \geq 1$ et soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Alors,

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \, . \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hölder $\langle a, b \rangle \leqslant \|a\|_p \, \|b\|_q$ avec

$$\begin{aligned} a &= \big(\, |x_1| \, , \dots , \, |x_n| \, \big) \\ b &= \Big(|x_1 + y_1|^{p-1} \, , \dots , \, |x_n + y_n|^{p-1} \Big) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} &= \langle a, b \rangle \leqslant \|a\|_p \, \|b\|_q \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} . \end{aligned}$$

Rappelant que, puisque $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p}\,(p-1)$ et $(p-1)q = p$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \|x\|_p \, \|x+y\|_p^{p-1} \, .$$

On obtient de la même manière que

$$\sum_{i=1}^n |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \|y\|_p \, \|x+y\|_p^{p-1} \, ,$$

et on a donc

$$\|x+y\|_p^p \leqslant \Big(\|x\|_p + \|y\|_p \Big) \, \|x+y\|_p^{p-1} \, .$$

De cette inégalité on obtient l'inégalité triangulaire recherchée, en divisant à gauche et à droite par $\|x+y\|_p^{p-1}$ si $\|x+y\|_p \neq 0$. Si $\|x+y\|_p = 0$, l'inégalité triangulaire est trivialement satisfaite. Les autres propriétés d'une norme sont immédiates.

(b) Soit $p < 1$ et soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, \dots, 0, 1)$. On a $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$, mais $\|x+y\|_p = 2^{1/p} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$, ce qui montre que l'inégalité triangulaire n'est pas toujours satisfaite, et $\| \ \|_p$ n'est donc pas une norme.

iv) Inégalités

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, et posons $|x| := \big(|x_1| \, , |x_2| \, , \dots , |x_n| \big)$. Soit $p > 1$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors,

(a) En posant $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ on obtient

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_1| = \langle |x|, y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q = n^{1/q} \|x\|_p$$

(b) On a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$$

(c) On a

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 .$$

Montrons maintenant que les normes $\| \ \|_p$ sont toutes équivalentes. En effet, soient $p, r \in [1, +\infty]$ et soit q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_r \leqslant n^{1/r} \|x\|_\infty \leqslant n^{1/r} \|x\|_1 \leqslant n^{1/r} n^{1/q} \|x\|_p \leqslant n^{1/r+1/q} \|x\|_p ,$$

et de la même manière on trouve que

$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p+1/s} \|x\|_r ,$$

où s est tel que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$.

Exercice 2. (Normes sur applications linéaires)

i) Par la linéarité de L et de la norme on a

$$\|L\|_{p,q} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_q}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_p = 1}} \|Lx\|_q,$$

et donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall L \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\big)$, $\|\lambda L\|_{p,q} = |\lambda| \|L\|_{p,q}$. Par l'inégalité triangulaire pour la norme $\| \ \|_q$ on a $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\big)$, $\|L_1 + L_2\|_{p,q} \leq \|L_1\|_{p,q} + \|L_2\|_{p,q}$ et finalement $\|L\|_{p,q} = 0 \Rightarrow L = 0$, car sinon il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Lx \neq 0$ et donc $\|Lx\|_q \neq 0$.

ii) Par rapport aux bases de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ on a pour $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \quad i = 1, \dots m,$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \left|(Lx)_i\right| &= \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \left|x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left|a_{i,j}\right| \left|x_j\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left|a_{i,j}\right| \right) \left|x_j\right| \leq \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \left|a_{i,j}\right| \right) \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right| \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|L\|_{1,1} \leq \sup_{1\leq j\leq n} \|A_j\|_1$. De plus, puisque $\left\|Lx^j\right\| = \left\|A_j\right\|_1$ pour $x^j = \big(0\ldots 0, x_j = 1, 0\ldots 0\big)$, on a aussi $\|L\|_{1,1} \geq \sup_{1\leq j\leq n} \|A_j\|_1$, ce qui montre l'égalité.

iii) Par rapport aux bases de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ on a pour $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \quad i = 1, \ldots m$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leq i\leq m} \left|(Lx)_i\right| &= \sup_{1\leq i\leq m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leq \sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \left|x_j\right| \\
&\leq \sup_{1\leq i\leq m} \left(\left(\sup_{1\leq j\leq n} \left|x_j\right|\right) \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|\right) \\
&= \left(\sup_{1\leq j\leq n} \left|x_j\right|\right) \left(\sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|\right)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\|L\|_{\infty,\infty} \leq \sup_{1\leq i\leq m} \|A_i\|_1$. De plus, pour le bon choix des vecteurs $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ de norme $\|x\|_\infty = 1$ de la forme $x = (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ on a

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = \|A_i\|_1, \quad i = 1, \ldots m,$$

et on a donc aussi que $\|L\|_{\infty,\infty} \geq \sup_{1\leq i\leq m} \|A_i\|_1$, ce qui montre l'égalité.

iv) Par rapport aux bases de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ on a pour $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Lx\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \left\langle x, A^{\mathrm{T}} A x\right\rangle$$

avec $\langle\ \rangle$ le produit scalaire Euclidien et A^{T} la matrice transposée de A. La matrice $A^{\mathrm{T}}A$ étant réel symétrique, il existe une matrice orthogonale O telle que $O^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AO = D$, avec D la matrice diagonale qui contient les valeurs propres $\lambda_j \geq 0$, $j = 1 \ldots n$ de la matrice $A^{\mathrm{T}}A$. Par conséquence

$$\begin{aligned}
\|L\|_{2,2} &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Lx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=1}} \|Lx\|_2 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=1}} \sqrt{\langle x, A^{\mathrm{T}}Ax\rangle} \\
&= \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sqrt{\langle y, Dy\rangle} = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2} = \sqrt{\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\sup_{1\leq j\leq n} \lambda_j\right) \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sum_{j=1}^{n} y_j^2} = \sqrt{\sup_{1\leq j\leq n} \lambda_j}\,.
\end{aligned}$$

D'autres part pour $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur propre normalisé de la plus grande valeur propre λ de $A^{\mathrm{T}}A$ on a

$$\sqrt{\langle x, A^{\mathrm{T}}Ax\rangle} = \sqrt{\lambda}$$

et donc $\|L\|_{2,2} \geq \sqrt{\lambda}$, ce qui montre l'égalité.