Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 8B

Échauffement. (Limite d'une fonction et continuité)

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Donner les définitions de la limite épointée de f en un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ en termes de suites et par "ε et δ" et montrer l'équivalence des deux définitions.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Donner les définitions de la continuité de f en un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ en termes de suites et par "ε et δ" et montrer l'équivalence des deux définitions.

Exercice 1. (Inégalité de Young et de Hölder et équivalence de normes)

1. Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q,$$

   où $p, q \in\,]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

   Indication : utiliser le fait que la fonction $\ln \colon]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ est concave et appliquer ln à la relation d'inégalité.

2. Démontrer que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et si $\langle x, y\rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q$$

   où $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Ici, par convention, $[1, +\infty] := [1, +\infty[\, \cup \{+\infty\}$ et $\dfrac{1}{+\infty} := 0$.

   Indication : poser $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$ et utiliser l'inégalité de Young, après avoir écrit $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n \Big(\lambda\, |x_i|\Big) \left(\dfrac{1}{\lambda}\, |y_i|\right)$.

3. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty[$ mais pas pour $p \in\,]0, 1[$.

   Indication : partir de $\|x + y\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser l'inégalité de Hölder.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in\,]1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty[$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|x\|_1 \leqslant n^{1/q}\ \|x\|_p\,,$$
$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p}\ \|x\|_\infty\,,$$
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1\,.$$

   En déduire que toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, +\infty]$, sont équivalentes.

Ex. 2 au verso.

Exercice 2. (Normes sur applications linéaires)
L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel réel de dimension $m \cdot n$ sur $\mathbb{R}$. Soient $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ équipés respectivement de la norme $\| \ \|_p$ et de la norme $\| \ \|_q$, et soit $A = (a_{i,j})$, $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$, la matrice qui représente l'application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que la fonction $\| \ \|_{p,q} \colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$,
$$L \mapsto \|L\|_{p,q} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_q}{\|x\|_p}$$
définie une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

2. Montrer que $\|L\|_{1,1} = \sup_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$, où $A_j := (a_{1,j}, \ldots, a_{m,j})^{\mathrm{T}}$ est le vecteur formé des éléments de la j-ième colonne de la matrice A.

3. Montrer que $\|L\|_{\infty,\infty} = \sup_{1 \leq i \leq m} \|A_i\|_1$, où $A_i := (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})^{\mathrm{T}}$ est le vecteur formé des éléments de la i-ième ligne de la matrice A.

4. Montrer que $\|L\|_{2,2}$ est égal à la racine carrée de la plus grande valeur propre de la matrice $A^{\mathrm{T}}A$, où A^{T} est la matrice transposée de la matrice A.