

## Analyse avancée II – Série 8B

**Échauffement.** (Limite d'une fonction et continuité)

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Donner les définitions de la limite épointée de  $f$  en un point  $x^* \in \mathbb{R}^n$  en termes de suites et par “ $\varepsilon$  et  $\delta$ ” et montrer l'équivalence des deux définitions.
2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Donner les définitions de la continuité de  $f$  en un point  $x^* \in \mathbb{R}^n$  en termes de suites et par “ $\varepsilon$  et  $\delta$ ” et montrer l'équivalence des deux définitions.

**Exercice 1.** (Inégalité de Young et de Hölder et équivalence de normes)

1. Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

où  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

*Indication* : utiliser le fait que la fonction  $\ln: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est concave et appliquer  $\ln$  à la relation d'inégalité.

2. Démontrer que si  $x, y \in \mathbb{R}^n$  où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  et si  $\langle x, y \rangle$  est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

où  $p, q \in [1, +\infty]$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Ici, par convention,  $[1, +\infty] := [1, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  et  $\frac{1}{+\infty} := 0$ .

*Indication* : poser  $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$  et utiliser l'inégalité de Young, après avoir écrit  $|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \left( \lambda |x_i| \right) \left( \frac{1}{\lambda} |y_i| \right)$ .

3. Montrer que  $\|\cdot\|_p$  est une norme pour  $p \in [1, +\infty[$  mais pas pour  $p \in ]0, 1[$ .

*Indication* : partir de  $\|x + y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$  et utiliser l'inégalité de Hölder.

4. Soient  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in ]1, +\infty]$  et  $q \in [1, +\infty[$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|x\|_1 \leq n^{1/q} \|x\|_p,$$

$$\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1.$$

En déduire que toutes les normes  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , sont équivalentes.

**Exercice 2.** (Normes sur applications linéaires)

L'ensemble  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  est un espace vectoriel réel de dimension  $m \cdot n$  sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  équipés respectivement de la norme  $\|\cdot\|_p$  et de la norme  $\|\cdot\|_q$ , et soit  $A = (a_{i,j})$ ,  $i = 1 \dots m$ ,  $j = 1 \dots n$ , la matrice qui représente l'application linéaire  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  par rapport aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ .

1. Montrer que la fonction  $\|\cdot\|_{p,q} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L \mapsto \|L\|_{p,q} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_q}{\|x\|_p}$$

définie une norme sur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

2. Montrer que  $\|L\|_{1,1} = \sup_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$ , où  $A_j := (a_{1,j}, \dots, a_{m,j})^T$  est le vecteur formé des éléments de la  $j$ -ième colonne de la matrice  $A$ .
3. Montrer que  $\|L\|_{\infty,\infty} = \sup_{1 \leq i \leq m} \|A_i\|_1$ , où  $A_i := (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})^T$  est le vecteur formé des éléments de la  $i$ -ième ligne de la matrice  $A$ .
4. Montrer que  $\|L\|_{2,2}$  est égal à la racine carrée de la plus grande valeur propre de la matrice  $A^T A$ , où  $A^T$  est la matrice transposée de la matrice  $A$ .