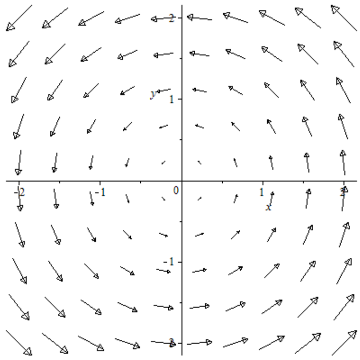
5.3. Fonctions différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ $(m=n)$

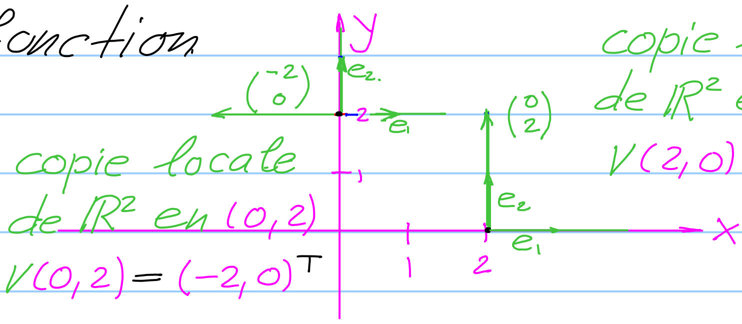
5.3.1. Représentation graphique (champ de vecteurs)



Exemple: $V: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto V(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

nom de la fonction

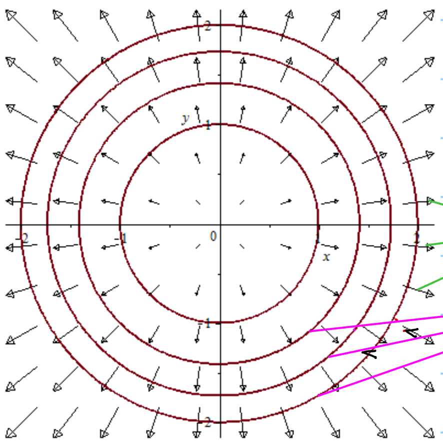


En chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ du domaine de définition de la fonction V on attache une copie de $\mathbb{R}^2$, et l'image $V(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est interprétée comme un vecteur dans ce référentiel.

> **Remarque:** si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors $V = \nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est représenté par un champ de vecteurs

Exemple: soit $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

alors $V(x,y) = (\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$



le champ de vecteur $V = \nabla f$

lignes de niveau de f

> Ces deux informations sur f sont étroitement liées.

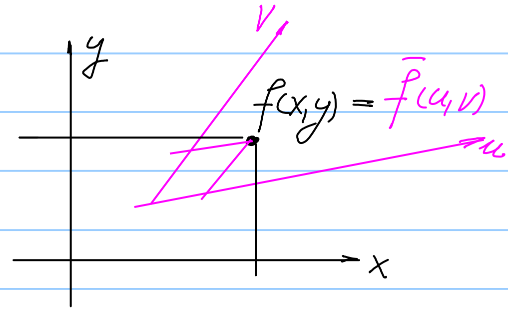
(voir plus loin)

5.4 Changements de coordonnées (fonctions bijectives)

5.4.1 Définitions (pour $n=2$)

<u>Définition</u> soient les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec G une fonction bijective telles que $\bar{f}(u,v) = f(x,y)$ si $(x,y) = G(u,v)$.
Alors G est appelé un changement de coordonnées et $H \equiv G^{-1}$ le changement de coordonnées inverse

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \in \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[d, shift left, "H \equiv G^{-1}"] & & \mathbb{R} \\
(u,v) \in \mathbb{R}^2 \arrow[u, shift left, "\text{bijective } G"] \arrow[urr, "\bar{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$



<u>Remarque:</u> donné f et G une fonction bijective on peut définir $\bar{f}$ par $\bar{f}(u,v) = f(G(u,v))$.
$\bar{f}$ exprime alors la fonction f dans les "nouvelles" coordonnées.

<u>Réciproquement:</u> $f(x,y) = \bar{f}(G^{-1}(x,y)) = \bar{f}(H(x,y))$

5.4.2. Fonctions continues

<u>Théorème:</u> soit $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $G: \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue injective. Alors $\operatorname{Im}(G) \equiv G(\tilde{D}) \equiv D$ est un ensemble ouvert et $H \equiv G^{-1}: D \longrightarrow \tilde{D}$ est une fonction continue.

Démonstration : voir le cour de topologie générale ; trop difficile pour ce cours. Pour $n=1$ voir l'intermezzo, semaine 4.

5.4.3 Fonctions de classe C^1

Dérivée de la fonction réciproque ($n=2$).

Soit $\quad H = G^{-1}$

Donc $\quad (H \circ G)(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (*)$

$\quad (G \circ H)(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

De $(*)$ on trouve par dérivation en chaîne

$$(H' \circ G)(u,v) \cdot G'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(u,v)$

$$H'(x,y) \cdot G'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou avec la notation des matrices jacobiennes:

$$\boxed{J_H(x,y) \cdot J_G(u,v) = J_{id} \qquad (*).}$$

application identitée

ou encore

$$\boxed{\begin{aligned} J_H(x,y) &= \left(J_G(u,v)\right)^{-1} \\ &\equiv \left(J_G \circ H(x,y)\right)^{-1} \end{aligned}}$$

Voir Analyse I, ceci généralise l'identité pour la dérivée d'une fonction réciproque d'une variable.

Remarque: $(*) \Rightarrow \det(J_H(x,y)) \cdot \det(J_G(u,v)) = 1$

pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(u,v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = H(x,y)$

Théorème: si $G: \tilde{D} \longrightarrow D$, $\tilde{D}, D \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, est bijective avec G et $H = G^{-1}$ de classe C^1, alors $\det(J_G) \neq 0$ en tout point de $\tilde{D}$.
Réciproquement, si G est de classe C^1 et si, pour un point $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$, $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$, il existe un voisinage $\tilde{U}$ de $\tilde{x}_0$ et un voisinage U de $x_0 = G(\tilde{x}_0)$, tels que $G: \tilde{U} \longrightarrow U$ soit bijective, avec $H = G^{-1}$ de classe C^1

Remarque: $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = x^3$ ne satisfait pas les conditions du théorème sur $\tilde{D} = \mathbb{R}$

Pour la démonstration voir le paragraphe 5.4.6

5.4.4 Le laplacien d'une fonction

<u>Définition</u> (le Laplacien de f). Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2. Si (x,y) sont des coordonnées cartésiennes, la fonction

la trace de la matrice

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y) = tr(Hess(f))(x,y)$$

est appelée le laplacien de f, et l'application (linéaire)

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}^2)$$
$$f \longmapsto g = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = tr(Hess(f))$$

est appelée le laplacien

<u>Notation</u>: on écrit souvent $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, où $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sont interprétés comme les applications linéaires de $C^2(\mathbb{R}^2)$ dans $C^0(\mathbb{R}^2)$ qui associent à la fonction f respectivement la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

5.4.5 Le laplacien en coordonnées polaires

Coordonnées polaires (voir 5.2.5. Ex. 2)

$$G : \,]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0]$$

$$(r,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2, x, y des coordonnées cartésiennes. On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{G} & \bar{f} = f \circ G \\ \Big\downarrow \Delta & & \Big\downarrow \bar{\Delta} \\ g = \Delta f & \xrightarrow{G} & \bar{g} = g \circ G = \bar{\Delta}\bar{f} \end{array}$$

Proposition (Laplacien en coordonnées polaires)

$$(\bar{\Delta}\bar{f})(r,\varphi) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)$$

c.-à-d.
$$\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \qquad (*)$$

a) pour vérifier $(*)$ il faut utiliser G

$$J_G(r,\varphi) \equiv G'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \underset{}{\overset{\frac{\partial x}{\partial r} \,=}{\cos(\varphi)}} & \overset{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \,=}{-r\cdot\sin(\varphi)} \\ \underset{=\, \frac{\partial y}{\partial r}}{\sin(\varphi)} & \underset{=\, \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{r\cdot\cos(\varphi)} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

De $\bar{f}(r,\varphi) = f(x,y) = f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))$ on obtient

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \overset{\frac{\partial x}{\partial r}}{\overset{\|}{\cos(\varphi)}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \overset{\frac{\partial y}{\partial r}}{\overset{\|}{\sin(\varphi)}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos(\varphi)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin(\varphi)^2$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{(-r \cdot \sin(\varphi))}_{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} + \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{(r \cdot \cos(\varphi))}_{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (-r \sin(\varphi))^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (-r \cdot \sin(\varphi)) \cdot (r \cdot \cos(\varphi))$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (r \cdot \cos(\varphi))^2$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x} (-r \cdot \cos(\varphi)) + \frac{\partial f}{\partial y} (-r \cdot \sin(\varphi))$$

et si on substitue dans l'expression donnée pour $\bar{\Delta}$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos(\varphi)^2 + \cancel{2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos(\varphi)\sin(\varphi)} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin(\varphi)^2$$
$$+ \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\varphi)} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\varphi)}$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin(\varphi)^2 - \cancel{2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos(\varphi)^2$$
$$- \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\varphi)} - \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\varphi)}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ce qui montre que $\bar{\Delta}$ est bien le laplacien en coordonnées polaires

b) pour trouver (*) il faut utiliser H

$$\mathcal{J}_H(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \Bigg|_{\binom{r}{\varphi}=H(x,y)}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \| & \| \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r}\sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \| & \| \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \end{array} \Bigg|_{\binom{r}{\varphi}=H(x,y)} \qquad (2)$$

et on peut donc calculer $\bar{\Delta}$. On a

$$f(x,y) = \bar{f}(r,\varphi) = \bar{f}(H(x,y))$$

et on obtient avec (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\cos(\varphi) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}\cos(\varphi)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r\partial\varphi}\cos(\varphi)\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right) \\ & + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)^2 \\ & + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\left(-\sin(\varphi)\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)\right) \\ & + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\left(\left(\frac{1}{r^2}\sin(\varphi)\right)\cos(\varphi) - \frac{1}{r}\cos(\varphi)\left(-\frac{1}{r}\sin(\varphi)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\sin(\varphi) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cos(\varphi)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} \sin(\varphi)^2}_{} + 2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r \partial \varphi} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)^2}_{}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \cos(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)}_{}$$

$$+ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \left(\left(-\frac{1}{r^2} \sin(\varphi)\right) \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{r} \cos(\varphi)\right)\right)$$

et donc

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)$$

$$= \bar{\Delta} \bar{f}(r,\varphi)$$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(r,\varphi) \iff \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = H(x,y)$