

## Analyse avancée II – Corrigé de la série 8A

### Échauffement.

i) On a que  $f(t) = e^{\ln(\ln(t)) \cdot \sin(t)}$  et donc

$$\begin{aligned} f'(t) &= f(t) \cdot \left( \frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t) \right) \\ &= \ln(t)^{\sin(t)} \frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + \ln(t)^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t) \\ &= \ln(t)^{\sin(t)-1} \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + \ln(t)^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t). \end{aligned}$$

ii) Voir le chapitre 5.2.4 du cours.

### Exercice 1.

Les matrices jacobiniennes de  $F$  et  $G$  sont

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x F_1(x, y) & \partial_y F_1(x, y) \\ \partial_x F_2(x, y) & \partial_y F_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_G(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_s G_1(s, t) & \partial_t G_1(s, t) \\ \partial_s G_2(s, t) & \partial_t G_2(s, t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$J_F(G(s, t)) = \begin{pmatrix} (\partial_x F_1)(G(s, t)) & (\partial_y F_1)(G(s, t)) \\ (\partial_x F_2)(G(s, t)) & (\partial_y F_2)(G(s, t)) \end{pmatrix},$$

Le produit des deux matrices est donc (les arguments sont omis pour des raisons d'espace)

$$J_F(G(s, t)) \cdot J_G(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_x F_1 \partial_s G_1 + \partial_y F_1 \partial_s G_2 & \partial_x F_1 \partial_t G_1 + \partial_y F_1 \partial_t G_2 \\ \partial_x F_2 \partial_s G_1 + \partial_y F_2 \partial_s G_2 & \partial_x F_2 \partial_t G_1 + \partial_y F_2 \partial_t G_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

D'autre part la matrice jacobienne de  $\bar{F}$  est

$$J_{\bar{F}}(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_s \bar{F}_1(s, t) & \partial_t \bar{F}_1(s, t) \\ \partial_s \bar{F}_2(s, t) & \partial_t \bar{F}_2(s, t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

En notation courte on a

$$\partial_s \bar{F}_i(s, t) = \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial s} = \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad i = 1, 2,$$

avec  $x(s, t) \equiv G_1(s, t)$  et  $y(s, t) \equiv G_2(s, t)$ , ce qui s'écrit proprement comme

$$\partial_s \bar{F}_i(s, t) = \partial_s (F_i \circ G)(s, t) = (\partial_x F_i)(G(s, t)) \cdot (\partial_s G_1)(s, t) + (\partial_y F_i)(G(s, t)) \cdot (\partial_s G_2)(s, t).$$

Les membres de droite de (2) et (1) sont bien égaux, c'est-à-dire

$$J_{\bar{F}}(s, t) = J_F(G(s, t)) \cdot J_G(s, t).$$

## Exercice 2.

Soit

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto g(x, y, z) \end{aligned}$$

une fonction quelconque de classe  $C^1$ . On considère la fonction

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto h(u, v) = (ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \end{aligned}$$

et on définit  $f = g \circ h$ . Alors

$$\square \quad \frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1)$$

$$\square \quad \frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 1)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$$

$$\square \quad \frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$$

La fonction  $f$  est définie par

$$f(u, v) = g(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial x}(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \cdot ve^{-2u} \cdot (-2) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \cdot 2ue^{-v} \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial z}(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \cdot 1 \end{aligned}$$

et comme  $\left[ (ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \right]_{(u,v)=(1,0)} = (0, 1, 1)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) \cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) \cdot 2 + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1) \cdot 1 \\ &= 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1). \end{aligned}$$

## Exercice 3.

Soient  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux fonctions de classe  $C^1$ . Soit  $h = f \circ g$  et  $p \in \mathbb{R}^n$ . Alors

$$J_h(p) = J_g(f(p)) \cdot J_f(p).$$

□ VRAI      ■ FAUX

Non, pour  $h = f \circ g$  on a

$$J_h(p) = J_f(g(p)) J_g(p).$$

**Exercice 4.**

- i) Le domaine de  $H$  est  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ . Ainsi  $u > 0$  parce que  $x > 0$  et donc  $\text{Im}(H) = \tilde{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ , c.-à-d.  $\tilde{D} = D$ . Pour trouver la transformation  $G \equiv H^{-1}$  on résout les équations de  $u$  et  $v$  pour  $x$  et  $y$ . On a  $y = v\sqrt{x}$ , d'où

$$u = x^2 + 2v^2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2v^2 \pm \sqrt{4v^4 + 4u}}{2} = -v^2 \pm \sqrt{v^4 + u}.$$

Comme  $x > 0$ , il faut prendre la solution avec  $+\sqrt{\phantom{x}}$  et donc

$$(x, y) = G(u, v) = \left( -v^2 + \sqrt{v^4 + u}, v\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} \right).$$

Les dérivées partielles de  $G$  sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial u} &= \frac{1}{2\sqrt{v^4 + u}} \\ \frac{\partial G_1}{\partial v} &= -2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4 + u}} = \frac{-2v(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})}{\sqrt{v^4 + u}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} &= \frac{v}{4\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial v} &= \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} + \frac{v}{2\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \left( -2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4 + u}} \right) \\ &= \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} + \frac{-v^2(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})}{\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \\ &= \frac{(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})^2}{\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de  $G$  est alors

$$\begin{aligned} J_G(u, v) &= \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u, v) & \partial_v G_1(u, v) \\ \partial_u G_2(u, v) & \partial_v G_2(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{v^4 + u}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2v(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}) \\ \frac{v}{4\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} & \frac{(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})^2}{\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour évaluer en  $(u, v) = H(x, y)$ , observons que

$$\sqrt{v^4 + u} = \sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^4 + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{x^2} + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{(y^2 + x^2)^2}{x^2}} = \frac{y^2 + x^2}{x}$$

et donc

$$J_G(H(x, y)) = \frac{x}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2y\sqrt{x} \\ \frac{y}{4x} & x^{3/2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ii) La matrice jacobienne de  $H$  est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ -\frac{y}{2x^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix},$$

d'où

$$(J_H(x, y))^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x} + \frac{2y^2}{x^{3/2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} & -4y \\ \frac{y}{2x^{3/2}} & 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x & -4yx^{3/2} \\ \frac{y}{2} & 2x^{5/2} \end{pmatrix},$$

ce qui est la même matrice qu'en (3).

### Exercice 5.

i) La matrice jacobienne de  $H$  est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x+2)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & -\frac{2x}{(2y+1)^2} \end{pmatrix}.$$

ii) Pour trouver la transformation  $G \equiv H^{-1}: \tilde{D} \rightarrow D$ , on utilise

$$v = \frac{x}{2y+1} \Leftrightarrow x = v(2y+1) \quad (4)$$

qu'on met dans l'expression donnée pour  $u$

$$\begin{aligned} u = \frac{y}{x+2} &\Rightarrow u = \frac{y}{v(2y+1)+2} \Rightarrow uv(2y+1) + 2u = y \\ &\Rightarrow uv + 2u = y(1 - 2uv) \Rightarrow y = \frac{u(v+2)}{1-2uv}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $y$  dans l'équation de droite dans (4) par ce résultat, on trouve

$$x = \frac{2uv(v+2)}{1-2uv} + v = \frac{2uv(v+2) + v - 2uv^2}{1-2uv} = \frac{(4u+1)v}{1-2uv},$$

si bien que

$$G(u, v) = \left( \frac{(4u+1)v}{1-2uv}, \frac{u(v+2)}{1-2uv} \right) = \frac{1}{1-2uv} \left( (4u+1)v, u(v+2) \right).$$

La matrice jacobienne de  $G$  est alors

$$\begin{aligned} J_G(u, v) &= \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u, v) & \partial_v G_1(u, v) \\ \partial_u G_2(u, v) & \partial_v G_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2v(v+2)}{(1-2uv)^2} & \frac{4u+1}{(1-2uv)^2} \\ \frac{v+2}{(1-2uv)^2} & \frac{u(4u+1)}{(1-2uv)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-2uv)^2} \begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

iii) On commence par calculer l'inverse de  $J_H(x, y)$ . On a

$$\det(J_H(x, y)) = \frac{2xy}{(x+2)^2(2y+1)^2} - \frac{1}{(x+2)(2y+1)} = -\frac{x+4y+2}{(x+2)^2(2y+1)^2}$$

et donc

$$\begin{aligned}(J_H(x, y))^{-1} &= \frac{(x+2)^2(2y+1)^2}{x+4y+2} \begin{pmatrix} \frac{2x}{(2y+1)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & \frac{y}{(x+2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x+4y+2} \begin{pmatrix} 2x(x+2)^2 & (x+2)(2y+1)^2 \\ (x+2)^2(2y+1) & y(2y+1)^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Afin d'évaluer  $(J_H(x, y))^{-1}$  en  $G(u, v)$ , on commence par évaluer les quelques termes qui apparaissent souvent. Comme

$$x = \frac{(4u+1)v}{1-2uv} \quad \text{et} \quad y = \frac{u(v+2)}{1-2uv}$$

par définition de  $G$ , on obtient

$$\begin{aligned}x+4y+2 &= \frac{(4u+1)v + 4u(v+2) + 2 - 4uv}{1-2uv} = \frac{4uv + v + 8u + 2}{1-2uv} = \frac{(4u+1)(v+2)}{1-2uv} \\ x+2 &= \frac{(4u+1)v + 2 - 4uv}{1-2uv} = \frac{v+2}{1-2uv} \\ 2y+1 &= \frac{2u(v+2) + 1 - 2uv}{1-2uv} = \frac{4u+1}{1-2uv}\end{aligned}$$

et donc la matrice est

$$\begin{aligned}(J_H(x, y))^{-1} \Big|_{(x,y)=G(u,v)} &= \frac{1-2uv}{(4u+1)(v+2)} \begin{pmatrix} \frac{2(4u+1)v}{1-2uv} \left(\frac{v+2}{1-2uv}\right)^2 & \frac{v+2}{1-2uv} \left(\frac{4u+1}{1-2uv}\right)^2 \\ \left(\frac{v+2}{1-2uv}\right)^2 \frac{4u+1}{1-2uv} & \frac{u(v+2)}{1-2uv} \left(\frac{4u+1}{1-2uv}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-2uv)^2} \begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Une comparaison avec (5) montre qu'on a bien  $(J_H(x, y))^{-1} \Big|_{(x,y)=G(u,v)} = J_G(u, v)$ .

### Exercice 6.

On a  $f(x, y) = \bar{f}(u(x, y), v(x, y)) = \bar{f}(2x-y, x+3y)$ . En utilisant la formule pour la dérivation de fonctions composées du cours et la règle de la dérivée d'un produit, on a successivement

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Les dérivées analogues par rapport à  $y$ , c.-à-d.  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , sont obtenues en remplaçant  $x$  par  $y$  ci-dessus. En substituant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

dans les expressions pour  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= 5 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} + 10 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2} \end{aligned}$$