

Analyse avancée II – Série 8A

Échauffement. (Dérivée en chaîne)

Calculer la dérivée de la fonction

$$f :]1, \infty[\mapsto \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \ln(t)^{\sin(t)}$$

i) par calcul direct

ii) en utilisant que $f(t) = (g \circ h)(t)$ avec $g(x, y) = x^y$ et $h(t) = (\ln(t), \sin(t))^T$.

Exercice 1. (Matrice jacobienne)

Soient les fonctions $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . On note

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad G(s, t) = \begin{pmatrix} G_1(s, t) \\ G_2(s, t) \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$\bar{F}(s, t) = F(G_1(s, t), G_2(s, t)) = (F \circ G)(s, t).$$

Soient $J_F(x, y)$, $J_G(s, t)$ et $J_{\bar{F}}(s, t)$ les matrices jacobiennes de F , G et \bar{F} . Montrer par un calcul explicite que

$$J_{\bar{F}}(s, t) = J_F(G(s, t)) \cdot J_G(s, t),$$

où \cdot est le produit matriciel.

Exercice 2. (QCM : dérivée en chaîne)

Soit

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$$

une fonction quelconque de classe C^1 . On considère la fonction

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto h(u, v) = (ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u)$$

et on définit $f = g \circ h$. Alors

- $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1)$
- $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 1)$
- $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$
- $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$

Exercice 3. (V/F : dérivée en chaîne)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1 . Soit $h = f \circ g$ et $p \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$J_h(p) = J_g(f(p)) J_f(p).$$

Exercice 4. (Changement de coordonnées)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $H : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées inverse défini par $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$u = x^2 + 2y^2, \quad v = \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

- i*) Trouver le domaine D et l'image \tilde{D} de H . Calculer la transformation $G \equiv H^{-1} : \tilde{D} \rightarrow D$ ainsi que sa matrice jacobienne $J_G(u, v)$ et évaluer cette dernière en $(u, v) = H(x, y)$.
- ii*) Calculer $(J_H(x, y))^{-1}$ et comparer avec le résultat de *i*).

Exercice 5. (Changement de coordonnées)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine convenable et soit $H : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées inverse (bijectif de classe C^1 avec $G = H^{-1}$ de classe C^1) défini par $(u, v) = H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y))$ avec

$$H_1(x, y) = \frac{y}{x+2}, \quad H_2(x, y) = \frac{x}{2y+1}.$$

- i*) Calculer la matrice jacobienne $J_H(x, y)$ de cette transformation.
- ii*) On note \tilde{D} l'image de H . Trouver la transformation $G \equiv H^{-1} : \tilde{D} \rightarrow D$ et calculer $J_G(u, v)$.
- iii*) Vérifier par calcul explicite que $J_G(u, v) = (J_H(x, y))^{-1} \Big|_{(x,y)=G(u,v)}$.

Exercice 6 (Laplacien)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe C^2 et soit la fonction $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \bar{f}(u, v)$, définie par

$$\bar{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 3y \end{cases}.$$

Exprimer le laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ par rapport aux variables u et v .