

Théorème des accroissements finis

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $\Theta \in]0, 1[$ tel que.

$$f'(a + \Theta \cdot (b - a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(a + \Theta \cdot (b - a)) \cdot (b - a).$$

Attention: Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Alors.

$$(\overset{\circ}{\bar{X}}) \supset X$$

Exemple: $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\bar{X} = \mathbb{R}^n$, $(\overset{\circ}{\bar{X}}) = \mathbb{R}^n$.

Definition: Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction continue $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un prolongement (par continuité) de f si $\bar{f}|_X = f$.

Remarque: Un prolongement, s'il existe, est unique.

Remarque: Dans la suite, si un prolongement existe on va définir f sur $\bar{D} = (\overset{\circ}{\bar{D}})$.

4.6.5 La différentielle (= fonction dérivée)

Definition Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Si f est différentiable sur D , c.-à-d. si f est différentiable en tout point $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ \underline{x} &\longmapsto f'(\underline{x}) \end{aligned} \quad \text{(dérivée (totale) de } f \text{ en } \underline{x})$$

Cette fonction est appelée la différentielle de f .

Notations: f' , df , ... pour la différentielle.

4.7. Fonctions de classe C^k

Définition (n général) Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$,
 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert.
Alors

$$f \in C^1(D) : \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}, j=1, \dots, n$$

existent et sont continues sur D

$$f \in C^k(D) : \Leftrightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \quad \begin{array}{l} l_1 + \dots + l_n = k \\ l_i \in \{0, \dots, k\} \end{array}$$

↑
ainsi que les permutations

existent et sont continues sur D .

Exemple: $n=2, k=3$
 $l_1=1, l_2=2$
 $f(x,y)$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}}_{\text{"permutations"}}$$

Théorème: soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$
 $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit f une fonction
de classe C^k . Alors, les fonctions

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \quad \begin{array}{l} l_1 + \dots + l_n = k \\ l_i \in \{0, \dots, k\} \end{array}$$

sont égales aux fonctions "avec les ∂x_i permutes"

Exemples: si $f(x,y)$ est de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{pas de permutations}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{pas de permutations}$$

et si $f(x,y)$ est de classe $C^3(\mathbb{R}^2)$ on a en plus

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Ce théorème est une conséquence du théorème de Schwarz :

Théorème: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et supposons que pour $i \neq j$

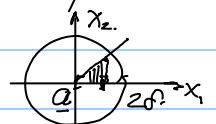
les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur D

et sont continues en $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a})$$

Démonstration

C'est un théorème local. On peut, pour $\delta > 0$ petit restreindre f à $B(\underline{a}, 2\delta) \subset D$.



Soit $\underline{n}=2$, $\underline{i}=1$, $\underline{j}=2$ et soit, pour $v \in [0, \delta]$ et $s \in [0, v]$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(s) := f(a_1 + v, a_2 + s) - f(a_1, a_2 + s), \\ h(s) := f(a_1 + s, a_2 + v) - f(a_1 + s, a_2). \end{array} \right\} (*)$$

Remarque:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{g(v) - g(0)} = f(a_1 + v, a_2 + v) - f(a_1, a_2 + v) \\ \quad - f(a_1 + v, a_2) + f(a_1, a_2) = \underline{h(v) - h(0)} \end{array} \right\} (**)$$

Pour $s \in]0, v[$ on a

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + v, a_2 + s) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + s), \\ h'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + s, a_2 + v) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + s, a_2), \end{array} \right\} (***)$$

En utilisant le théorème des accroissements finis (pour la variable v) on obtient dans (***) qu'il existe $\theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} g'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 v, a_2 + s) v, \quad (1) \\ h'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + s, a_2 + \theta_2 v) v, \quad (2). \end{array} \right.$$

et de même qu'il existe $\theta_3, \theta_4 \in]0, 1[$ tels que

$$\textcircled{1} \quad \underline{g(v) - g(0)} = g'(\theta_3 v) v \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_3 v, a_2 + \theta_3 v) v^2$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{h(v) - h(0)} = h'(\theta_4 v) v \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_4 v, a_2 + \theta_4 v) v^2$$

et donc puisque par (**) $\underline{g(v) - g(0)} = \underline{h(v) - h(0)}$ que

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 v, a_2 + \theta_3 v) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_4 v, a_2 + \theta_2 v) \stackrel{\textcircled{2}}{=} (*)$$

En utilisant la continuité des fonctions

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ en (a_1, a_2) on obtient, lorsque

ν tend vers zéro, que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} (a_1, a_2).$$

ceci termine la démonstration pour $n=2$. Si $n \geq 3$, $i < j$ on applique le même argument à la fonction $f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_i, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

La généralisation du théorème de Schwarz aux dérivées partielles d'ordre plus élevé s'obtient par récurrence.

4.8. Le plan tangent ($n=2$)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in D$ on a pour (x,y) proche de (x_0, y_0) :

$$\underbrace{f(x,y)}_{\equiv z} = f\left(x_0 + \underbrace{(x-x_0)}_{\equiv h}, y_0 + \underbrace{(y-y_0)}_{\equiv k}\right)$$
$$= f(x_0, y_0) + A\left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right) + \varepsilon(\underbrace{x_0+h}_{\equiv x}, \underbrace{y_0+k}_{\equiv y}) \underbrace{\left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\|}_{\equiv \sqrt{h^2+k^2}} = \dots$$

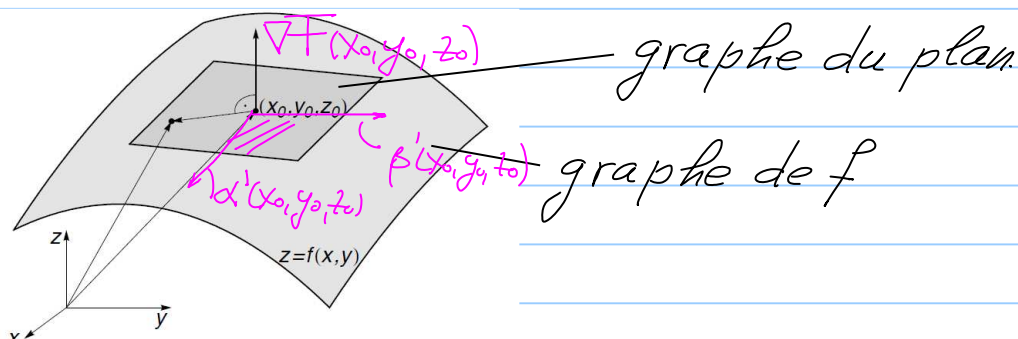
「 A est la matrice de l'application linéaire $f'(x_0, y_0)$ dans les coordonnées données

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \quad \text{」}$$

$$\dots = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\equiv c \equiv z_0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{\equiv a} h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\equiv b} k + \text{"petit"}$$

donc $\underbrace{z = c + a(x-x_0) + b(y-y_0)}_{\longleftrightarrow} + \text{"petit"}$

$$z = (c - ax_0 - by_0) + ax + by \quad (\text{l'équation d'un plan})$$

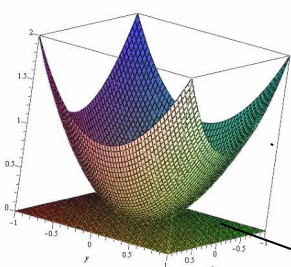


Ce plan est tangent au graphe de f en (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$

Conclusion: différentiable $\Leftrightarrow$ existence d'un plan tangent

Remarque: on a la même conclusion pour $n > 2$ avec le plan remplacé par un "hyper-plan" = graphe d'une fonction affine de n variables. Pour $n=1$ on obtient comme graphe une droite.

Exemples

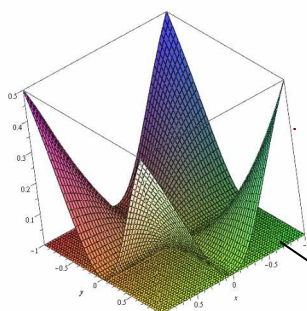


$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$f(x, y) = 0 + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \text{"petit"}$$

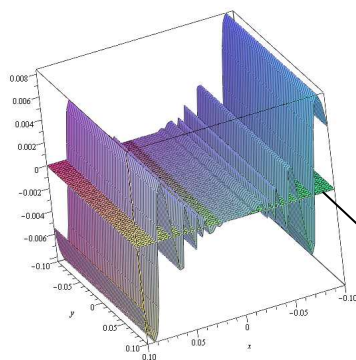
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

$$z = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

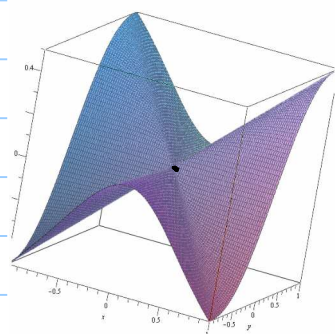
$$z = 0 \text{ en } (x_0, y_0) = (0, 0).$$



$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$z = 0 \text{ en } (x_0, y_0) = (0, y_0), y_0 \in \mathbb{R}.$$

Exemple d'une fonction continue mais pas différentiable



(Exemple 4, section 4.4)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

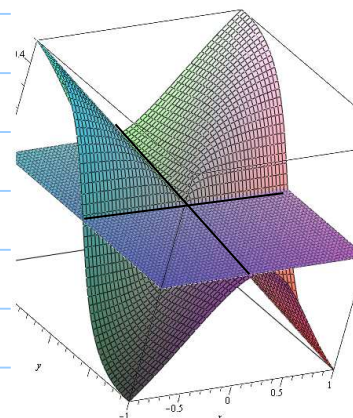
f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (voir la section 4.4)

f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Méthode A

$$i) \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$



$$ii) \text{ de } f(x,y) = 0 + (0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{on trouve } \varepsilon(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\text{mais } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x,x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

i) + ii) $z=0$ n'est pas un plan tangent car f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.9. Règles algébriques pour les dérivées des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Voir la série 7A

Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions différentiables (en un point ou sur D). Alors (en un point ou sur D):

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{à valeurs dans } \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)' = g \cdot f' + f \cdot g' \quad \text{à valeurs dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g} f' - \frac{f}{g^2} g'$$

5. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ($n \geq 1, m \geq 1$)

5.1. Définitions

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))^T$,
avec $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Remarque: il suit de la définition de la continuité et de la proposition 2.6 que f est continue (en un point ou sur D), si et seulement si les fonctions f_i , $i=1 \dots m$, sont toutes continues (en un point ou sur D)

Définition: (différentiable)

Une fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$, s'il existe une matrice A ,

$$A = {}_m \overbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix}}^n = (A_{ij}) \text{ matrice } m \times n$$

telle que

$$\left. \begin{aligned} f(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) &= f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \cdot \underline{h}}_{\substack{\in \mathbb{R}^m \\ \leftarrow \mathbb{R}^n}} + \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) \|\underline{h}\| \end{aligned} \right\} \quad (**) \\ \text{avec } (\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et }) \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

Remarque $(**) \Rightarrow$ continuité de f en $\underline{x}_0$ et

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(\underline{x}_0 + h \mathbf{e}_j) - f_i(\underline{x}_0)}{h}$$

c.-à-d. existence de toutes les dérivées partielles

Notation: on écrira $f'(x_0)$ pour l'application linéaire qui correspond à la matrice A

