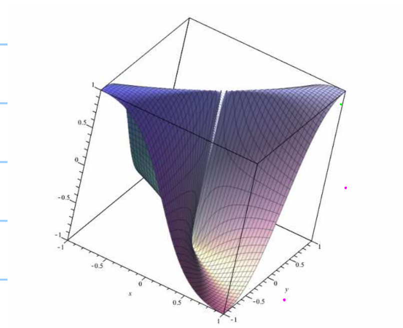
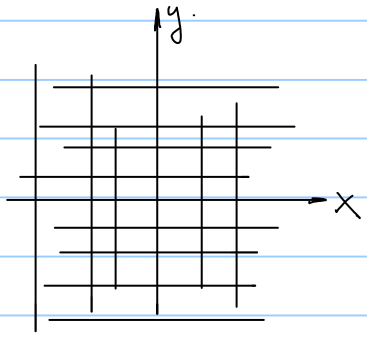
Rappels :



$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2\cdot x\,y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- f continue (en fait C^∞) sur $\equiv$ et $||||$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$
- f n'est pas continue en $(0,0)$

Définition Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$ s'il existe une matrice A $(1 \times n \;\; \boxed{\;|\;|\;|\;|\;|\;})$ telle que

$$\left.\begin{aligned} & f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A\,\underset{\in \mathbb{R}^n}{\underline{h}}}_{\in \mathbb{R}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})\,\|\underline{h}\| \\ & \text{avec } \big(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et}\big) \lim_{\underline{h}\to 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0. \end{aligned}\right\} (**)$$

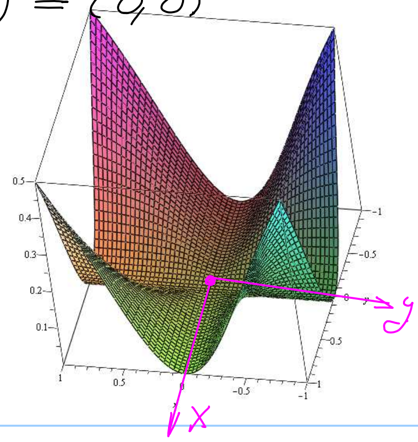
$$\left.\begin{aligned} & f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + \varepsilon(\underline{x})\,\|(\underline{x} - \underline{x}_0)\| \\ & \text{avec } \big(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et}\big) \lim_{\underline{x}\to x_0} \varepsilon(\underline{x}) = 0. \end{aligned}\right\} (**)^{bis}$$

4.6.3. Méthodes A et B

Comment contrôler la différentiabilité d'une fonction ?

A: méthode "directe" (utiliser la définition)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



En $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

f est différentiable car donnée par une fonction rationnelle

En $(x_0,y_0) = (0,0)$

o) test facultatif : f est continue en $(0,0)$ (c'est une condition nécessaire à la différentiabilité)
Pour $r>0$ on a en coordonnées polaires

$$\left|f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) - \overset{f(0,0)}{\overset{\|}{0}}\right| \leq C\, r^2 \xrightarrow[r\to 0]{r>0} 0 \quad (C=1 \text{ par exemple})$$

Attention ! borne uniforme : $\exists C$ t.q. $\forall\varphi$ $\Rightarrow$ $\forall\varphi\ \exists C$ t.q. = "non uniforme"

i) calculer les dérivées partielles en $(0,0)$ (leur existence est une condition nécessaire à la différentiabilité ; voir la proposition 4.6 !)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\cdot 0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2 h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

Donc, si f était différentiable en $(0,0)$ on aurait

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(matrice } 1\times 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

ii) par définition (utiliser $(**)^{bis}$ et proposition 4.6) si f est différentiable en $(0,0)$ on doit avoir

$$f(x,y) = f(0,0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \qquad (*)$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$. De $(*)$ on obtient, pour

$(x,y) \neq (0,0)$,

$$\varepsilon(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et en coordonnées polaires on trouve pour $r>0$

$$\left|\varepsilon(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))\right| \leqslant r \xrightarrow[\substack{r>0 \\ r\to 0}]{} 0.$$

i) + ii) montrent la différentiabilité de f en $(0,0)$ ainsi que $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice 1×2).

B. par la méthode indirecte suivante

(utiliser le théorème suivant)

Théorème : soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$,
$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.
Si les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \; j = 1, \dots, n \qquad \text{(existent sur } D\text{)}$$

existent, et sont toutes continues en $\underline{x}_0 \in D$, alors f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$.

Dans notre exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On a déjà montré que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

et on a en coordonnées polaires

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}^{=0}\Big| \leq 4r \xrightarrow[\substack{r\to 0\\ r>0}]{} 0$$
$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0}\Big| \leq 4r \xrightarrow[\substack{r\to 0\\ r>0}]{} 0$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent donc sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues en $(0,0)$ $\Rightarrow$ f différentiable en $(0,0)$ par ☺ $\square$

Remarque: le théorème est un théorème "local". Soit $\delta > 0$ tel que $B(\underline{x}_0, \delta) \subset D$, alors on peut restraindre f à $B(\underline{x}_0, \delta)$ et on a le théorème sur $B(\underline{x}_0, \delta)$. Il suffit donc que les fonctions dérivées partielles existent sur $B(\underline{x}_0, \delta)$ et soient continues en $\underline{x}_0$.

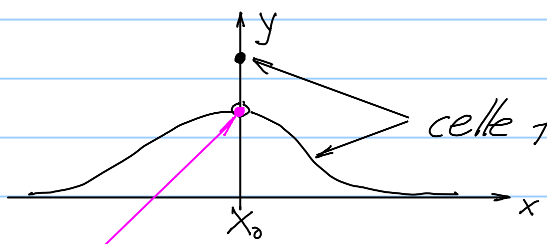
4.6.4. Démonstration du théorème

Remarque: le théorème est sans aucun intérêt pour $n=1$. Ceci est dû au fait que pour simplifier la formulation les hypothèses sont choisies plus fortes que nécessaires.

INTERMEZZO

Théorème Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D \subset \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $]a,b[$, dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\boxed{\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \text{ (A)}}$ alors

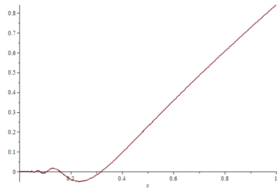
$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = \ell \text{ (B)}}$$



cette fonction n'est pas possible comme dérivée d'une fonction f

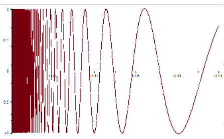
si c'est le graphe d'une fonction dérivée, la valeur en x_0 est là

Attention à la logique : dans l'exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f' n'admet pas de limite en $x_0 = 0$



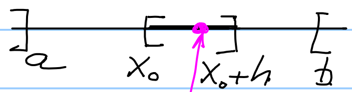
Néanmoins f est dérivable en $x_0 = 0$. C'est un contre-exemple à $\underbrace{\text{la contra-posée de la réciproque}}_{(\neg A \Rightarrow \neg B) \iff (B \Rightarrow A)}$ $\underbrace{\text{du théorème}}_{A \Rightarrow B}$.

$(\neg A \Rightarrow \neg B) \iff$ faux par le contre-exemple.

$(B \Rightarrow A)$ faux.

$A \Rightarrow B$ vrai

Démonstration (théorème des accroissements finis)



$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(\underbrace{x_0 + \theta h}) = \ell$$

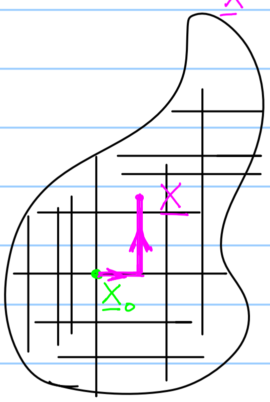
$\exists\, \theta = \theta(h) \in]0,1[$ t.q.

INTERMEZZO

Démonstration du théorème 🙂 par la méthode A) (idée, une variable à la fois).

Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ et $\underline{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$. Alors :

$$\underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{=\underline{x}} - f(\underbrace{x_{0,1}, \dots, x_{0,n}}_{=\underline{x}_0}) =$$



$$= \boxed{f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})} - f(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$$

"$+0$"

$$+ \boxed{f(x_1, x_2, x_{0,3}, \dots, x_{0,n})} \boxed{- f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})}$$

$\vdots$ "$+0$" "$+0$"

$$+ f(x_1, \dots x_{n-1}, x_n) \boxed{- f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n})}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_{0,1} + \theta_1 \cdot (x_1 - x_{0,1}),\ x_{0,2},\ \ldots,\ x_{0,n}\right)(x_1 - x_{0,1})$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_{0,2} + \theta_2 (x_2 - x_{0,2}),\ \ldots,\ x_{0,n}\right)(x_2 - x_{0,2})$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_{0,n} + \theta_n (x_n - x_{0,n})\right)(x_n - x_{0,n}).$$

avec $\theta_i \in \,]0,1[\,$, $i = 1 \ldots n$, donnés par le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle (voir Analyse I). Ainsi (on veut calculer $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ de la "méthode A") :

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - A(\underline{x} - \underline{x}_0) = \quad \text{où } \underline{x} - \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{pmatrix}, \quad A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right) \text{ matrice } 1 \times n.$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_{0,1} + \theta_1 \cdot (x_1 - x_{0,1}),\ x_{0,2},\ \ldots,\ x_{0,n}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \right](x_1 - x_{0,1}).$$

$[\quad] \equiv (1)$

$$+ \ \ldots \ +$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_{0,n} + \theta_n (x_n - x_{0,n})\right) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \right](x_n - x_{0,n}).$$

$[\quad] \equiv (n)$

et donc, puisque $\dfrac{|x_i - x_{0,i}|}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \leq 1$, on obtient pour

$$\varepsilon(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - A(\underline{x} - \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|}$$

que

$$0 \leq |\varepsilon(\underline{x})| \leq |①| + \ldots + |ⓝ| \xrightarrow[\underline{x} \to \underline{x}_0]{} 0$$

par la continuité des fonctions dérivées partielles en $\underline{x}_0$ (hypothèse du théorème ☺.)

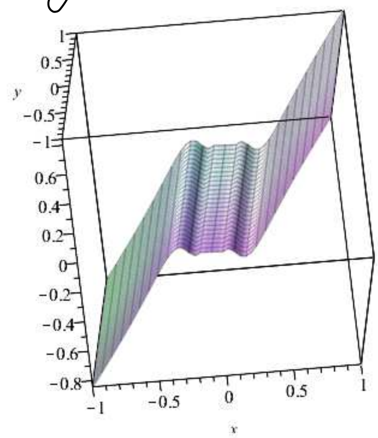
$\square$

♭ Bémol

> Attention ☹ : la (contraposée de la) réciproque du théorème ☺ est fausse ! Le fait qu'une ou plusieures des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ne soient pas continues en un point $\underline{x}_0$ n'implique pas que la fonction n'est pas différentiable en $\underline{x}_0$

(Contre-) exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



On montre que f est différentiable en $(0,0)$ par la méthode A

i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

ii) $(**)^{bis}$ $$f(x,y) = 0 + (0 \;\; 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En cordonnées polaires on obtient

$$\left|\varepsilon(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))\right| \leq r \xrightarrow[\substack{r>0 \\ r\to 0}]{} 0$$

On a donc démontré que f est differentiable en $(0,0)$

Par contre on obtient <u>aucune information par le théorème</u> , car on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x\neq 0, y\in\mathbb{R} \\ 0 & \text{pour } x=0, y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

et, puisque la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ n'existe pas

la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas (pourquoi ?)

[comparer avec Exercice 9. de la série 5A]

<u>Conclusion:</u>

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et le théorème  ne s'applique pas. Ceci montre  vue que la méthode directe montre que f est differentiable en $(0,0)$.