

Analyse avancée II – Corrigé de la série 7A

Échauffement.

Soit $f(x, y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$z = 3 + 5(x - 1) + 3(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3y - z = 5 .$$

Exercice 1.

La dérivée f' d'une fonction f dérivable de deux variables au point (x_0, y_0) est donnée par

$$f'(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) .$$

Pour simplifier l'écriture, on va omettre le (x_0, y_0) dans la suite. On a donc

$$\begin{aligned} i) \quad f' &= \left(\frac{\partial(g+h)}{\partial x}, \frac{\partial(g+h)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = g' + h' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad f' &= \left(\frac{\partial(gh)}{\partial x}, \frac{\partial(gh)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} h + g \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} h + g \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= h \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) + g \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = h g' + g h' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \quad f' &= \left(\frac{\partial(g/h)}{\partial x}, \frac{\partial(g/h)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x} h - g \frac{\partial h}{\partial x}}{h^2}, \frac{\frac{\partial g}{\partial y} h - g \frac{\partial h}{\partial y}}{h^2} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{g}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{1}{h} g' - \frac{g}{h^2} h' \end{aligned}$$

Exercice 2.

- i) Toutes les fonctions algébriques de deux variables (de n variables) sont différentiables sur leur domaine de définition. Dans notre cas, le seul point problématique éventuel est donc $(0, 0)$. La continuité en $(0, 0)$ se montre en passant en coordonnées polaires. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)}{r^2} \right| \leq r,$$

et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$.

- ii) Puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En $(0, 0)$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0. \end{aligned}$$

- iii) Comme vu en i), la restriction de f à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est une fonction différentiable.

- iv) Supposons que f soit différentiable en $(0, 0)$. Par définition de la différentiabilité (voir cours), on a alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0 + x, 0 + y) = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon(x, y) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \\ &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) y + \epsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y) = 0$. Puisque $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ on a que

$$\epsilon(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mais sur une suite de la forme $(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{2\sqrt{2}x_n^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est différentiable en $(0, 0)$.

- v) Par i), les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne peuvent pas être continues en $(0, 0)$ car sinon la fonction f serait différentiable en $(0, 0)$, ce qui n'est pas le cas (cf. iv). En effet, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

et sur une suite de la forme $(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, x_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Exercice 3. (QCM, différentiabilité)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.
- les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$.

Exercice 4. (V/F : différentiabilité)

Q1: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent.

Réponse : vrai. Voir une proposition du cours.

Q2: Si une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) .$$

Réponse : faux.

Pour une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 on a pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

mais il n'existe en général aucun lien entre les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Q3: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , alors

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 .$$

Réponse : vrai. Découle de la définition de différentiable vue au cours.

Q4: Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x, y) , alors

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Réponse : vrai.

Oui, ça découle de la définition de différentiable.

Q5: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2, y_0) - f(x_0, y_0)}{h^2}.$$

Réponse : faux.

Non, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}.$$

Exercice 5.

Q1 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + (1 - \cos(y)) \sin(x)^2$$

et soit le point $p = (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Le plan tangent au graphe de f en $(p, f(p))$ est donné par l'équation

$z = -\frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi}y$

$z = \frac{2}{\pi}y - \frac{4}{\pi}x + 4$

$z = \frac{2}{\pi}y + \frac{4}{\pi}x + 4$

$z = -\frac{4}{\pi}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\pi}(y - \pi)$

L'équation du plan tangent au graphe de f au point $p = (p_1, p_2)$ est

$$z = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot (x - p_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot (y - p_2).$$

En l'occurrence on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = 2 + (1 - \cos(\pi)) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 4$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \left[-\frac{y}{x^2} + (1 - \cos(y)) \cdot 2 \sin(x) \cos(x)\right]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)} = -\frac{4}{\pi},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \left[\frac{1}{x} + \sin(y) \sin(x)^2\right]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi l'équation du plan tangent est

$$z = 4 - \frac{4}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}(y - \pi) = 4 - \frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi}y.$$

Exercice 6.

Solution 1: Une possible fonction est :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

dont les dérivées partielles en $(0, 0)$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{-y^5}{y^4} - 0}{y} = -1. \end{aligned}$$

Pour étudier la différentiabilité supposons que f soit différentiable en $(0, 0)$. Par définition de la différentiabilité (voir cours), on a alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0 + x, 0 + y) = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon(x, y) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \\ &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) y + \epsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y) = 0$. Puisque $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$ on a que

$$\epsilon(x, y) = \frac{f(x, y) - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^4 y - x y^4}{(x^4 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}},$$

mais sur une suite de la forme $(x, 2x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{x \rightarrow 0} (0, 0)$ on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \epsilon(x, 2x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-14x^5}{17\sqrt{5}x^5} = -\frac{14}{17\sqrt{5}} \neq 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est différentiable en $(0, 0)$.

Solution 2: On va construire la fonction f . Posons

$$f(x, y) = x - y + \sqrt{x^2 + y^2} \epsilon(x, y)$$

avec $\epsilon(x, y)$ à déterminer et tel que $\epsilon(0, 0) = 0$ (voir définition de différentiable). Ainsi on peut évaluer f en $(0, 0)$ et on obtient $f(0, 0) = 0$. On veut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$, donc il faut que

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + |h| \epsilon(h, 0)}{h} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \text{sign}(h) \epsilon(h, 0),$$

qui est vrai si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, 0) = 0$. De manière similaire, on a que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$ si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(0, h) = 0$. Mais on veut que f ne soit pas différentiable, donc il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y)$ n'existe pas. Prenons par exemple

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } y = x^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ce choix de $\epsilon(x, y)$ on a que f satisfait les hypothèses de l'exercice car $\epsilon(0, 0) = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(0, h) = 0$, ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$. De plus f n'est pas différentiable car

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, 0) \neq \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, h^2) = 1,$$

et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y)$ n'existe pas.

Remarque: On voit que si $\epsilon(x, y)$ tend vers 0 selon la direction des axes x et y alors les dérivées partielles de f en x et y existent. Mais ceci n'est pas suffisant pour que f soit différentiable, pour ceci il faut que $\epsilon(x_n, y_n)$ converge vers 0 pour toutes les suites (x_n, y_n) telles que $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$.

Exercice 7.

Voir les notes du cours.