Peter Wittwer

Analyse avancée II – Corrigé de la série 7A

Échauffement.

Soit $f(x,y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \ .$$

Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0, y_0) = (1,1)$:

$$z = 3 + 5(x-1) + 3(y-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x + 3y - z = 5 \ .$$

Exercice 1.

La dérivée f' d'une fonction f dérivable de deux variables au point (x_0, y_0) est donnée par

$$f'(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) .$$

Pour simplifier l'écriture, on va omettre le (x_0, y_0) dans la suite. On a donc

i)

$$\begin{aligned} f' = \left(\frac{\partial(g+h)}{\partial x},\ \frac{\partial(g+h)}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y} \right) = g' + h' \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f' = \left(\frac{\partial(gh)}{\partial x},\ \frac{\partial(gh)}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\, h + g\, \frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}\, h + g\, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= h \left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y} \right) + g \left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y} \right) = h\, g' + g\, h' \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} f' = \left(\frac{\partial(g/h)}{\partial x},\ \frac{\partial(g/h)}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x}\, h - g\, \frac{\partial h}{\partial x}}{h^2},\ \frac{\frac{\partial g}{\partial y}\, h - g\, \frac{\partial h}{\partial y}}{h^2} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{g}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{1}{h}\, g' - \frac{g}{h^2}\, h' \end{aligned}$$

Exercice 2.

i) Toutes les fonctions algébriques de deux variables (de n variables) sont différentiables sur leur domaine de définition. Dans notre cas, le seul point problématique éventuel est donc $(0,0)$. La continuité en $(0,0)$ se montre en passant en coordonnées polaires. On a

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)}{r^2}\right| \leq r\ ,$$

et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-f(0,0)| \leq \lim\limits_{r\to 0} r = 0\,.$

ii) Puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. En $(0,0)$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0\,.$$

iii) Comme vu en *i*), la restriction de f à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est une fonction différentiable.

iv) Supposons que f soit différentiable en $(0,0)$. Par définition de la différentiabilité (voir cours), on a alors

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0+x,0+y) &= f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \epsilon(x,y)\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\| \\ &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y + \epsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \epsilon(x,y) = 0$. Puisque $f(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ on a que

$$\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Mais sur une suite de la forme $(x_n,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ on a

$$\lim_{n\to\infty}\epsilon(x_n,x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{2\sqrt{2}x_n^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0\,,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est différentiable en $(0,0)$.

v) Par *i*), les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne peuvent pas être continues en $(0,0)$ car sinon la fonction f serait différentiable en $(0,0)$, ce qui n'est pas le cas (cf. *iv*). En effet, pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

et sur une suite de la forme $(x_n,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,x_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.$$

Exercice 3. (QCM, différentiabilité)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.
- ☐ les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
- ■ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

Exercice 4. (V/F : différentiabilité)

Q1 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent.

Réponse : vrai. *Voir une proposition du cours.*

Q2 : Si une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ .$$

Réponse : faux.

Pour une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 on a pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

mais il n'existe en général aucun lien entre les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Q3 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0\,.$$

Réponse : vrai. *Découle de la définition de différentiable vue au cours.*

Q4 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x, y), alors

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0\,.$$

Réponse : vrai.

Oui, ça découle de la définition de différentiable.

Q5 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h^2, y_0) - f(x_0, y_0)}{h^2}\,.$$

Réponse : faux.

Non, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}\,.$$

Exercice 5.

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + \big(1 - \cos(y)\big)\sin(x)^2$$

et soit le point $p = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Le plan tangent au graphe de f en $\big(p, f(p)\big)$ est donné par l'équation

- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\,x + \frac{2}{\pi}\,y$
- ■ $z = \frac{2}{\pi}\,y - \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y + \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\,(y - \pi)$

L'équation du plan tangent au graphe de f au point $p = (p_1, p_2)$ est

$$z = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)\cdot(x - p_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\cdot(y - p_2)\,.$$

En l'occurrence on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = 2 + \big(1 - \cos(\pi)\big)\, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 4$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \left[-\frac{y}{x^2} + \big(1 - \cos(y)\big)\cdot 2\sin(x)\cos(x)\right]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)} = -\frac{4}{\pi}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \left[\frac{1}{x} + \sin(y)\sin(x)^2\right]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Ainsi l'équation du plan tangent est

$$z = 4 - \frac{4}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\,(y - \pi) = 4 - \frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi}y\,.$$

Exercice 6.

Solution 1: Une possible fonction est :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-y^5}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

dont les dérivées partielles en $(0,0)$ sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^5}{x^4}-0}{x}=1\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-\frac{y^5}{y^4}-0}{y}=-1\,.\end{aligned}$$

Pour étudier la différentiabilité supposons que f soit différentiable en $(0,0)$. Par définition de la différentiabilité (voir cours), on a alors

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(0+x,0+y)&=f(0,0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\epsilon(x,y)\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|\\ &=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ y+\epsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\epsilon(x,y)=0$. Puisque $f(0,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$ on a que

$$\epsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^4y-xy^4}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

mais sur une suite de la forme $(x,2x)\xrightarrow[x>0]{x\to0}(0,0)$ on a

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\epsilon(x,2x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-14x^5}{17\sqrt{5}x^5}=-\frac{14}{17\sqrt{5}}\neq0\,,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est différentiable en $(0,0)$.

Solution 2: O va construire la fonction f. Posons

$$f(x,y)=x-y+\sqrt{x^2+y^2}\epsilon(x,y)$$

avec $\epsilon(x,y)$ à déterminer et tel que $\epsilon(0,0)=0$ (voir définition de différentiable). Ainsi on peut évaluer f en $(0,0)$ et on obtient $f(0,0)=0$. On veut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$, donc il faut que

$$1=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+|h|\epsilon(h,0)}{h}=1+\lim_{h\to0}\operatorname{sign}(h)\epsilon(h,0),$$

qui est vrai si et seulement si $\lim_{h\to0}\epsilon(h,0)=0$. De manière similaire, on a que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$ si et seulement si $\lim_{h\to0}\epsilon(0,h)=0$. Mais on veut que f ne soit pas différentiable, donc il faut que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\epsilon(x,y)$ n'existe pas. Prenons par exemple

$$\epsilon(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \text{ et } y=x^2,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Avec ce choix de $\epsilon(x,y)$ on a que f satisfait les hypothèses de l'exercice car $\epsilon(0,0) = 0$ et $\lim_{h\to 0}\epsilon(h,0) = \lim_{h\to 0}\epsilon(0,h) = 0$, ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$. De plus f n'est pas différentiable car

$$0 = \lim_{h\to 0}\epsilon(h,0) \neq \lim_{h\to 0}\epsilon(h,h^2) = 1,$$

et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\epsilon(x,y)$ n'existe pas.

Remarque: On voit que si $\epsilon(x,y)$ tend vers 0 selon la direction des axes x et y alors les dérivées partielles de f en x et y existent. Mais ceci n'est pas suffisant pour que f soit différentiable, pour ceci il faut que $\epsilon(x_n, y_n)$ converge vers 0 pour toutes les suites (x_n, y_n) telles que $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ et $\lim\limits_{n\to 0}(x_n, y_n) = (0,0)$.

Exercice 7.

Voir les notes du cours.