

Analyse avancée II – Série 7A

Échauffement. (Plan tangent)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

Exercice 1. (Dérivée)

Soient $g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, de classe C^1 . Calculer les dérivées f' où

i) $f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$

ii) $f(x, y) = g(x, y)h(x, y)$

iii) $f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$

Exercice 2. (Différentiabilité)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Montrer que f est différentiable en tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

iv) Montrer que f n'est pas différentiable en $(x, y) = (0, 0)$.

v) Est-ce que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(x, y) = (0, 0)$?

Exercice 3. (QCM, différentiabilité)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

☐ les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$.

Exercice 4. (V/F : différentiabilité)

Q1: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent.

Q2: Si une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) .$$

Q3: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 .$$

Q4: Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x, y) , alors

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 .$$

Q5: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2, y_0) - f(x_0, y_0)}{h^2} .$$

Exercice 5. (QCM, plan tangent)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + (1 - \cos(y)) (\sin(x))^2$$

et soit le point $p = (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Le plan tangent au graphe de f en $(p, f(p))$ est donné par l'équation

☐ $z = -\frac{4}{\pi} x + \frac{2}{\pi} y$

☐ $z = \frac{2}{\pi} y - \frac{4}{\pi} x + 4$

☐ $z = \frac{2}{\pi} y + \frac{4}{\pi} x + 4$

☐ $z = -\frac{4}{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\pi} (y - \pi)$

Exercice 6. (Question ouverte)

Donner un exemple d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$, mais qui n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 7. (Question ouverte)

Donner un exemple d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais qui n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.