EPFL
Section PH

Peter Wittwer
19 avril 2024

Analyse avancée II – Corrigé de la série 7B

Échauffement. (Topologie de $\mathbb{R}^n$)

i) Soit $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, avec U_α des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in U$ il existe α tel que $x \in U_\alpha$. U_α étant ouvert il existe $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \subset U_\alpha \subset U$. Donc U est ouvert.

ii) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $U = \bigcap_i^m U_i$, avec U_i des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in U$ alors $\forall i \in \{1,\dots,m\}\ \ x \in U_i$, et $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ il existe $\delta_i > 0$ telle que $B(x,\delta_i) \subset U_i$. Soit $\delta = \min\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$, alors $\forall i \in \{1,\dots,m\}\, B(x,\delta) \subset B(x,\delta_i) \subset U_i$ et donc $B(x,\delta) \subset \bigcap_i^m U_i = U$.

Exercice 1. (Bolzano-Weierstrass)
Soit (x_k), $x_k = \big(x_{k,1},\dots,x_{k,n}\big) \in \mathbb{R}^n$ une suite bornée, c'est-à-dire il existe $C > 0$ tel que $\forall k,\ \|x_k\| \le C$. Alors, pour chaque $i = 1,\dots n$ la suite $\big(x_{k,i}\big)$ est bornée. On peut donc par le théorème de Bolzano Weierstrass pour $\mathbb{R}$ extraire de la suite (x_k) une première sous-suite, telle que la première composante des (x_k) convergent. De cette première sous-suite on peut extraire une sous-suite de sorte que la deuxième composante des (x_k) converge aussi. En répétant cette procédure n fois on arrive à une sous-suite pour laquelle toutes les composantes de (x_k) convergent. A noter que le fait que l'on ait qu'un nombre finis de composantes est crucial!

Exercice 2. (Suites de Cauchy)

i) Une suite (x_k), $x_k \in \mathbb{R}^n$ est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n,m \ge n_0,\ \|x_n - x_m\| \le \epsilon.$$

ii) Ceci est vrai pour $n = 1$ (voir Analyse I). Nous avons montré dans le cours qu'une suite (x_k), $x_k = \big(x_{k,1},\dots,x_{k,n}\big) \in \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si pour chaque $i = 1,\dots n$ la suite $\big(x_{k,i}\big)$ converge vers x_i. Ceci veut dire que toutes les suites des composantes de (x_k) sont des suites de Cauchy, ce qui implique la proposition en utilisant la norme $\|\ \|_\infty$ et puis l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3. (Sous-ensembles fermés)
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et (x_k), $x_k \in X$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$. Le point x ne peut pas être dans le complément X^c de X, car X^c est ouvert mais tout voisinage de x contient des points $x_k \in X$. Donc $x \in X$. Réciproquement, supposons que tout suite convergente (x_k), $x_k \in X$, converge vers un élément de X. Nous procédons par un raisonnement par l'absurde. Si X n'est pas fermé, alors X^c n'est pas ouvert, et il existe donc au moins un point $\bar{x} \in X^c$ tel que dans toute boule $B\left(\bar{x}, \dfrac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in X$. Par conséquence, la suite (x_k) de ces x_k converge vers $\bar{x}$, et donc par hypothèse $\bar{x} \in X$, ce qui contredit $\bar{x} \in X^c$. Donc X est fermé.

Exercice 4. (Espace vectoriel des fonctions continues)
Soit l'ensemble $V = C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions avec les nombres réels.

i) Si f_1 et f_2 sont deux fonctions dans V, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction $\alpha f_1 + \beta f_2$ est aussi dans V.

ii) Par conséquence de la linéarité de l'intégral et des propriétés des fonctions continues on a bien que $\forall f, g, f_1, f_2 \in V$, $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$, que $\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g\rangle = \alpha\langle f_1, g\rangle + \beta\langle f_1, g\rangle$ et que $\langle f, f\rangle \geq 0$, avec égalité seulement pour $f = 0$. Les propriétés de la norme induites suivent comme dans le le cas de $V = R^n$ (voir la série 6B, échauffement).

iii) Comme pour le cas de $\mathbb{R}^n$ on a pour $f, g \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle \alpha f + g, \alpha f + g\rangle &= \int_0^1 (\alpha f(x) + g(x))^2\, dx = \int_0^1 \big(\alpha^2 f(x)^2 + 2\alpha f(x) g(x) + g(x)^2\big)\, dx \\
&= \alpha^2 \int_0^1 f(x)^2\, dx + 2\alpha \int_0^1 f(x) g(x)\, dx + \int_0^1 g(x)^2\, dx \\
&= \alpha^2 \|f\|^2 + 2\alpha\langle f, g\rangle + \|g\|^2 \equiv p(\alpha),
\end{aligned}$$

avec les mêmes conclusions pour le discriminant de l'équation quadratique $p(\alpha) = 0$. D'où l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

iv) Les propriétés de la norme suivent directement des propriétés du supremum et de l'inégalité triangulaire pour chaque $x \in [0,1]$.

v) $\forall x \in (0,1]$, $1 - x < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Par contre on a que $\forall n$, $f_n(0) = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. La limite point par point de la suite des fonctions f_n n'étant pas continue en $x = 0$, la limite n'est donc pas dans V. Néanmoins

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^{2n}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Ceci montre que la suite des fonctions $f_n \in V$ converge dans la norme $\|\ \|_2$ vers la fonction $f = 0 \in V$.

vi) Le théorème de la convergence uniforme (voir le cours d'Analyse I) garantie que la limite d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément est une fonction continue. La suite f_n donnée ne converge donc pas dans la norme $\|\ \|_\infty$. Ceci signifie que les deux normes ne peuvent pas être équivalentes, car pour des normes équivalentes la convergence dans une des normes est équivalente à la convergence dans l'autre norme.