

Analyse avancée II – Série 7B

Échauffement. (Topologie de $\mathbb{R}^n$)

- i) Montrer qu'une réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- ii) Montrer qu'une intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. (Bolzano-Weierstrass)

En partant du théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}$, démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. (Suites de Cauchy)

- i) Donner la définition d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$.
- ii) Montrer qu'une suite (x_k) , $x_k \in \mathbb{R}^n$, converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Exercice 3. (Sous-ensembles fermés)

Montrer qu'un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite (x_k) convergente d'éléments $x_k \in X$ converge vers un élément de X .

Exercice 4. (Espace vectoriel des fonctions continues)

Soit l'ensemble $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions avec les nombres réels.

- i) Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- ii) Montrer que la fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx$ définit un produit scalaire sur V , avec la norme induite $\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$.
- iii) Montrer que $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.
Indication: suivre la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.
- iv) Montrer que la fonction $\|\cdot\|_\infty : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ définit aussi une norme sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.
- v) Soit la suite des fonctions $f_n(x) = (1-x)^n$ dans V . Montrer que $\forall x \in (0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, mais que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1$. Trouver une fonction $f \in V$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.
- vi) Conclure de v) que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.