EPFL
Section PH

Peter Wittwer
19 avril 2024

Analyse avancée II – Série 7B

Échauffement. (Topologie de $\mathbb{R}^n$)

i) Montrer qu'une réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

ii) Montrer qu'une intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. (Bolzano-Weierstrass)
En partant du théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}$, démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. (Suites de Cauchy)

i) Donner la définition d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$.

ii) Montrer qu'une suite (x_k), $x_k \in \mathbb{R}^n$, converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Exercice 3. (Sous-ensembles fermés)
Montrer qu'un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite (x_k) convergente d'éléments $x_k \in X$ converge vers un élément de X.

Exercice 4. (Espace vectoriel des fonctions continues)
Soit l'ensemble $V = C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions avec les nombres réels.

i) Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que la fonction $\langle\,.\,,\,.\,\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ définit un produit scalaire sur V, avec la norme induite $\|f\|_2 := \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$.

iii) Montrer que $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2\,\|g\|_2$.
Indication: suivre la démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

iv) Montrer que la fonction $\|\ \|_\infty\colon C\left([0,1],\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ définie aussi une norme sur $C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

v) Soit la suite des fonctions $f_n(x) = (1-x)^n$ dans V. Montrer que $\forall x \in (0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, mais que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Trouver une fonction $f \in V$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

vi) Conclure de *v)* que les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ ne sont pas équivalentes.