EPFL
Section PH

Peter Wittwer
27 mars 2025

Analyse avancée II – Corrigé de la série 6A

Échauffement.

i) Comme $f(x,y) = c \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}(x^2 - c)$, les lignes de niveau de f sont de la forme $y = \frac{1}{2}(x^2 - c)$. Les lignes pour $c = -2,\, 0,\, 2$ sont tracées à la Fig. 1 (dans cet ordre de haut en bas). De plus on a

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)^T (x,y) = (2x, -2)^T$$

et ainsi

$$\nabla f(-2,3) = (-4,-2)^T \qquad \nabla f\left(1, \tfrac{1}{2}\right) = (2,-2)^T \qquad \nabla f(2,1) = (4,-2)^T .$$

Les gradients en ces points sont orthogonaux aux lignes de niveau correspondantes (voir Fig. 1). Pour information, la Fig. 2 représente le graphe de f avec des lignes de niveau $f(x,y) = \mathit{const}$ ainsi que les éléments de la Fig. 1 en 3D.

ii) Les surfaces de niveau de g sont définies par $g(x,y,z) = c$ pour un $c \in \mathbb{R}$ fixé. Comme le graphe de f est $\mathcal{G}(f) := \big\{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\big\}$, on peut définir $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$g(x,y,z) = f(x,y) - z = x^2 - 2y - z .$$

Ainsi $\mathcal{G}(f)$ correspond à la surface de niveau avec $g(x,y,z) = 0$. Pour $c \in \mathbb{R}$ général, on a $g(x,y,z) = c \;\Leftrightarrow\; z = f(x,y) - c$ si bien que la surface de niveau est le graphe de la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x,y) = f(x,y) - c$. La Fig. 3 montre ces surfaces pour $c = -8,\, 0,\, 8$.

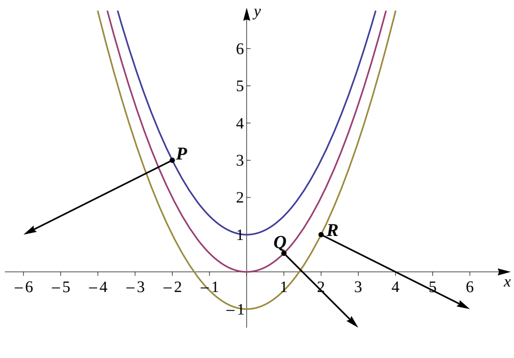

Fig. 1

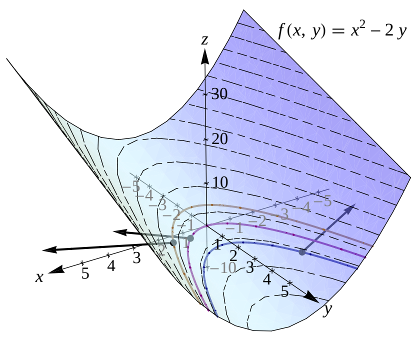

Fig. 2

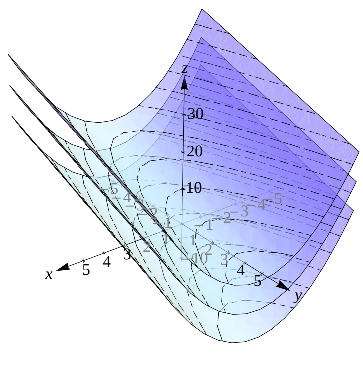

Fig. 3

Exercice 1.

i) On a $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, c.-à-d. le plan $\mathbb{R}^2$ sans les deux axes x et y. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} .$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3}\ .$$

ii) Comme les puissances avec exposant réel sont seulement définies pour des bases positives, on doit avoir $x > 0$ et $y > 0$. Pour z il n'y a pas de restriction si bien que $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$. Pour les dérivées partielles on obtient directement $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^z\, x^{(y^z)-1}$.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$, il faut récrire f de manière adéquate. Pour dériver par rapport à y on écrit

$$f(x,y,z) = \exp(y^z \ln(x))$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \exp(y^z \ln(x)) \cdot z\, y^{z-1} \ln(x) = x^{(y^z)} z\, y^{z-1} \ln(x)\,,$$

et pour dériver par rapport à z, on écrit

$$f(x,y,z) = \exp\big(\exp\left(z \ln(y)\right) \cdot \ln(x)\big)$$

pour obtenir

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \exp\Big(\exp\left(z \ln(y)\right) \ln(x)\Big) \cdot \ln(y) \exp\big(z \ln(y)\big) \ln(x) = x^{(y^z)} y^z \ln(x) \ln(y)\,.$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{x^{y^z-1}\left(y^z - 1\right) y^z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{x^{y^z}\left(y^z\right)^2 z^2 \left(\ln(x)\right)^2}{y^2} + \frac{x^{y^z} y^z z^2 \ln(x)}{y^2} - \frac{x^{y^z} y^z z \ln(x)}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = x^{y^z}\left(y^z\right)^2 \left(\ln(y)\right)^2 \left(\ln(x)\right)^2 + x^{y^z} y^z \left(\ln(y)\right)^2 \ln(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{x^{y^z-1}\left(y^z\right)^2 z \ln(x)}{y} + \frac{x^{y^z-1} y^z z}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{x^{y^z} y^z y^{z-1} z \ln(x)}{x} + \frac{x^{y^z} y^{z-1} z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{x^{y^z}\left(y^z\right)^2 \ln(y) \ln(x)}{x} + \frac{x^{y^z} y^z \ln(y)}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{x^{y^z}\left(y^z\right)^2 \ln(y) \left(\ln(x)\right)^2 z}{y} + \frac{x^{y^z} y^z \ln(y)\, z \ln(x)}{y} + \frac{x^{y^z} y^z \ln(x)}{y}$$

iii) On a $D(f) = \mathbb{R}^2$. Pour les dérivées partielles on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\cos(x^2y)\cosh(y-x) - \sin(x^2y)\sinh(y-x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(x^2y)\cosh(y-x) + \sin(x^2y)\sinh(y-x)$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =& 2\,y\cos\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right) - 4\,x^2y^2\sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)\\ &+4\,xy\cos\left(x^2y\right)\sinh\left(-y+x\right) + \sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^4\sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right) - 2\,x^2\cos\left(x^2y\right)\sinh\left(-y+x\right) + \sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= 2\,x\cos\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right) - 2\,x^3y\sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)\\ &\quad -2\,xy\cos\left(x^2y\right)\sinh\left(-y+x\right) + x^2\cos\left(x^2y\right)\sinh\left(-y+x\right)\\ &\quad -\sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)\end{aligned}$$

iv) Le domaine est $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 2\}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$ sans le plan $z = 2$. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2}{z-2}\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{6z}{z-2}\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2\left(\frac{3y}{z-2} - \frac{x+3yz}{(z-2)^2}\right)\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2\,\frac{1}{(z-2)^2}\left(\cosh\left(\frac{x+3\,yz}{z-2}\right)\right)^2 + 2\,\frac{1}{(z-2)^2}\left(\sinh\left(\frac{x+3\,yz}{z-2}\right)\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 18\,\frac{z^2}{(z-2)^2}\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2 + 18\,\frac{z^2}{(z-2)^2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2&\left(3\,\frac{y}{z-2} - \frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)^2\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\\ &+ 2\,\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\left(-6\,\frac{y}{(z-2)^2} + 2\,\frac{3\,yz+x}{(z-2)^3}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\end{aligned}$$

$$+ 2\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=6\,\frac{z}{(z-2)^2}\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2+6\,\frac{z}{(z-2)^2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)&=2\,\frac{1}{z-2}\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\\&-2\,\frac{1}{(z-2)^2}\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\\&+2\,\frac{1}{z-2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)&=6\,\frac{z}{z-2}\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\\&+6\,\frac{1}{z-2}\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\\&-6\,\frac{z}{(z-2)^2}\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\\&+6\,\frac{z}{z-2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)&=6\,\frac{z}{z-2}\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\\&+2\,\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\left(3\,(z-2)^{-1}-3\,\frac{z}{(z-2)^2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\\&+6\,\frac{z}{z-2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\end{aligned}$$

Exercice 2.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$ les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=xy\,\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}+y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=xy\,\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}+x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ .$$

Pour $(x,y)=(0,0)$, on utilise la définition de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Pour calculer les deuxièmes dérivées partielles mixtes en $(0,0)$, on doit encore une fois utiliser cette définition. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-h) - 0}{h} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 0}{h} = +1.$$

On constate que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Remarque: Dans un cas comme ici où les dérivées partielles mixtes ne sont pas égales, il faut faire attention à la notation qui n'est malheureusement pas vraiment standardisée. Lorsqu'on a d'abord dérivé par rapport à x et ensuite par rapport à y, on écrit dans ce cours $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Dans la littérature et en particulier aussi dans le livre *Calcul différentiel et intégral* de Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, on voit aussi l'inverse (i.e. x et y échangé). Vive donc les fonctions suffisamment régulières où ce problème ne se pose pas...

Exercice 3.

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y\,\ln\Bigl(1 + (x^2+y^2)^2\Bigr)}{\exp\Bigl(\sqrt{x^2+y^2}\Bigr)\,\bigl(x^2+y^2\bigr)^{\frac{5}{2}}}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ■ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

On calcule les limites selon les axes x et y. On a

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0\cdot \ln\Bigl(1+(x^2)^2\Bigr)}{\exp\Bigl(\sqrt{x^2}\Bigr)\,\bigl(x^2\bigr)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

et

$$\lim_{y\to 0^+} f(0,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y\,\ln\Bigl(1+(y^2)^2\Bigr)}{\exp\Bigl(\sqrt{y^2}\Bigr)\,\bigl(y^2\bigr)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\exp\Bigl(\sqrt{y^2}\Bigr)} \cdot \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y^4)}{y^4}\,.$$

La première limite se calcule directement :

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\exp\Bigl(\sqrt{y^2}\Bigr)} = \frac{1}{\exp(0)} = 1\,.$$

La deuxième limite est de la forme $\frac{0}{0}$ et on peut utiliser Bernoulli-l'Hospital :

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y^4)}{y^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{4y^3}{1+y^4}}{4y^3} = 1\,.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{y\to 0^+} f(0,y)$ la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Remarque 1: *Ci dessus on a pris une suite $y \to 0$ avec $y > 0$. Si on prenait $y \to 0$ avec $y < 0$ on aurait obtenu $\lim_{y\to 0^-} f(0,y) = -1$, du au fait que dans ce cas $\frac{y}{(y^2)^{5/2}} = \frac{sign(y)}{|y|^4} = \frac{-1}{y^4}$.*
Remarque 2: *Ceci est une manière de trouver la réponse, mais d'autres méthodes sont aussi possibles. Par exemple, si on prend une suite (x_n, y_n) avec $x_n = 0$ et $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors $f(x_n,y_n)$ s'approche de 1 pour n pair et de -1 pour n impair. Donc la limite n'existe pas.*

Q2 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + x^2\, e^{\sin(y)}.$$

Alors la matrice Hessienne de f en (x,y) est

☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & 2 \end{pmatrix}$

☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \end{pmatrix}$

■ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) \end{pmatrix}$

☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\cos(y)^2 \end{pmatrix}$

Exercice 4.

i) Toutes les fonctions algébriques de deux variables (de n variables) sont différentiables sur leur domaine de définition. Dans notre cas, le seul point problématique éventuel est donc $(0,0)$. La continuité en $(0,0)$ se montre en passant en coordonnées polaires. On a

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)}{r^2}\right| \le r\ ,$$

et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| \le \lim\limits_{r\to 0} r = 0\,.$

ii) Puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En $(0,0)$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0\,.$$

iii) Pour $(x, y) \neq (0,0)$, on a par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}\,,$$

et sur une suite de la forme $(x_n, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, x_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.$$

Exercice 5.

i) La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (la composition de fonctions continues donne des fonctions continues). En $(x, y) = (0,0)$ on a en coordonnées polaires $|f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))| \leq r^2 \ln(r)$ et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0,0)$.

ii) Pour $(x, y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \tag{1}$$

et les dérivées partielles en $(x, y) = (0,0)$ sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot 0 \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot h \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.
\end{aligned}$$

iii) Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que compositions de fonctions continues. Pour étudier leur continuité en $(0,0)$, on utilise les coordonnées polaires dans (1). On trouve

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| &= \left| r\sin(\theta)\ln(r^2) + 2\frac{r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)}{r^2} \right| \leq 2|r\ln(r)| + 2r \\
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| &= \left| r\cos(\theta)\ln(r^2) + 2\frac{r^3\cos(\theta)\sin(\theta)^2}{r^2} \right| \leq 2|r\ln(r)| + 2r
\end{aligned}$$

On calcule la limite du premier terme dans ces expressions avec Bernoulli-Hôpital :

$$\lim_{r\to 0^+} r\ln(r) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(r)}{\frac{1}{r}} \overset{BH}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = -\lim_{r\to 0^+} r = 0\,.$$

Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,,$$

c'est-à-dire les dérivées partielles de f sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

iv) Les dérivées partielles secondes pour $(x, y) \neq (0, 0)$ sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \;, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \;,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 + \ln(x^2 + y^2) - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \,.$$

Au point $(0, 0)$, les deux dérivées secondes "pures" sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 \cdot \ln(h^2) + 2 \cdot 0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 \cdot \ln(h^2) + 2 \cdot 0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

mais la dérivée seconde mixte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \ln(h^2) + 0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(h^2) = -\infty$$

n'existe pas en $(0, 0)$. De plus, les dérivées secondes ne sont pas continues en $(0, 0)$ car leurs limites n'existent pas :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, t) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{0}{t^2} - \frac{0}{t^4} \right) = 0 \qquad \text{mais} \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, t) = \frac{6t^2}{2t^2} - \frac{4t^4}{4t^4} = 2 \,,$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, t) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{0}{t^2} - \frac{0}{t^4} \right) = 0 \qquad \text{mais} \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(t, t) = \frac{6t^2}{2t^2} - \frac{4t^4}{4t^4} = 2 \,.$$