

Remarque: souvent on écrit directement $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$

au lieu de $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ pour la valeur de la dérivée partielle de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x en (x_0, y_0) , etc.

Notations équivalentes (pour les fonctions deuxièmes dérivées partielles)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\partial_x^2 f$, f'_{xx} , f_{xx} , $D_{xx}f$, etc.

Attention: l'interprétation de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ varie d'un auteur à l'autre. L'ordre des dérivées (pour nous d'abord par rapport à y puis par rapport à x) peut être échangé (voir par exemple dans Dz).

Heureusement: pour des fonctions de classe C^2 (à définir) on a que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. Voir la série 6A pour un contre-exemple !

4.5.8. Dérivées partielles du deuxième ordre (n général)

Définition soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \quad , \quad j=1, \dots, n,$$

existent. Alors les fonctions des deuxièmes dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont définies en $\underline{x}_0 \in \mathbb{D}$ par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$$

$$:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0 + h \cdot \underline{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)}{h}$$

pour $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$.

Remarque: les deuxièmes dérivées partielles sont souvent arrangées dans un tableau (une matrice $n \times n$):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

qui est appelée la matrice hessienne de f en $\underline{x}_0$: $\text{Hess}(f)(\underline{x}_0)$.

Remarque: $\text{Hess}(f)(\underline{x}_0)$ peut être la transposée de cette matrice selon les auteurs.

Remarque: si f est suffisamment régulière (de classe C^2 , voir plus loin) on a

$$\text{Hess}(f)(\underline{x}_0) = \text{Hess}(f)(\underline{x}_0)^T$$

c.-à-d. la matrice est symétrique

4.5.9. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Par récurrence on peut définir des (fonctions) dérivées partielles de tout ordre.

Exemple: (ordre 3, une fonction de $n=2$ variables).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{h}\end{aligned}$$

Remarque: les fonctions rationnelles possèdent des dérivées partielles de tout ordre sur leur domaine de définition^{*}, et on a les règles de calcul habituelles pour les dérivées.

4.5.10. Exemples

^{*}) à l'exception éventuelle des points ajoutés par prolongement continue ($f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).

1) $f(x, y) = x^3 y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = 12xy$$

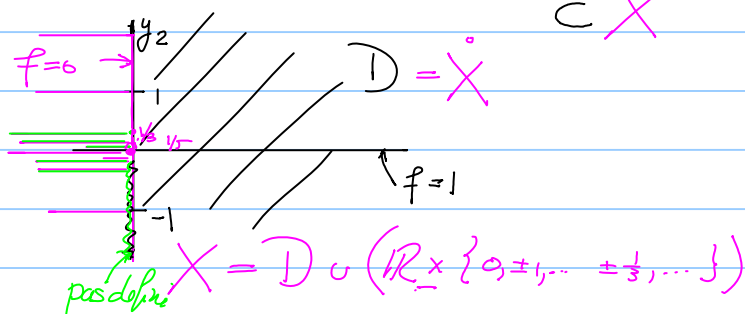
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = 12xy$$

2) $f(x, y) = x^y \stackrel{0^0 \equiv 1 \text{ (convention)}}{=} e^{y \cdot \ln(x)}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ouvert $\subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \cdot \ln(x)$$

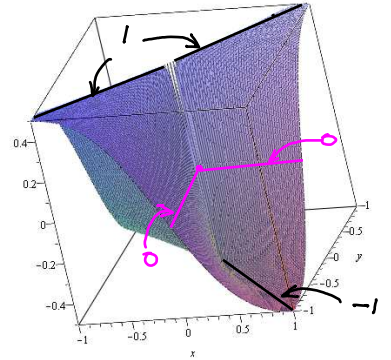


$$3) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x y}{x^2 + y^2} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f n'est pas continue en $(0,0)$!

car par exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0),$$



néanmoins les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur tout $\mathbb{R}^2$:

i) pour $(x,y) \neq (0,0)$ f est donnée par une fonction rationnelle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x \cdot y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

ii) pour $(x,y) = (0,0)$ il faut utiliser les définitions

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot h \cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot 0 \cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

Constat: les dérivées partielles peuvent donc exister même en un point où f n'est pas continue

4.6. Fonctions différentiables

4.6.1. Rappels (n=1, Analyse I)

Définition de la dérivabilité et de la différentiabilité pour une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, en $x_0 \in I$:

Dérivable:

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (*)$$

existence de la limite (*).

Differentiable:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a \cdot h + \varepsilon(x_0+h) \cdot |h| \quad (**)$$

existence d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$

Remarques:

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \text{différentiable} \Rightarrow \text{continue}$$

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(a + \varepsilon(x_0+h) \frac{|h|}{h} \right) = a$$

donc $(**) \Rightarrow (*)$ avec $f'(x_0) = a$.

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$$

4.6.2. Différentiabilité en un point

Définition Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$ s'il existe une matrice A ($1 \times n$ $\square\square\square\square$) telle que

$$\left. \begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) &= f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \underline{h}}_{\in \mathbb{R}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) \|\underline{h}\| \end{aligned} \right\} (**)$$

avec $(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et }) \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0.$

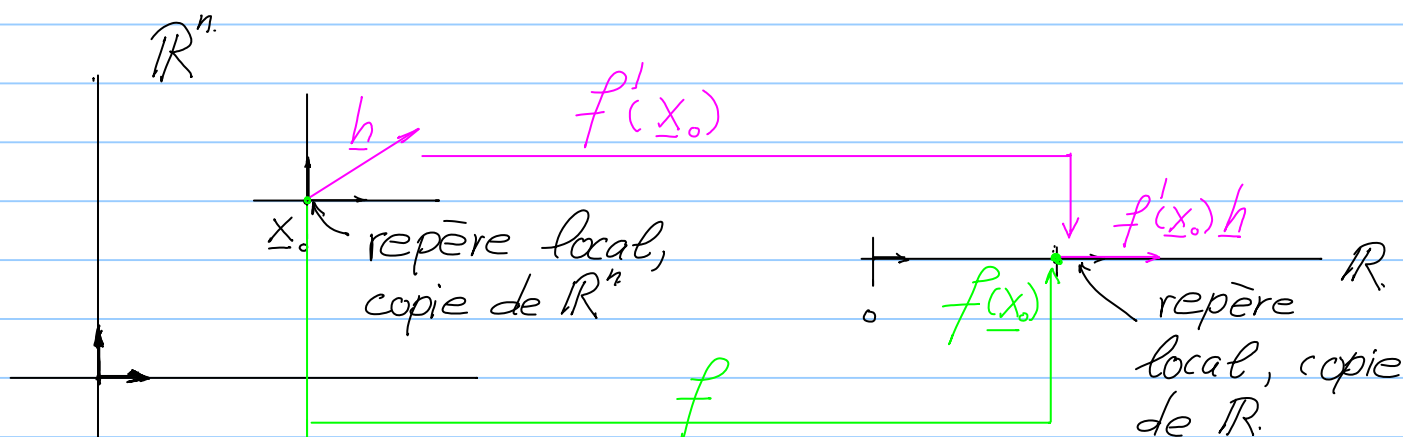
Remarque: on peut réécrire (**) d'une manière équivalente comme:

$$\left. \begin{aligned} f(\underline{x}) &= f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + \varepsilon(\underline{x}) \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \end{aligned} \right\} (**)'_{ds}$$

avec $(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et }) \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \varepsilon(\underline{x}) = 0.$

Notation: on écrira $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pour l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: dans ce cours on écrira $f'(\underline{x}_0)$ pour l'application linéaire $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui correspond à la matrice A



Terminologie: l'application $f'(\underline{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est appelée la dérivée (totale) de f en $\underline{x}_0$.

Remarque: $(**) \iff$ existence d'une application linéaire $f'(\underline{x}_0)$ telle que

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)\underline{h}}{\|\underline{h}\|}}_{= \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h})} = 0$$

Notations: $f'(\underline{x}_0)$, $df(\underline{x}_0)$, $L_{\underline{x}_0}$ pour la dérivée en $\underline{x}_0$.

Proposition 4.6 (différentiable $\Rightarrow$ continue et existence des dérivées partielles)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, f différentiable en $\underline{x}_0 \in D$. Alors

- i) f est continue en $\underline{x}_0$.
- ii) $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$ existent pour $j=1, \dots, n$.
- iii) $f'(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right)$

les mêmes nombres que pour le gradient, mais ceci n'est pas le gradient, mais une matrice $1 \times n$

Démonstration

i) $(**) \Rightarrow \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \dots = f(\underline{x}_0)$

ii) et iii) on choisit $\underline{h} = h \cdot \underline{e}_j$, $h \in \mathbb{R}$

$$(**) \Rightarrow f(\underline{x}_0 + h \cdot \underline{e}_j) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A(h \cdot \underline{e}_j)}_{h \cdot (A \underline{e}_j) \text{ par linéarité}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + h \underline{e}_j) |h|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h e_j) - f(\underline{x}_0)}{h}} = A e_j + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + h e_j) \frac{|h|}{h}}_{=0}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \text{ par définition}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = A \cdot e_j = \begin{array}{c} | \\ \hline \boxed{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \text{position } j \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} b_1 \\ | \\ b_n \end{array} \end{array} = A_j$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \text{ par définition}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = A \cdot e_j = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_j & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{position } j}{=} A_j$$

Nota bene: l'exemple du paragraphe 4.5.10 montre que l'existence des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \quad , \quad j = 1, \dots, n.$$

ne suffit pas pour garantir la différentiabilité en un point $\underline{x}_0$. Dans l'exemple les dérivées partielles existent, mais f n'est même pas continue.

Théorème. Toutes les fonctions rationnelles sont différentiables en tout point de leur domaine de définition. ^(*)

Démonstration voir le théorème 😊 plus loin

*) A l'exception éventuelle des points ajoutés par prolongement par continuité.