4.5. Dérivées partielles

4.5.1. Définitions

<u>Remarque:</u> les dérivées partielles d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendent du choix des coordonnées. Il est donc indispensable de préciser le choix des variables de la fonction.

<u>Idée:</u> la dérivée partielle d'une fonction de plusieures variables est la dérivée par rapport à une des variables, les autres variables étant gardées constantes

<u>Définition pour le cas $n=2$ (dérivées partielles en un point)</u>

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, $(x_0,y_0) \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. La dérivée partielle de f en (x_0,y_0) par rapport à la variable x est le nombre

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

limite dans $\mathbb{R}$ *)

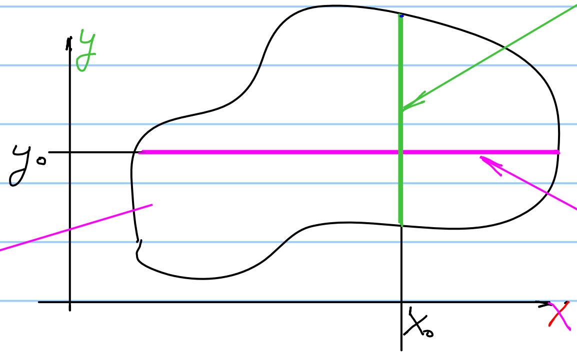
et la dérivée partielle de f en (x_0,y_0) par rapport à la variable y est le nombre

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

*) Voir aussi la Série 5A, Exercice 9

Explication:

le domaine de f et le choix des coordonnées



$h(y) \equiv f(x_0, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := h'(y_0)$

$g(x) \equiv f(x, y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := g'(x_0)$

$g(x) \equiv f(x, y_0)$ est définie sur la ligne ——

$h(y) \equiv f(x_0, y)$ est définie sur la ligne |

Voir le dessin 3d plus loin et les paragraphes à suivre pour des interprétations de ces nombres

Notations équivalentes

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}$, $\partial_x f(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$

$D_x f(x_0, y_0)$, $\partial_1 f(x_0, y_0)$, $D_1 f(x_0, y_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}$ à éviter

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$, $\partial_y f(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$

$D_y f(x_0, y_0)$, $\partial_2 f(x_0, y_0)$, $D_2 f(x_0, y_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}$ à éviter

Définition: soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La dérivée partielle de f en $\underline{x}_0 \in D$ par rapport à la variable x_k est le nombre:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h \cdot e_k) - f(\underline{x}_0)}{h}, \quad k = 1, \dots, n$$

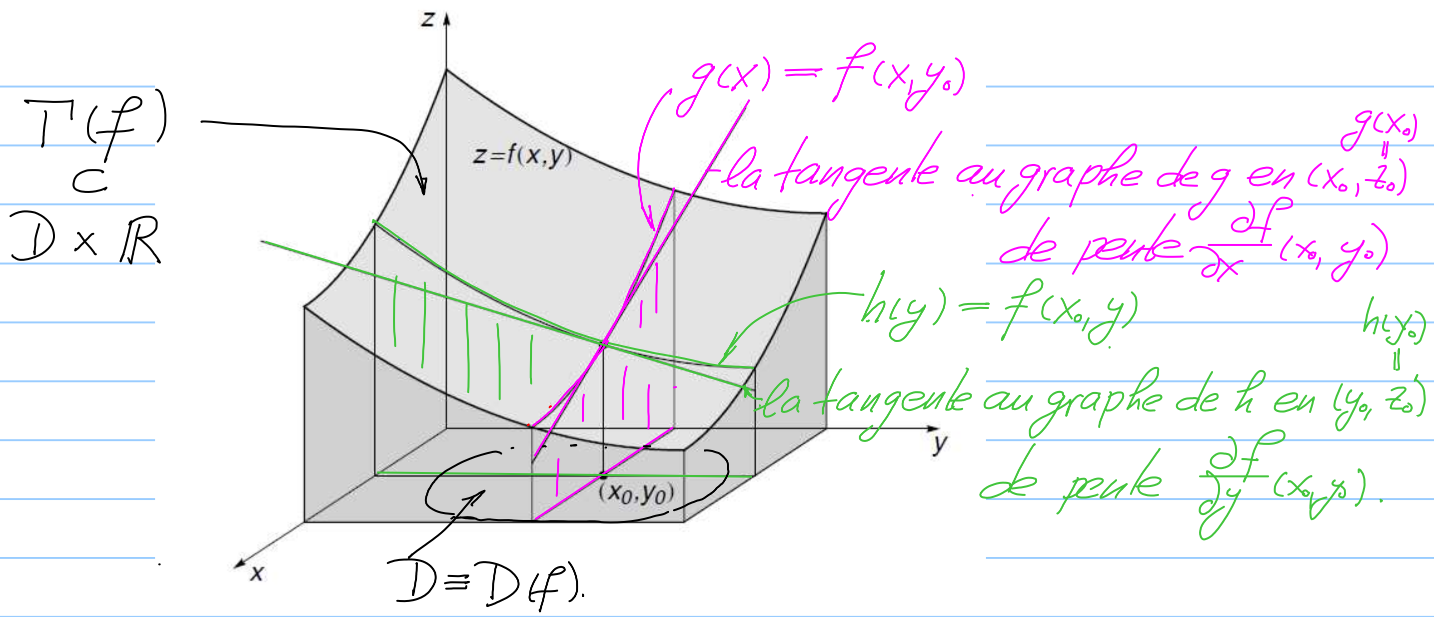
où $e_k = (0, \dots, 0, \overset{\text{position } k}{1}, 0, \dots, 0)^T$ est le k-ème vecteur de base de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notations équivalentes

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}$, $\partial_{x_k} f(\underline{x}_0)$, $f'_{x_k}(\underline{x}_0)$, $f_{x_k}(\underline{x}_0)$, $D_k f(\underline{x}_0)$, $\partial_k f(\underline{x}_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_k}}$ à éviter.

4.5.2. Interprétation géométrique (dessin pour $n=2$)

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente au graphe de la fonction $g(x) = f(x, y_0)$ en (x_0, z_0), $z_0 = g(x_0) = f(x_0, y_0)$, et la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente au graphe de la fonction $h(y) = f(x_0, y)$ en (y_0, z_0), avec $z_0 = h(y_0) = f(x_0, y_0)$



4.5.3. Le gradient

Définition : soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, et soit $\underline{x}_0 \in D$.

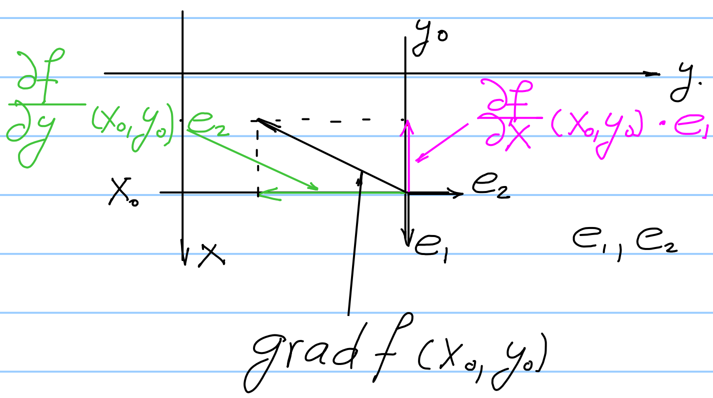
Le vecteur

$$\nabla f(\underline{x}_0) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{x}_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\right)^T$$

$\nabla \equiv$ "Nabla" $=\!=$ 

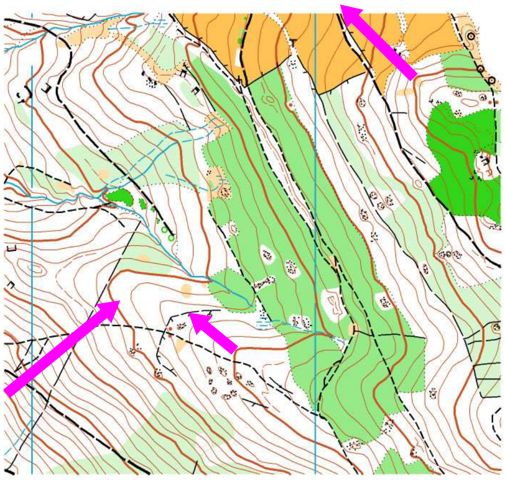
est appelé le gradient de f en $\underline{x}_0$.

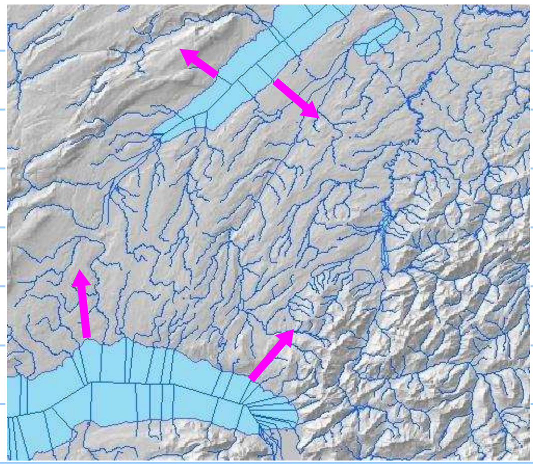
Représentation graphique (dans l'exemple)



e_1, e_2 = repère d'une copie locale de $\mathbb{R}^2$

Nous verrons que pour une fonction différentiable (voir plus loin pour la définition) le gradient indique, dans le domaine de définition de la fonction f, la direction de la pente la plus forte (positive). La norme du gradient est égale à cette pente.





4.5.4. Vecteurs tangents (cas $n=2$)

Si les fonctions $g(x) := f(x, y_0)$ et $h(y) := f(x_0, y)$ sont de classe C^1, alors les fonctions

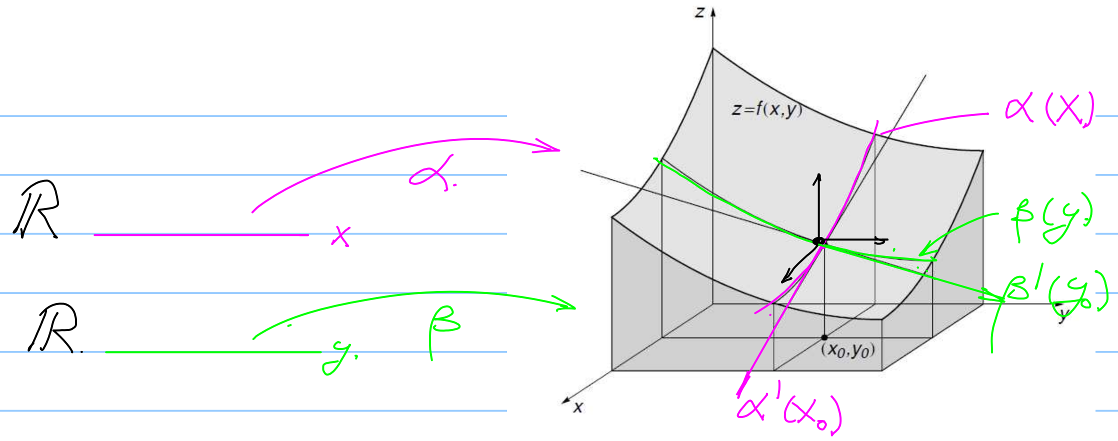
$$\alpha(x) := (x, y_0, g(x))^T \longleftrightarrow \text{graphe de } g \subset \mathbb{R}^3$$
$$\beta(y) := (x_0, y, h(y))^T \longleftrightarrow \text{graphe de } h \subset \mathbb{R}^3$$

sont des paramétrisation de courbes de classe C^1 et on a

$$\alpha'(x_0) = (1, 0, g'(x_0))^T = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))^T$$

$$\beta'(y_0) = (0, 1, h'(y_0))^T = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))^T$$

Ces vecteurs vitesse sont des vecteurs dans une copie locale de $\mathbb{R}^3$ attachée en le point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0, y_0)$.



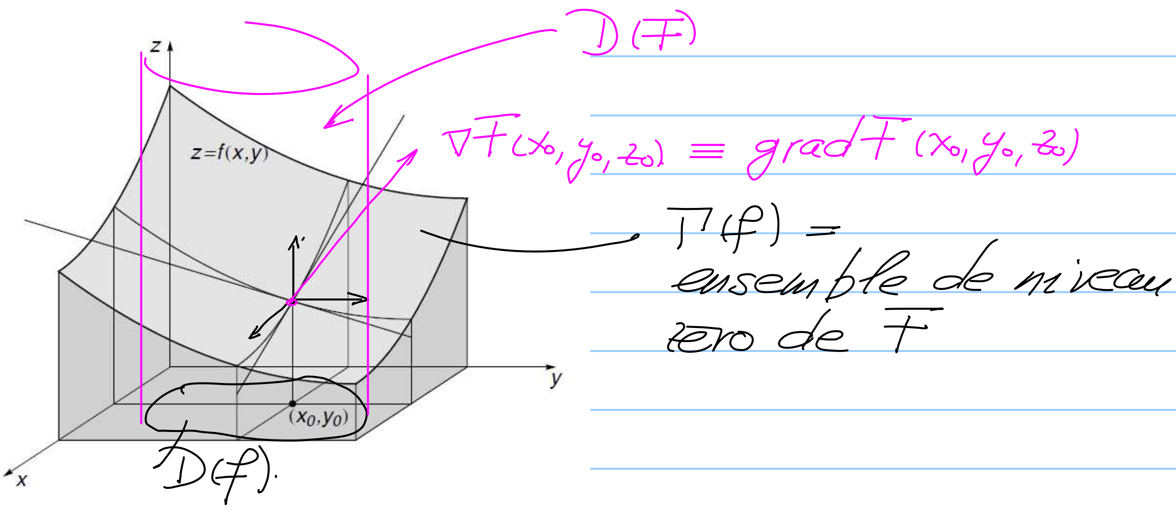
4.5.5. Gradient d'une fonction auxiliaire

Soit $F : D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y,z) = z - f(x,y).$$

Alors l'ensemble de niveau zéro de F est le graphe de f et on a en $(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\equiv z_0}) \in D(F)$

$$\operatorname{grad} F\,(x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ 1\right)^T$$



A noter que $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ est par définition un vecteur dans le même repère local de $\mathbb{R}^3$ attaché en (x_0,y_0,z_0) que les vecteurs $\alpha'(x_0)$ et $\beta'(y_0)$ du paragraphe précédent et qu'il est orthogonal à ces vecteurs

4.5.6. Les fonctions dérivées partielles

<u>Définitions</u> ($n=2$) soit $f: D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent pour tout $(x_0,y_0) \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}: D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

<u>Notations équivalentes</u> (exemples)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}, \ \partial_x f, \ f'_x, \ f_x, \ \partial_1 f, \ D_1 f, \ D_x f, \ldots$$

<u>Définition (n général)</u> soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0), \quad i = 1 \ldots n,$$

existent pour tout $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \to \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}+h\underline{e}_i)-f(\underline{x})}{h}$$

$i = 1, \ldots, n.$

Exemple: soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 - y^2$$

Alors on a (règles de calcul habituelles):

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

On a donc par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2$

Test de compréhension : soit f comme dans l'exemple. Alors on peut s'amuser à définir la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) := \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

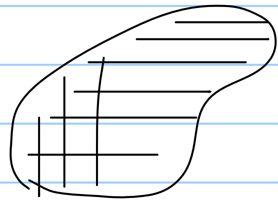
On trouve $g(x,y) = -2x$.

4.5.7. Deuxièmes dérivées partielles

Définition: soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$



existent. Pour chacune de ces fonctions on peut alors étudier l'existence des dérivées partielles par rapport à x et y en $(x_0, y_0) \in D$ (calcul des limites). Si les nombres

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent pour tout $(x_0,y_0) \in D$ on peut définir les fonctions deuxièmes dérivées partielles, notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : D \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : D \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$