4.5. Dérivées partielles

4.5.1. Définitions

<u>Remarque:</u> les dérivées partielles d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendent du choix des coordonnées. Il est donc indispensable de préciser le choix des variables de la fonction.

<u>Définition:</u> la dérivée partielle d'une fonction de plusieures variables est la dérivée par rapport à une des variables, les autres variables étant gardées constantes

<u>Définition explicite pour le cas $n=2$</u>

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, $(x_0,y_0) \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. La dérivée partielle de f en (x_0,y_0) par rapport à la variable x est le nombre

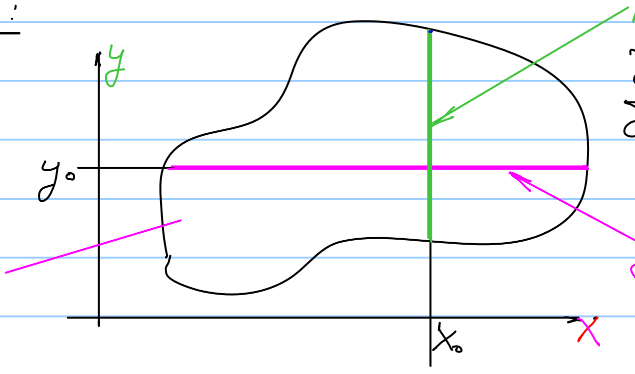
$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

et la dérivée partielle de f en (x_0,y_0) par rapport à la variable y est le nombre

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Explication:

le domaine de f et le choix des coordonnées



$h(y) \equiv f(x_0, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := h'(y_0)$

$g(x) \equiv f(x, y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := g'(x_0)$

$g(x) \equiv f(x, y_0)$ est définie sur la ligne ———

$h(y) \equiv f(x_0, y)$ est définie sur la ligne |

Voir le dessin 3d plus loin et les paragraphes à suivre pour des interprétations de ces nombres

Notations équivalentes

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}$, $\partial_x f(x_0, y_0)$, $f_x'(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$

$D_x f(x_0, y_0)$, $\partial_1 f(x_0, y_0)$, $D_1 f(x_0, y_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}$ à éviter

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$, $\partial_y f(x_0, y_0)$, $f_y'(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$

$D_y f(x_0, y_0)$, $\partial_2 f(x_0, y_0)$, $D_2 f(x_0, y_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}$ à éviter

Définition: soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La dérivée partielle de f en $\underline{x}_0 \in D$ par rapport à la variable x_k est le nombre:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h \cdot e_k) - f(\underline{x}_0)}{h}, \quad k = 1, \dots, n$$

où $e_k = (0, \dots, 0, \underset{\text{position } k}{1}, 0, \dots, 0)^T$ est le k-ème vecteur de base de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

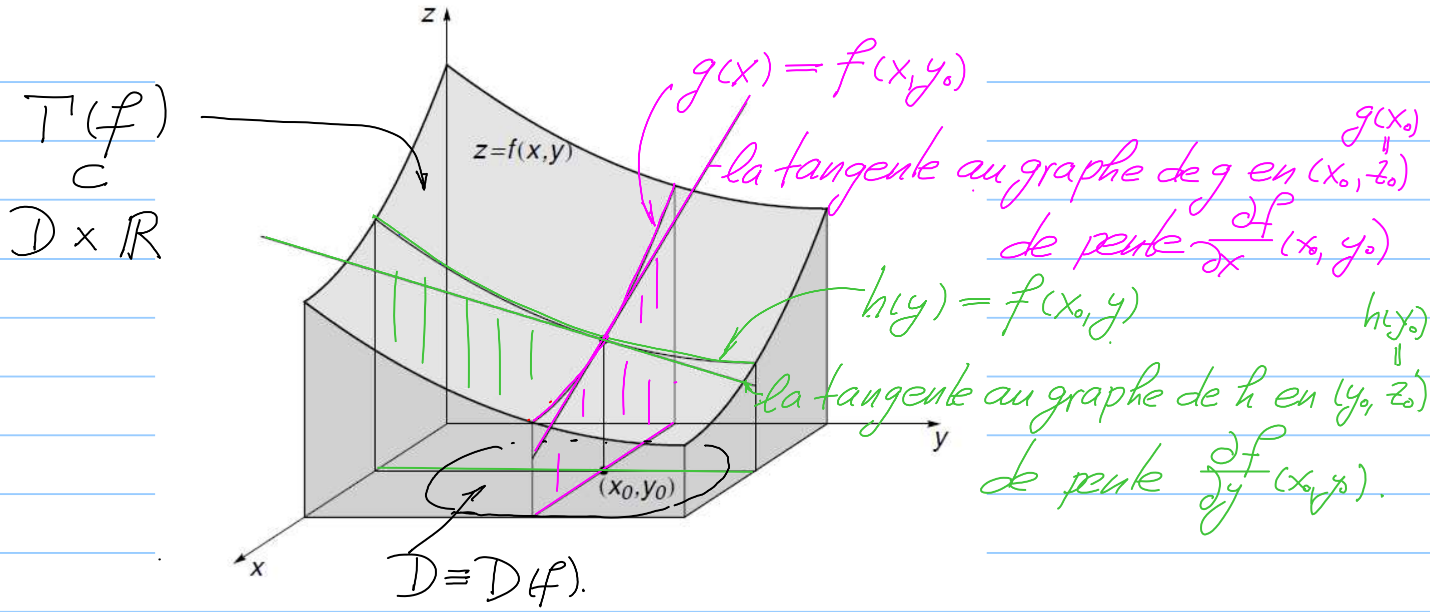
Notations équivalentes

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)}$, $\partial_{x_k} f(\underline{x}_0)$, $f'_{x_k}(\underline{x}_0)$, $f_{x_k}(\underline{x}_0)$, $D_k f(\underline{x}_0)$,

$\partial_k f(\underline{x}_0)$, $\cancel{\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_k}}$ à éviter.

4.5.2. Interprétation géométrique (dessin pour $n=2$)

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente au graphe de la fonction $g(x) = f(x, y_0)$ en (x_0, z_0), $z_0 = g(x_0) = f(x_0, y_0)$, et la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente au graphe de la fonction $h(y) = f(x_0, y)$ en (y_0, z_0), avec $z_0 = h(y_0) = f(x_0, y_0)$



4.5.3. Le gradient

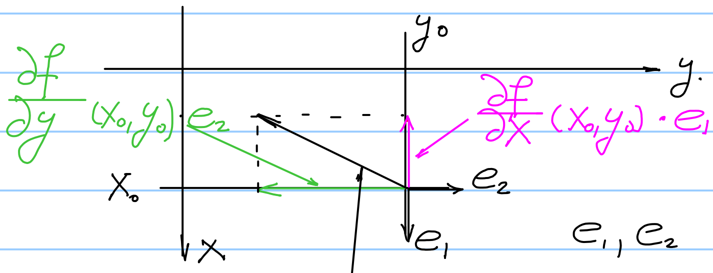
Définition : soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, et soit $\underline{x}_0 \in D$.
Le vecteur.

$$\nabla f(\underline{x}_0) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{x}_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\right)^T$$

$\nabla \equiv$ "Nabla" $=\!=$ 

est appelé le gradient de f en $\underline{x}_0$.

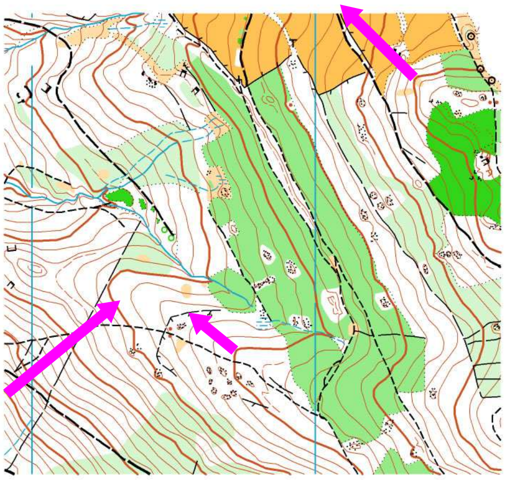
Représentation graphique (dans l'exemple)

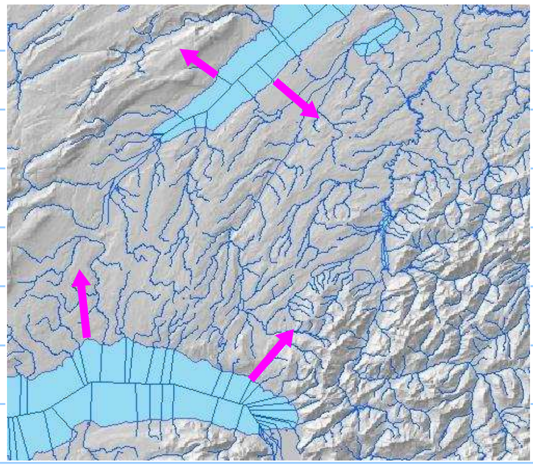


e_1, e_2 = repère d'une copie locale de $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$

Nous verrons que pour une fonction différentiable (voir plus loin pour la définition) le gradient indique, <u>dans le domaine de définition de la fonction f</u>, la direction de la pente la plus forte (positive).
La norme du gradient est égale à cette pente.





4.5.4. Vecteurs tangents (cas $n=2$)

Si les fonctions $g(x) := f(x, y_0)$ et $h(y) := f(x_0, y)$ sont de classe C^1, alors les fonctions

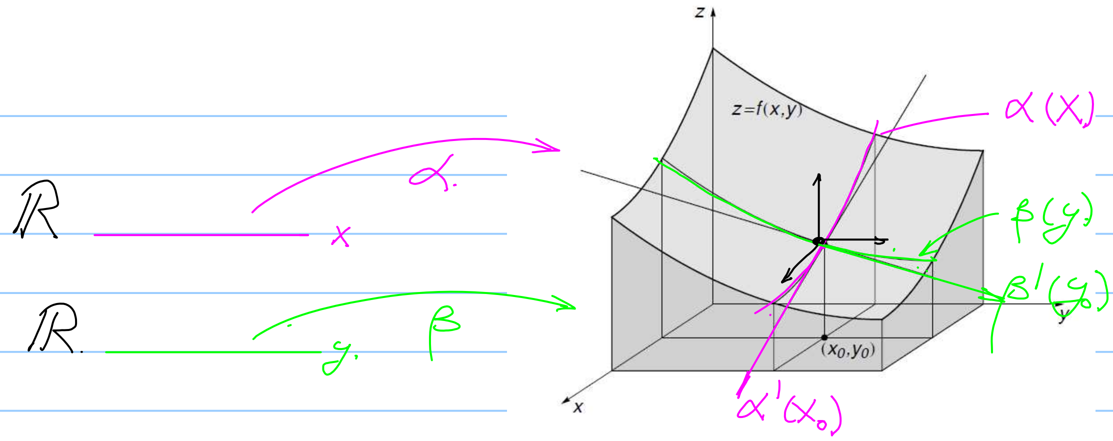
$$\alpha(x) := (x, y_0, g(x))^T \longleftrightarrow \text{graphe de } g \subset \mathbb{R}^3$$
$$\beta(y) := (x_0, y, h(y))^T \longleftrightarrow \text{graphe de } h \subset \mathbb{R}^3$$

sont des paramétrisation de courbes de classe C^1 et on a

$$\alpha'(x_0) = (1, 0, g'(x_0))^T = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^T$$

$$\beta'(y_0) = (0, 1, h'(y_0))^T = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^T$$

Ces vecteurs vitesse sont des vecteurs dans une copie locale de $\mathbb{R}^3$ attachée en le point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0, y_0)$.



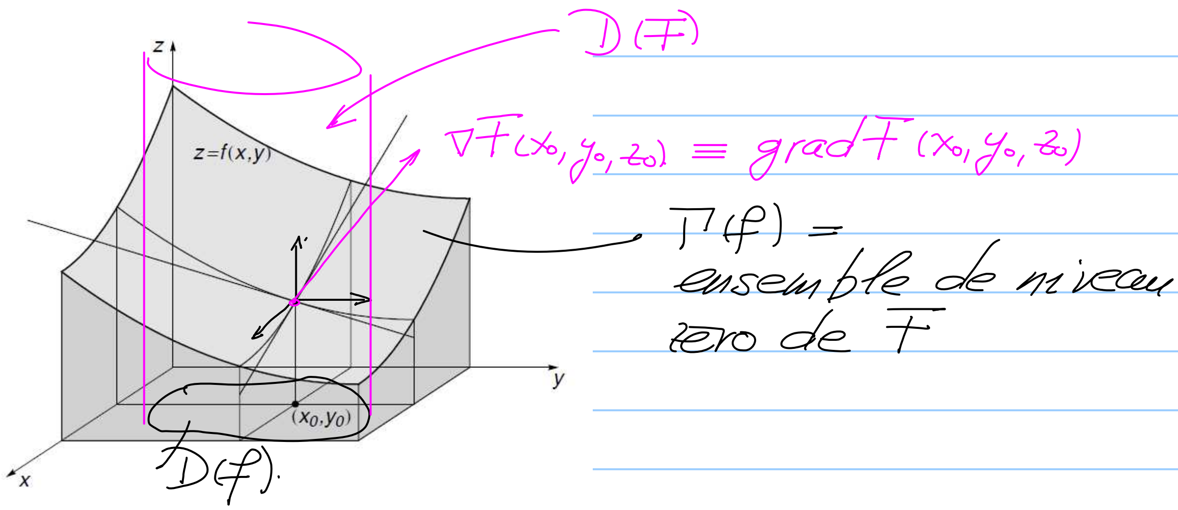
4.5.5. Gradient d'une fonction auxiliaire

Soit $F : D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y,z) = z - f(x,y).$$

Alors l'ensemble de niveau zéro de F est le graphe de f et on a en $(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\equiv z_0}) \in D(F)$

$$\operatorname{grad} F\,(x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ ,\ 1\right)^T$$



A noter que $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ est par définition un vecteur dans le même repère local de $\mathbb{R}^3$ attaché en (x_0,y_0,z_0) que les vecteurs $\alpha'(x_0)$ et $\beta'(y_0)$ du paragraphe précédent et qu'il est orthogonal à ces vecteurs

4.5.6. Les fonctions dérivées partielles

<u>Définitions</u> $(n=2)$ soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent pour tout $(x_0,y_0) \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

<u>Notations équivalentes</u> (exemples)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}, \ \partial_x f, \ f'_x, \ f_x, \ \partial_1 f, \ D_1 f, \ D_x f, \ldots$$

<u>Définition (n général)</u> soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0), \quad i = 1 \ldots n,$$

existent pour tout $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}+h e_i)-f(\underline{x})}{h}$$

$i = 1, \ldots, n$.

Exemple: soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 - y^2$$

Alors on a (règles de calcul habituelles):

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

On a donc par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2$

Test de compréhension : soit f comme dans l'exemple. Alors on peut s'amuser à définir la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) := \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

On trouve $g(x,y) = -2x$.