Peter Wittwer
21 mars 2025

Analyse avancée II – Corrigé de la série 5B

Echauffement. (Fonctions définies par des séries)

i) On a $f(x) = g\left(x \ln(x)\right)$, où $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^n$, et cette série converge absolument pour tout z (le rayon de convergence z est $+\infty$). La fonction f est donc bien définie. (A noter que $g(z) = \mathrm{e}^{-z}$, et donc $f(x) = x^{-x}$, mais le but de cet échauffement est d'utiliser la représentation par la série).

ii) La série qui définie g peut être dérivée terme par terme :

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\, z^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^n = -g(z)$$

et donc, par dérivation en chaîne, $f'(x) = g'\left(x \ln(x)\right)\, (\ln(x) + 1) = -g\left(x \ln(x)\right)\, (\ln(x) + 1) = -f(x)\, (\ln(x) + 1)$ et donc $f' + (\ln(x) + 1)\, f = 0$.

iii) Par séparation des variables l'on obtient que $y(x) = C\mathrm{e}^{-x\ln(x)} = Cx^{-x}$. Avec $f(1) = g(0) = 1$ on trouve que $C = 1$ et donc $f(x) = x^{-x}$ et donc $f(2) = \frac{1}{4}$.

Exercice 1. (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}\, x^{3n}$.

i) On par le critère de d'Alambert

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(3n)!}}{\frac{1}{(3\,(n+1))!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|(3n+3)\,(3n+2)\,(3n+1)\right| = +\infty.$$

ii) A partir de f on obtient en dérivant terme par terme :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}\, x^{3n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}\, x^{3n} \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} (3n)\, x^{3n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)!}\, x^{3n-1} \\
f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} (3n)(3n-1)\, x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)!}\, x^{3n-2}
\end{aligned}$$

et donc

$$(f + f' + f'')(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(3n-2)!} x^{3n-2} + \frac{1}{(3n-1)!} x^{3n-1} + \frac{1}{(3n)!} x^{3n} \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \mathrm{e}^x.$$

iii) Par la méthode des coefficients indéterminés on trouve que la solution générale de l'équation différentielle pour f est

$$f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x + C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x\right).$$

En évaluant la série pour f et pour f' en $x = 0$ on obtient que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, ce qui donne pour C_1 et C_2 les équations

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{3} + C_1 = 1 \\ f'(0) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $C_1 = \dfrac{2}{3}$ et $C_2 = 0$. On a donc que

$$f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x\right)$$

et on peut maintenant déterminer la somme demandée en évaluant la fonction f en $x = 1$:

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\mathrm{e} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1.168058313\ldots$$

Exercice 2. (Equations indépendantes de x)
On constate que $y(x) = 0$ est une solution sur $\mathbb{R}$. De plus, l'équation étant autonome, si $y(x)$ est une solution de l'équation, alors $\forall C_1 \in \mathbb{R}$, $y(x + C_1)$ est aussi une solution (sur le domaine translaté). On pose $y'(x) = u(y(x))$ avec $u(t)$ une nouvelle fonction inconnue. Donc $y''(x) = u'(y(x))y'(x) = (u'u)(y(x))$ et, en substituant dans l'équation, on trouve pour u l'équation différentielle

$$u'u - \frac{t}{1+t^2}\,\left(u^2 + 1\right) = 0$$

que l'on peut résoudre facilement par séparation des variables et l'on obtient pour $C > 0$:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + u^2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + t^2\right) + \frac{1}{2}\ln(C),$$

ou encore, pour $C > 0$,

$$1 + u(t)^2 = C\,\left(1 + t^2\right).$$

Pour $C > 0$, $C \neq 1$ on obtient alors

$$u(t) = \pm\sqrt{C\,t^2 + C - 1},$$

et pour $C = 1$

$$u(t) = \pm t,$$

avec $t \in \mathbb{R}$ si $C \geq 1$ et $|t| > \sqrt{\frac{1-C}{C}}$ si $0 < C < 1$.

Finalement, **il ne faut pas oublier** de résoudre pour les différents cas l'équation $y' = u(y)$. C'est-à-dire, si $C > 0$, $C \neq 1$, l'équation

$$y' = \pm\sqrt{C\,y^2 + C - 1}\,,$$

et, si $C = 1$, les équations

$$y' = \pm y$$

.

i) $\underline{C > 1}$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\,\text{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{C}{C-1}}\;y\right) = \pm\,(x + C_1)\,,$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$. On obtient donc, pour chaque $C > 1$ donné, et quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$, la solution

$$y(x) = \sqrt{\frac{C-1}{C}}\;\sinh\Big(\pm\sqrt{C}\;\;(x + C_1)\Big)\,,$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\underline{C = 1}$

Quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$ on a les solutions

$$y(x) = \pm\mathrm{e}^{\pm(\mathrm{x}+\mathrm{C}_1)},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, ainsi que la solution

$$y(x) = 0,$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

iii) $\underline{0 < C < 1}$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\,\text{arccosh}\left(\sqrt{\frac{C}{1-C}}\;y\right) = \pm\,(x + C_1)\,,$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$. On obtient donc, pour chaque $0 < C < 1$, et quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$, la solution

$$y(x) = \sqrt{\frac{1-C}{C}}\;\cosh\Big(\pm\sqrt{C}\;x + C_1\Big)\,,$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

Comme discuté au cours, C_1 représente l'invariance par translation des solutions qui est due au fait que l'équation de départ est autonome.

Exercice 3. (Equations indépendantes de y)
On pose $y'(x) = u(x)$ avec u la nouvelle fonction inconnue pour laquelle on a l'équation du premier ordre

$$u' - \frac{x}{1+x^2}\left(u^2+1\right) = 0\ .$$

Par séparation des variables on obtient

$$\arctan(u) = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$ et donc

$$u(x) = \tan\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C\right)$$

sur tout intervalle ouvert $I \subset D$, où

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \pm\sqrt{\mathrm{e}^{-2C}\mathrm{e}^{(2n+1)\pi} - 1}\ ,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq \frac{C}{\pi} - \frac{1}{2}\right\}.$$

La solution générale est l'union des ensembles des primitives de u sur chacun des intervalles ouverts maximales de D.

Exercice 4. (Équations indépendantes de x et y)

i) Solution paramétrique

On pose $y' = u$ et on obtient l'équation $u' - u^2 - 1 = 0$ et donc par séparation des variables

$$x = \arctan(u) + C_1$$
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + C_2$$

avec $u \in \mathbb{R}$ utilisé comme paramètre.

ii) Comme équation indépendante de x

On pose $y'(x) = u(y(x))$, avec $u(t)$ la nouvelle fonction inconnue. On obtient l'équation

$$u'u - u^2 - 1 = 0,$$

et par séparation des variables, $\forall C \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+u(t)^2\right) = t + C, \qquad t \in \left]-C, +\infty\right[,$$

et en isolant $u(t)$, $\forall C \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{2t+2C} - 1}, \qquad t \in \left]-C, +\infty\right[.$$

Finalement on doit résoudre les équations

$$y'(x) = u(y(x)) = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{2y+2C} - 1},$$

et par séparation des variables on trouve, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$$\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2y(x)+2C_1} - 1}\right) = \pm x + C_2$$

et en isolant $y(x)$ de l'équation $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (le $\pm$ disparaît avec le carré),

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\tan\left(x + C_2\right)\right)^2\right) + C_1,$$

avec $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi - C_2, \frac{\pi}{2} + n\pi - C_2\right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ aribitraire.

iii) Comme équation indépendante de y

On pose $y'(x) = u(x)$ et on obtient l'équation

$$u' - u^2 - 1 = 0$$

et donc par séparation des variables $\forall C_1 \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(u(x)) = x + C_1$$

et donc $\forall C_1 \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \tan(x + C_1)$$

et donc l'équation

$$y'(x) = \tan(x + C_1),$$

et par intégration, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = -\ln(|\cos(x + C_1)|) + C_2,$$

avec $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi - C_1, \frac{\pi}{2} + n\pi - C_1\right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ aribitraire.